
SUR UN PROBLÈME DE COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL LOCALEMENT ANALYTIQUE

par

Christophe Breuil & Yiwen Ding

Résumé. — On réinterprète et on précise la conjecture du Ext^1 localement analytique de [10] de manière fonctorielle en utilisant les (φ, Γ) -modules sur l’anneau de Robba (avec éventuellement de la t -torsion). Puis on démontre plusieurs cas particuliers ou partiels de cette conjecture “améliorée”, notamment pour $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$.

Abstract. — We reinterpret the main conjecture of [10] on the locally analytic Ext^1 in a functorial way using (φ, Γ) -modules (possibly with t -torsion) over the Robba ring, making it more accurate. Then we prove several special or partial cases of this “improved” conjecture, notably for $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$.

À Jean-Marc Fontaine et Jean-Pierre Wintenberger

Table des matières

1. Introduction.....	2
2. Foncteurs F_α et (φ, Γ) -modules sur l’anneau de Robba.....	12
2.1. Quelques préliminaires.....	12
2.2. (φ, Γ) -modules généralisés.....	17
2.3. Foncteurs F_α	22
3. Foncteurs F_α et théorie d’Orlik-Strauch.....	27
3.1. Quelques notations.....	27

Le premier auteur remercie pour leur soutien le C. N. R. S., l’Université Paris-Saclay et l’A. N. R. CLap-CLap ANR-18-CE40-0026. Le second auteur a bénéficié de la Grant n° 7101500268 de l’Université de Pékin. Les auteurs remercient A. Abbes, L. Berger, G. Dospinescu, O. Fouquet, D. Harari, J. Hauseux, G. Henniart, R. Liu, Z. Qian et B. Schraen pour des discussions ou pour leurs réponses à leurs questions. Ils remercient également S. Orlik pour une nouvelle version de [53]. Enfin, les auteurs remercient chaleureusement le rapporteur anonyme pour son extraordinaire travail, pour ses multiples suggestions pertinentes, et pour avoir amélioré, généralisé et simplifié plusieurs énoncés et preuves (que nous signalons dans le texte) d’une première version de cet article.

3.2. Lemmes topologiques.....	29
3.3. Le cas localement algébrique.....	36
3.4. Le cas de la cellule ouverte d’une induite parabolique.....	45
3.5. Approximation des gradués.....	51
3.6. Le cas des cellules non ouvertes.....	57
3.7. Foncteurs F_α et représentations $\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$	64
4. Quelques résultats d’exactitude pour F_α	72
4.1. Préliminaires.....	72
4.2. Un résultat d’exactitude dans le cas localement algébrique....	77
4.3. Premiers dévissages pour $G = \mathrm{GL}_3$	80
4.4. Un scindage technique.....	89
4.5. Un deuxième scindage technique.....	95
4.6. Un résultat d’exactitude pour GL_3 et GL_2	105
5. Foncteurs F_α , groupes Ext^1 et compatibilité local-global.....	112
5.1. Préliminaires de théorie de Hodge p -adique.....	112
5.2. Nullité de certaines extensions.....	118
5.3. Foncteurs F_α et compatibilité local-global conjecturale.....	123
5.4. Cas partiels ou particuliers.....	127
5.5. Preuve du Théorème 5.4.6.....	135
6. Appendice.....	146
6.1. Calculs de Lie.....	146
6.2. Extensions avec un caractère infinitésimal.....	149
Références.....	157

1. Introduction

L’idée d’utiliser les (φ, Γ) -modules de Fontaine dans le programme de Langlands p -adique est due à Colmez. Elle lui a permis de construire un foncteur exact (qui porte son nom) associant un (φ, Γ) -module étale de p^m -torsion à une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de longueur finie annulée par p^m , puis par la suite de démontrer la correspondance de Langlands locale p -adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([25], [27]).

Lorsque l’on s’attelle à d’autres groupes que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, par exemple $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, les représentations localement analytiques (ou p -adiques) qui apparaissent dans les composantes Hecke-isotypiques des espaces de formes automorphes p -adiques sont *beaucoup plus* compliquées. Dans [10] est formulée une conjecture qui relie ce qui se passe “juste après” les vecteurs localement algébriques (dans ces représentations) au dernier cran de la filtration de Hodge sur les puissances alternées du module filtré de Fontaine sous-jacent. Le but principal de cet article est de réinterpréter et de préciser cette conjecture de manière fonctorielle en utilisant les (φ, Γ) -modules sur l’anneau de Robba (avec éventuellement de la t -torsion), puis de démontrer plusieurs cas particuliers ou partiels de cette conjecture “améliorée”, notamment pour $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$.

