

基于矩匹配的降阶模型

黄政宇

北京大学北京国际数学研究中心
北京大学国际机器学习研究中心



线性动力系统

➤ 线性模型

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) &= A\mathbf{u}(t) + Bw(t) \\ y(t) &= C\mathbf{u}(t) + Dw(t) \\ \mathbf{u}(-\infty) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

➤ 显示解

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t, w; -\infty, \mathbf{0}) &= \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} B w(\tau) d\tau \\ y(t) &= C \int_{-\infty}^t e^{A(t-\tau)} B w(\tau) d\tau + Dw(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) w(\tau) d\tau \\ h(t) &= \begin{cases} Ce^{At}B + \delta(t)D, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}\end{aligned}$$



线性动力系统

➤ Laplace变化

$$H(\xi) = (\mathcal{L}h)(\xi) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-\xi t} d\tau$$

➤ 输入输出映射的计算

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau)w(\tau)d\tau = (h * w)(t)$$

$$(\mathcal{L}h)(\xi) = h_0 + h_1\xi^{-1} + h_2\xi^{-2} + h_3\xi^{-3} \dots h_k\xi^{-k} \dots$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}y)(\xi) &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^t h(t - \tau)w(\tau)d\tau e^{-\xi t} dt \\ &= (\mathcal{L}h)(\xi) (\mathcal{L}w)(\xi)\end{aligned}$$



线性动力系统

➤ 传递函数(Transfer function)

$$H(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\xi t} h(t) dt$$

$$H(\xi) = \eta_0(\infty) + \eta_1(\infty) \frac{1}{\xi} + \dots + \eta_m(\infty) \frac{1}{\xi^m} + \dots$$

➤ 传递函数

$$\begin{aligned} H(\xi) &= C(\xi I - A)^{-1}B + D \\ &= C \left(\frac{1}{\xi} + \frac{A}{\xi^2} + \frac{A^2}{\xi^3} \dots \dots \right) B + D \end{aligned}$$

$$\eta_0(\infty) = D$$

$$\eta_m(\infty) = CA^{m-1}B$$



线性动力系统

➤ 线性模型

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) &= A\mathbf{u}(t) + Bw(t) \\ y(t) &= C\mathbf{u}(t) + Dw(t) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

➤ 基于 Petrov-Galerkin 投影的降阶模型

$$\frac{dq(t)}{dt} = (W^T V)^{-1} W^T (AVq(t) + Bw(t))$$

$$y(t) \approx CVq(t) + Dw(t)$$

$$\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (W^T V)^{-1} W^T AV & (W^T V)^{-1} W^T B \\ CV & D \end{pmatrix}$$



矩匹配方法

➤ 矩匹配

根据

$$\eta_m(\infty) = \eta_{rm}(\infty) \quad (m = 0, 1, \dots, k)$$

确定 W 和 V

构造降阶模型

$$\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (W^T V)^{-1} W^T A V & (W^T V)^{-1} W^T B \\ C V & D \end{pmatrix}$$



矩匹配方法

➤ 高维模型

$$\begin{aligned} H(\xi) &= C(\xi I - A)^{-1}B + D \\ &= \eta_0(\infty) + \eta_1(\infty)\frac{1}{\xi} + \cdots + \eta_m(\infty)\frac{1}{\xi^m} + \cdots \end{aligned}$$

$$\eta_0(\infty) = D, \quad \eta_m(\infty) = CA^{m-1}B \quad \forall m \geq 1$$

➤ 降阶模型

$$\eta_{r0}(\infty) = D$$

$$\eta_{rm}(\infty) = CV((W^T V)^{-1}W^T AV)^{m-1}(W^T V)^{-1}W^T B \quad \forall m \geq 1$$



