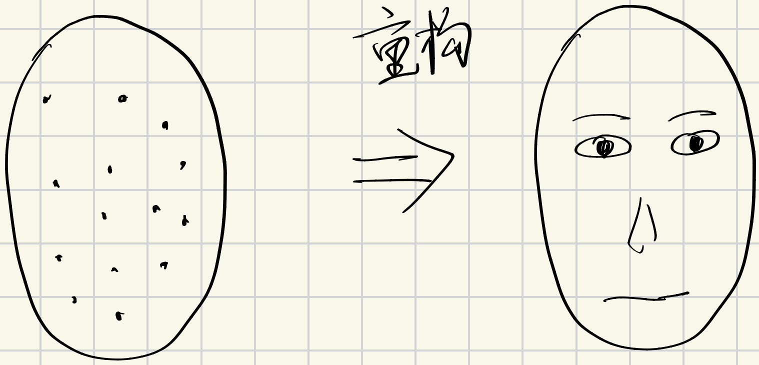
针对非线性系统的降阶模型

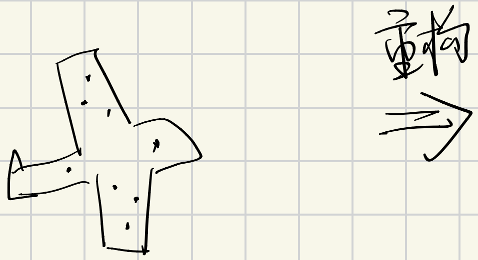
轨迹分段线性方法

$$w_i(q) = \frac{f(q-q_i)}{\sum_{j=1}^{s} f(q-q_j)} \qquad f_i = \exp\left(-\frac{\beta d_i^2}{d^2}\right)$$

当 $d_i >> d$　$f_i \approx 0$

人脸重构（实验设计）

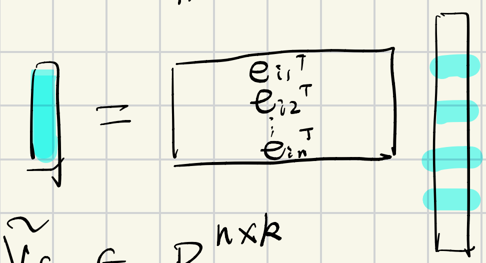




全局的状态

k个数据 $V_f \in R^{N\times k}$　　$m \in R^{n\times N}$（掩码矩阵）

$\tilde{f} = m f$



$\tilde{V}_f = m V_f$　　$\tilde{V}_f \in R^{n\times k}$

重构: $f = V_f \cdot a(\tilde{f}, V_f, m) \qquad a \in R^k$

若已知 f:

$$a = (V_f^T V_f)^{-1} V_f^T f$$

仅已知 $\tilde{f}$

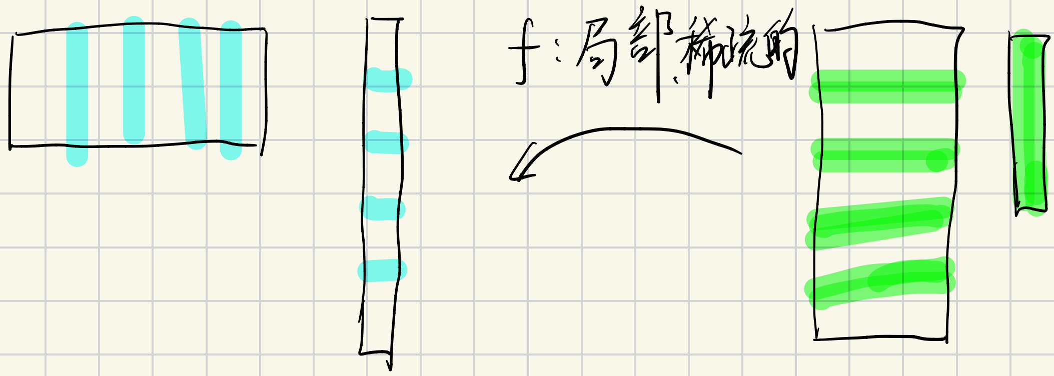
$$\tilde{f} = \tilde{V}_f \cdot a$$

$$a = (\tilde{V}_f^T \tilde{V}_f)^{-1} \tilde{V}_f^T \tilde{f}$$

$$f = V_f (\tilde{V}_f^T \tilde{V}_f)^{-1} \tilde{V}_f^T \tilde{f}$$

离散经验插值法

$$\underset{R^{k\times N}}{V^T}\; f(\underset{R^{N\times k}}{V}\; \underset{R^k}{q(t)}) \qquad f: R^N \to R^N$$



