本征正交分解

① 解空间

$$V \in R^{N\times k}, \quad V^T V = I_k$$

$$J(\Pi_{r,v}) = \int_0^T \|u(t) - \Pi_{r,v} u(t)\|_2^2 \, dt$$

$$= \int u^T(t) u(t) - u^T(t) V V^T u(t) \, dt$$

$$= tr[\hat{K}] - tr[V^T \hat{K} V]$$

$$\max_{V\in R^{N\times k},\, V^TV = I_k} tr[V^T \hat{K} V] \qquad \hat{K} = Q^T \Sigma Q \quad (\hat{K} Q^T = Q^T \Sigma)$$

$$= \max_{U\in R^{N\times k},\, U^TU = I_k} tr[U^T \Sigma U] \qquad (U = QV)$$

$$Q^T = [\hat{\phi}_1 \; \hat{\phi}_2 \cdots \hat{\phi}_N]$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{N1} & u_{N2} & \cdots & u_{Nk} \end{bmatrix} \qquad U^T \Sigma = \begin{bmatrix} \lambda_1 u_{11} & \lambda_2 u_{21} & \cdots & \lambda_N u_{N1} \\ \lambda_1 u_{12} & \lambda_2 u_{22} & \cdots & \lambda_N u_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 u_{1k} & \lambda_2 u_{2k} & & \lambda_N u_{Nk} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_{ij}^2 \qquad \sum_{j=1}^{k} u_{ij}^2 \le 1$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{k} u_{ij}^2 \right) \qquad \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{k} u_{ij}^2 = k$$

$$\le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$$

当且仅当 $U = \begin{bmatrix} \bar{U} \\ 0 \end{bmatrix}$ 取等 $\qquad V = Q^T U = \operatorname{span}\{\hat{\phi}_1 \cdots \hat{\phi}_k\}$

② 求解特征值问题

$K = SS^T \qquad R = S^TS$

K的非零特征值 $\quad K\phi = \lambda\phi \quad (\phi^T\phi = 1)$

$$SS^T\phi = \lambda\phi$$

$$S^TS\,S^T\phi = \lambda S^T\phi$$

$\Rightarrow (\lambda, \frac{S^T\phi}{\sqrt{\lambda}})$ 是R的特征值、特征向量对 ← 归一化

R的非零特征值 $\quad R\psi = \lambda\psi \quad (\psi^T\psi = 1)$

$$S^TS\psi = \lambda\psi$$

$$SS^TS\psi = \lambda S\psi$$

$\Rightarrow (\lambda\ \frac{S\psi}{\sqrt{\lambda}})$ 是K的特征值特征向量对 ← 归一化

③ 降阶模型维度选取

$$\varepsilon_{V\perp}(t) = (I - \Pi_{V,V})\,u(t)$$

$$\varepsilon_{V\perp}(t_i) = (I - \Pi_{V,V})\,u(t_i)$$

$$\| \mathcal{E}_{V\perp}(t_1) \ \ \mathcal{E}_{V\perp}(t_2) \cdots \ \ \mathcal{E}_{V\perp}(t_{N_{snap}}) \|_F$$

$$= \| (I - \Pi_{V,V}) S \|_F$$

$$= \| S - \ \ V V^T S \|_F \qquad S = U_r \Sigma_r V_r^T$$

$$= \| U_r \Sigma_r V_r^T - \ \ U_r \begin{bmatrix} \Sigma_{r,k} & \\ & 0 \end{bmatrix} V_r^T \|_F \qquad U_r = \boxed{V \mid V_c}$$

$$= \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \sigma_{k+2}^2 \cdots \ \ \sigma_N^2}$$

$$\| U_r \Sigma V_r^T \|_F^2 = tr(V_r \Sigma U_r^T U_r \Sigma V_r^T)$$

$$= tr(V_r \Sigma^2 V_r^T)$$

$$= tr(\Sigma^2)$$

使用 $tr(AB^T) = tr(B^T A)$ 其中 $A, B \in N^{n \times m}$

$$= \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$$

$$\| u(t_1) \ \ u(t_2) \cdots \ \ u(t_{N_{snap}}) \|_F^2$$

$$= \| S \|_F^2$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \cdots \ \ + \sigma_{N_{snap}}^2}$$

条件数：

矩阵范数：$\|A\| = \max\limits_{x} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$$\|A^{-1}\| = \max_{y} \frac{\|A^{-1}y\|}{\|y\|} = \max_{x} \frac{\|x\|}{\|Ax\|}$$

$$= 1 \Big/ \min_{x} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

矩阵条件数 $k(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$，描述了矩阵A对向量的拉伸能力和压缩能力，$k(A)$越大，向量在变换后越可能变化得越多。

$$Ax = b \qquad A(x+\delta x) = b + \delta b$$

$$\Rightarrow \quad A\delta x = \delta b$$

$$\|A\| \geq \frac{\|A\delta x\|}{\|\delta x\|} = \frac{\|\delta b\|}{\|\delta x\|}$$

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{\|A^{-1}b\|}{\|b\|} = \frac{\|x\|}{\|b\|}$$

$$k(A) \geq \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|\delta x\|} \qquad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{k(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

同理：

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{\|A^{-1}\delta b\|}{\|\delta b\|} = \frac{\|\delta x\|}{\|\delta b\|}$$

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|b\|}{\|x\|}$$

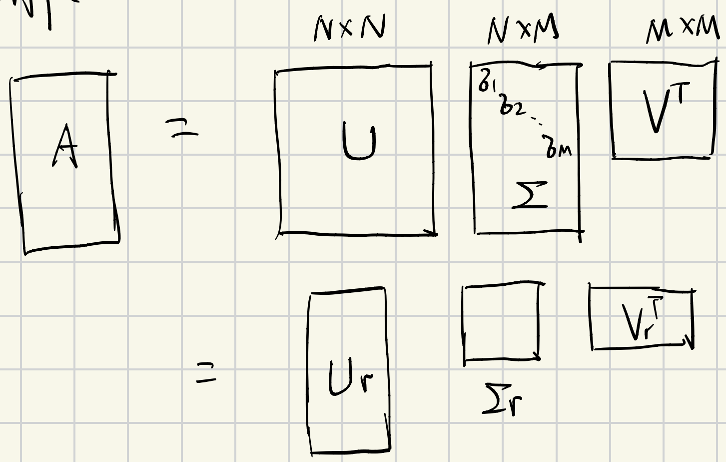
$$\kappa(A) \geq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}\ \frac{\|b\|}{\|\delta b\|} \qquad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

$\kappa(A)$唯一决定了线性方程的解x受b的噪音的影响程度，$\kappa(A)$越大，结果越受影响。

$$\max \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max \frac{x^TA^TAx}{x^Tx} = \sigma_{max}(A)$$

$$\min \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \min \frac{x^TA^TAx}{x^Tx} = \sigma_{min}(A)$$

奇异值分解：



$$A = \sum \sigma_i u_i v_i^T$$

$$A^T A = V_r \Sigma_r^2 V_r^T$$

$$A A^T = U_r \Sigma_r^2 U_r^T$$