矩匹配方法

矩匹配不变性

基于Petrov-Galerkin投影的降阶模型的传递函数，以及相应的矩

$$\eta_{r0}(\infty), \eta_{rm}(\infty) \quad \forall m \geq 1$$

仅依赖于子空间 $\text{Range}(W)$ 和 $\text{Range}(V)$ ，并不依赖于左右降阶基 W 或 V 的选取。



矩匹配方法

➤ 矩匹配目标

$$\eta_m(\infty) = \eta_{rm}(\infty)$$

为了简化起见，本讲剩余部分将重点放在单输入-单输出的情况上，即

$$B = b \in R^N, \quad C^T = c^T \in R^N$$



矩匹配

矩匹配定理

选取右降阶基 $V \in R^{N \times k}$ 使得其值域满足

$$\text{Range}(V) = \mathcal{K}_n(A, b) = \text{span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{k-1}b\}$$

选取左降阶基 $W \in R^{N \times k}$ 满足

$$W^T V = I$$

那么，利用 W 和 V 通过 Petrov-Galerkin 投影方法从高维模型 (A, B, C, D) 得到的降阶模型，将满足以下性质：

$$\eta_{rm}(\infty) = \eta_m(\infty) \quad \forall 0 \leq m \leq k - 1$$



Arnoldi 方法

➤ Arnoldi 方法

-输入： $A \in R^{N \times N}$, $b \in R^N$

-输出： $\mathcal{K}_k(A, b)$ 的正交基 $V_k \in R^{N \times k}$

➤ 基本想法

$$V_m \Leftrightarrow \text{span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{m-1}b\}$$

$$v_{m+1} = Av_m - V_m(V_m^T Av_m)$$



Arnoldi 方法

➤ Arnoldi 方法

-输入 : $A \in R^{N \times N}$, $b \in R^N$

-输出 : $\mathcal{K}_k(A, b)$ 的正交基 $V_k \in R^{N \times k}$

$$v_1 = \frac{b}{\|b\|}$$

$$V_1 = [v_1]$$

$$\alpha_1 = v_1^T A v_1$$

$$f_1 = A v_1 - V_1 (V_1^T A v_1)$$

For $j = 1:k - 1$ do

$$v_{j+1} = \frac{f_j}{\|f_j\|}$$

$$V_{j+1} = [V_j, v_{j+1}]$$

$$f_{j+1} = A v_{j+1} - V_{j+1} (V_{j+1}^T A v_{j+1})$$



Arnoldi 方法

➤ Hessenburg 矩阵

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & * & * & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & * & \dots & & * \\ & \beta_2 & * & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \alpha_{k-1} & * \\ & & & \dots & \beta_{k-1} & \alpha_k \end{bmatrix}$$

$$V_k^T V_k = I$$

$$H_k = V_k^T A V_k \text{ 是上 Hessenburg 矩阵, } V_k^T b = \|b\| e_1$$

$$A V_j = V_j H_j + f_j e_j^T$$

$$V_j^T V_j = I \quad V_j^T f_j = 0 \quad v_{j+1} = \frac{f_j}{\|f_j\|}$$



Arnoldi 方法

➤ Arnoldi 方法

$$v_1 = \frac{b}{\|b\|}$$

$$V_1 = [v_1]$$

$$\alpha_1 = v_1^T A v_1 \quad H_1 = [\alpha_1]$$

$$f_1 = A v_1 - \alpha_1 v_1$$

For $j = 1:m - 1$ do

$$\beta_j = \|f_j\| \quad v_{j+1} = \frac{f_j}{\beta_j} \quad V_{j+1} = [V_j, v_{j+1}]$$

$$h = V_{j+1}^T (A v_{j+1})$$

$$f_{j+1} = A v_{j+1} - V_{j+1} h$$

$$H_{j+1} = \begin{bmatrix} H_j & \\ \beta_j e_j^T & h \end{bmatrix}$$



矩匹配

矩匹配定理

定义

$$R_j = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{k-1}b]$$
$$O_j^T = [c^T \quad A^T c^T \quad A^{T^2} c^T \quad \dots \quad A^{T^{k-1}} c^T]$$