V 和 f 可能没有多大的关联

能对 f 进行降维，要 f 也在一个低维的空间中。

如何选取掩码矩阵

算法： $V^T \underline{f(Vq(t))}$ ⇒ 人脸重构

基 $V_f = [u_1 \ u_2 \cdots \ u_{m'}]$

$f(Vq(t)) \approx V_f f_r(t)$

$P^T f(Vq(t)) = P^T V_f f_r$

① 求解 f_r

要能求解： $m \geq m'$

依次加入 u_i 到 V_f

② 目标

$f - V_f f_r$ 尽量小

因为求解 $P^T f = P^T V_f f_r$

为了使 $f - V_f f_r$ 尽量小，更新 P，

依据 $|f - V_f f_r|$ 的值

收敛性

$$\|f-\hat{f}\|_2 = \|(I - V_f(P^TV_f)^{-1}P^T)f\|_2$$

$$\leq \|(I - V_f(P^TV_f)^{-1}P^T)(I - V_fV_f^T)f\|_2$$

$$\leq \|I - V_f(P^TV_f)^{-1}P^T\|_2 \|(I-V_fV_f^T)f\|_2$$

估计 $\|I - V_f(P^TV_f)^{-1}P^T\|_2$ $\Pi^2=\Pi$

引理：$\|I-\Pi\|_2 = \|\Pi\|_2$ （当 $\Pi \neq 0, I$）

下证 $\|\Pi\|_2 \leq \|I-\Pi\|_2$ （对称性 $\Pi' = I-\Pi$）

当 $\Pi \neq I$ 时 $\|I-\Pi\|_2 \geq 1$ $(\Pi u = 0)$

$\forall\ u = \underbrace{\Pi u}_{x} + \underbrace{(I-\Pi)u}_{y}$ $\|u\|_2 = 1$

下证：$\|x\|_2 \leq \|I-\Pi\|_2$ 当 $\|x\|_2 = 0$ 或 $\|y\|_2 = 0$ ✓

$$\tilde{x} = x\frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} \qquad \tilde{y} = \frac{\|x\|_2}{\|y\|_2}y$$

$$\|x\|_2 = \|\tilde{y}\|_2 = \|(I-\Pi)(\tilde{x}+\tilde{y})\|_2$$

$$\leq \|I-\Pi\|_2 \|\tilde{x}+\tilde{y}\|_2$$

$$= \|I-\Pi\|_2$$

$(\|\tilde{x}+\tilde{y}\|_2 = \|\tilde{x}\|_2 + \|\tilde{y}\|_2 + 2\langle\tilde{x}, \tilde{y}\rangle$

$= \|x\|_2 + \|y\|_2 + 2\langle x, y\rangle$

$= 1$

估计 $\|I - V_f (P^T V_f)^{-1} P^T\|_2 = \|V_f (P^T V_f)^{-1} P^T\|_2$

$$\le \|V_f\|_2 \, \|(P^T V_f)^{-1}\|_2 \, \|P^T\|_2$$

$$= \|(P^T V_f)^{-1}\|_2 \qquad (\|P^T\|_2 = \|P\|_2)$$

当 $l=1$, $\|(u_1[i_1])^{-1}\|_2 = \|u_1\|_\infty^{-1}$

递归: $l-1 \to l$

$(\bar P^T \bar V_f)\, c = \bar P^T u_l \qquad r = u_l - \bar V_f c$

$V_f = [\bar V_f \ \ u_l] \qquad P = [\bar P \ \ e_{i_l}]$

$$\underbrace{P^T V_f}_{M} = \begin{bmatrix} \bar P^T \bar V_f & \bar P^T u_l \\ e_{i_l}^T \bar V_f & e_{i_l}^T u_l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \overbrace{\underline{\bar P^T \bar V_f}}^{\bar M} & 0 \\ \underbrace{e_{i_l}^T \bar V_f}_{a^T} & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \underbrace{(\bar P^T \bar V_f)^{-1} \bar P^T u_l}_{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\|A\|_2 = \dfrac{x^T A^T A x}{x^T x}$

$A^T A$ 最大特征值

$$\rho = e_{i_l}^T \left(u_l - \bar V_f (\bar P^T \bar V_f)^{-1} \bar P^T u_l\right)$$

$$= \|r\|_\infty$$

$$(P^T V_f)^{-1} = \begin{pmatrix} I & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar M^{-1} & 0 \\ -\rho^{-1} a^T \bar M^{-1} & \rho^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\rho^{-1} a^T & \rho^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{M}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I + c\rho^{-1} a^T & -\rho^{-1} c \\ -\rho^{-1} a^T & \rho^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{M}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \rho^{-1} \begin{pmatrix} c a^T & -c \\ -a^T & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \bar{M}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{matrix} c a^T & -c \\ -a^T & 1 \end{matrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix} (a^T \; -1) \right\|_2$$

$$= \left\| \underbrace{[\bar{V}_f \; u_l]}_{\text{正交}} \begin{pmatrix} c \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 \|(a^T, -1)\|_2$$

$$= \| \bar{V}_f c - u_l \|_2 \, \|(\underbrace{a^T}_{\text{正交矩阵一部分}}, -1)\|_2$$

$$\leq \sqrt{N} |\rho| \sqrt{2}$$

$$\|M^{-1}\|_2 \leq (1 + \sqrt{2N}) \|\bar{M}^{-1}\|_2$$

例子

$$s(\mu), \quad V_f$$

$$s(\mu) = V_f \left(P^T V_f\right)^{-1} P^T s(\mu)$$