假设 $H_j = O_j R_j (1 \leq j \leq k)$ 均非奇异。那么可以选取右降阶基 $V \in R^{N \times k}$ 使其满足

$$\text{Range}(V) = \mathcal{K}_k(A, b)$$

选取左降阶基 $W \in R^{N \times k}$ 使其满足

$$\text{Range}(W) = \mathcal{K}_k(A^T, c^T) \quad W^T V = I$$

利用 W 和 V 通过 Petrov-Galerkin 投影方法从高维模型 (A, B, C, D) 得到的降阶模型, 将满足以下性质:

$$\eta_{rm}(\infty) = \eta_m(\infty) \quad \forall 0 \leq m \leq 2k - 1$$



双侧Lanczos方法

➤ 双侧Lanczos方法

-输入： $A \in R^{N \times N}$ ， $b \in R^N$

-输出： $\mathcal{K}_k(A, b)$ 的基 $V_k \in R^{N \times k}$ ， $\mathcal{K}_n(A^T, c^T)$ 的基 $W_k \in R^{N \times k}$ ，满足 $W_k^T V_k = I$ 。

➤ 基本想法

$$V_m \Leftrightarrow \text{span}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{m-1}b\}$$

$$W_m \Leftrightarrow \text{span}\{c^T, A^T c^T, A^{T^2} c^T, \dots, A^{T^{m-1}} c^T\}$$

$$v_{m+1} = Av_m - \alpha_m v_m - \gamma_m v_{m-1}$$

$$w_{m+1} = A^T w_m - \alpha_m w_m - \beta_m w_{m-1}$$

$$v_{m+1} \perp w_m, w_{m+1} \perp v_m \rightarrow \alpha_m = w_m^T Av_m$$

$$v_{m+1} \perp w_{m-1} \rightarrow \gamma_m = w_{m-1}^T Av_m$$

$$w_{m+1} \perp v_{m-1} \rightarrow \beta_m = w_m^T Av_{m-1}$$



双侧Lanczos方法

➤ 双侧Lanczos方法

-输入： $A \in R^{N \times N}$ ， $b \in R^N$

-输出： $\mathcal{K}_k(A, b)$ 的基 $V_k \in R^{N \times k}$ ， $\mathcal{K}_k(A^T, c^T)$ 的基
 $W_k \in R^{N \times k}$ ，满足 $W_k^T V_k = I$ 。

$$\beta_1 = \sqrt{|b^T c^T|}, \quad \gamma_1 = \text{sign}(b^T c^T) \beta_1, \quad v_1 = \frac{b}{\beta_1}, \quad w_1 = \frac{c^T}{\gamma_1}$$

For $j = 1:k - 1$ do

$$\alpha_j = w_j^T A v_j$$

$$f_{j+1} = A v_j - \alpha_j v_j - \gamma_j v_{j-1}$$

$$g_{j+1} = A^T w_j - \alpha_j w_j - \beta_j w_{j-1}$$

$$\beta_{j+1} = \sqrt{|f_{j+1}^T g_{j+1}|}, \quad \gamma_{j+1} = \text{sign}(f_{j+1}^T g_{j+1}) \beta_{j+1}$$

$$v_{j+1} = \frac{f_{j+1}}{\beta_{j+1}}, \quad w_{j+1} = \frac{g_{j+1}}{\gamma_{j+1}}$$



双侧Lanczos方法

➤ 三对角矩阵

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_3 & \cdots & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \\ & & & & \alpha_{k-1} & \gamma_k \\ & & & \cdots & \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}$$

$$W_k^T V_k = I$$

$$H_k = W_k^T A V_k \text{ 是三对角矩阵, } W_k^T b = \beta_1 e_1, c V_k = \gamma_1 e_1^T$$



线性动力系统

➤ 传递函数(Transfer function)

$$H(\xi) = \int_0^{\infty} e^{-\xi t} h(t) dt = D + C(\xi I - A)^{-1} B$$

在其它位点进行矩匹配

$$\begin{aligned} H(\xi) &= H(\xi_0) + (-1) \frac{d}{d\xi} H(\xi_0) \frac{\xi - \xi_0}{1!} + \dots \\ &\quad + (-1)^m \frac{d^m}{d\xi^m} H(\xi_0) \frac{(\xi - \xi_0)^m}{m!} + \dots \\ &= \eta_0(\xi_0) + \eta_1(\xi_0) \frac{\xi_0 - \xi}{1!} + \dots + \eta_m(\xi_0) \frac{(\xi_0 - \xi)^m}{m!} + \dots \end{aligned}$$

其中：

$$\eta_m(\xi_0) = \int_0^{\infty} t^m e^{\xi_0 t} h(t) dt = (-1)^m \frac{d^m}{d\xi^m} H(\xi_0)$$



线性动力系统

➤ 线性模型

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t) &= A\mathbf{u}(t) + Bw(t) \\ y(t) &= C\mathbf{u}(t) + Dw(t) \\ \mathbf{u}(-\infty) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

➤ 传递函数

$$H(\xi) = C(\xi I - A)^{-1}B + D$$

$$\eta_0(\xi) = C(\xi_0 I - A)^{-1}B + D$$

$$\eta_m(\xi) = m! C(\xi_0 I - A)^{-m-1}B$$



矩匹配方法 (Moment matching)

➤ 线性模型的传递函数

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \eta(\xi_0) + \eta_1(\xi_0) \frac{\xi_0 - \xi}{1!} + \cdots + \frac{d^m}{d\xi^m} \eta_m(\xi_0) \frac{(\xi_0 - \xi)^m}{m!} + \cdots \end{aligned}$$

➤ 基于 Petrov-Galerkin 投影的降阶模型的传递矩阵

$$\begin{aligned} H_r(\xi) &= \eta_{r0}(\xi_0) + \eta_{r1}(\xi_0) \frac{\xi_0 - \xi}{1!} + \cdots + \eta_{rm}(\xi_0) \frac{(\xi_0 - \xi)^m}{m!} + \cdots \end{aligned}$$



矩匹配方法

矩匹配定理

选取 $\xi_0 \in \mathbb{C}$ 和右降阶基 $V \in R^{N \times k}$ 使得其值域满足 $\text{Range}(V)$

$$= \mathcal{K}_k((\xi_0 I - A)^{-1}, (\xi_0 I - A)^{-1} b)$$

$$= \text{span}\{(\xi_0 I - A)^{-1} b, (\xi_0 I - A)^{-2} b, \dots, (\xi_0 I - A)^{-k} b\}$$

选取左降阶基 $W \in R^{N \times k}$ 满足

$$W^T V = I$$

那么，利用 W 和 V 通过 Petrov-Galerkin 投影方法从高维模型 (A, B, C, D) 得到的降阶模型，将满足以下性质：

$$\eta_{rm}(\xi_0) = \eta_m(\xi_0) \quad \forall 0 \leq m \leq k - 1$$



矩匹配方法

多点矩匹配定理

选取 $\xi_i \in \mathbb{C}$ ($1 \leq i \leq l$) 和右降阶基 $V \in R^{N \times k}$ 使得其值域满足

$$\text{Range}(V) = \bigcup_{i=1}^l \mathcal{K}_k((\xi_i I - A)^{-1}, (\xi_i I - A)^{-1} b)$$

选取左降阶基 $W \in R^{N \times n}$ 满足

$$W^T V = I$$

那么，利用 W 和 V 通过 Petrov-Galerkin 投影方法从高维模型 (A, B, C, D) 得到的降阶模型，将满足以下性质：

$$\eta_{rm}(\xi_i) = \eta_m(\xi_i) \quad \forall 1 \leq i \leq l, 0 \leq m \leq k - 1$$



矩匹配方法

多点矩匹配定理

选取 $\xi_i \in \mathbb{C}$ ($1 \leq i \leq 2l$) 和左右降阶基 $V, W \in R^{N \times n}$ 使得其值域满足

$$\text{Range}(V) = \bigcup_{i=1}^l \mathcal{K}_k((\xi_i I - A)^{-1}, (\xi_i I - A)^{-1} b)$$
$$\text{Range}(W) = \bigcup_{i=l+1}^{2l} \mathcal{K}_k((\xi_i I - A)^{-T}, (\xi_i I - A)^{-T} c^T)$$

并且 $W^T V$ 非奇异。

那么，利用 W 和 V 通过 Petrov-Galerkin 投影方法从高维模型 (A, B, C, D) 得到的降阶模型，将满足以下性质：

$$\eta_{rm}(\xi_i) = \eta_m(\xi_i) \quad \forall 1 \leq i \leq 2l, 0 \leq m \leq 2k - 1$$



应用

➤ 固体力学、声学问题