Avant de rentrer dans les détails, rappelons de manière un peu moins vague la conjecture de [10]. Fixons un corps des coefficients E (une extension finie de \mathbb{Q}_p) et une représentation de de Rham ρ_p de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ de dimension $n \geq 2$ sur E et de poids de Hodge-Tate $h_1 > h_2 > \dots > h_n$ distincts. Notons $D_{\text{dR}}(\rho_p)$ le module filtré de ρ_p et $\text{alg} \otimes_E \pi^\infty$ la représentation localement algébrique de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E usuelle associée à ρ_p , qui ne dépend que des poids de Hodge-Tate et de la représentation de Weil-Deligne W de ρ_p . On devrait pouvoir associer à ρ_p une (au moins) représentation localement analytique admissible (au sens de [60]) de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E contenant $\text{alg} \otimes_E \pi^\infty$, que l'on note juste π^{an} dans cette introduction, soit en prenant une spécialisation (supposée non nulle) $V(\rho_p)$ comme dans [21, § 2.12], soit en supposant que ρ_p se globalise en une représentation galoisienne automorphe ρ (pour un groupe unitaire déployé en p compact à l'infini) et en prenant les vecteurs localement analytiques de la composante ρ -isotypique dans l'espace des formes automorphes p -adiques. La conjecture de [10] postule alors l'existence, pour toute racine simple $\alpha = e_j - e_{j+1}$ de GL_n ($j \in \{1, \dots, n-1\}$), d'une représentation localement analytique π^α admissible de longueur finie ne dépendant que des h_i , de W et de α , et d'un isomorphisme :

$$(1) \quad \text{Ext}_{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha, \text{alg} \otimes_E \pi^\infty) \simeq \wedge_E^{n-j} D_{\text{dR}}(\rho_p)$$

(ne dépendant aussi que des h_i et de W) tel que tout plongement $\text{alg} \otimes_E \pi^\infty \hookrightarrow \pi^{\text{an}}$ s'étende en un plongement $(\text{alg} \otimes_E \pi^\infty) \longrightarrow \pi^\alpha \hookrightarrow \pi^{\text{an}}$ où $(\text{alg} \otimes_E \pi^\infty) \longrightarrow \pi^\alpha$ est l'extension (non scindée) donnée par l'image inverse par l'isomorphisme (1) de la droite $\text{Fil}_\alpha^{\text{max}}(\rho_p)$ de $\wedge_E^i D_{\text{dR}}(\rho_p)$ produit alterné des $n-j$ derniers crans de la filtration de Hodge sur $D_{\text{dR}}(\rho_p)$, i.e. (cf. (220)) :

$$\text{Fil}_\alpha^{\text{max}}(\rho_p) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Fil}^{-h_{j+1}}(D_{\text{dR}}(\rho_p)) \wedge \text{Fil}^{-h_{j+2}}(D_{\text{dR}}(\rho_p)) \wedge \dots \wedge \text{Fil}^{-h_n}(D_{\text{dR}}(\rho_p)).$$

Une des idées à la base de cet article a été de remarquer qu'il existe un groupe Ext^1 côté $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, ou plutôt côté (φ, Γ) -modules, naturellement isomorphe à $\wedge_E^{n-j} D_{\text{dR}}(\rho_p)$. Rappelons que Berger dans [4, Th. A] associe à toute filtration (décroissante exhaustive) sur $\wedge_E^{n-j} D_{\text{dR}}(\rho_p)$ un certain (φ, Γ) -module (libre de rang fini) sur l'anneau de Robba \mathcal{R}_E à coefficients dans E . Par exemple si l'on prend la filtration sur $\wedge_E^{n-j} D_{\text{dR}}(\rho_p)$ induite par la filtration de Hodge sur $D_{\text{dR}}(\rho_p)$, on retrouve le (φ, Γ) -module étale sur \mathcal{R}_E associé à $\wedge_E^{n-j} \rho_p$. Si l'on prend la filtration triviale $\text{Fil}^0 = \text{tout}$, $\text{Fil}^1 = 0$ on obtient l'équation différentielle p -adique $D(\wedge_E^{n-j} W)$ associée à $\wedge_E^{n-j} \rho_p$ ([3]), qui ne dépend que de $\wedge_E^{n-j} W$.

Proposition 1.1 (Proposition 5.1.2). — *Pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$ on a un isomorphisme naturel (où $t = \log(1+X) \in \mathcal{R}_E$) :*

$$(2) \quad \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E/(t^{h_j-h_{j+1}}), D(\wedge_E^{n-j} W) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(x^{h_j-h_{j+1}})) \xrightarrow{\sim} \wedge_E^{n-j} D_{\text{dR}}(\rho_p)$$

tel que l'image inverse d'une droite $F \subseteq \wedge_E^{n-j} D_{\text{dR}}(\rho_p)$ (vue à isomorphisme près comme (φ, Γ) -module) est le (φ, Γ) -module associé à la filtration $\text{Fil}^{-(h_j-h_{j+1})} = \wedge_E^{n-j} D_{\text{dR}}(\rho_p)$, $\text{Fil}^{-(h_j-h_{j+1})+1} = \dots = \text{Fil}^0 = F$, $\text{Fil}^1 = 0$.

Il est alors naturel de penser que l'isomorphisme conjectural (1) devrait se décomposer en deux isomorphismes, l'un donné par (2) et l'autre donné comme suit (en notant $D(\wedge_E^{n-j}W)(x^{h_j-h_{j+1}}) \stackrel{\text{déf}}{=} D(\wedge_E^{n-j}W) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(x^{h_j-h_{j+1}})$) :

$$(3) \quad \text{Ext}_{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha, \text{alg} \otimes_E \pi^\infty) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E/(t^{h_j-h_{j+1}}), D(\wedge_E^{n-j}W)(x^{h_j-h_{j+1}})).$$

L'isomorphisme (3) suggère alors l'existence d'un foncteur contravariant D_α tel que, au moins à torsion près par un caractère, on ait $D_\alpha(\text{alg} \otimes_E \pi^\infty) \simeq \mathcal{R}_E/(t^{h_j-h_{j+1}})$ et $D_\alpha(\pi^\alpha) \simeq D(\wedge_E^{n-j}W)(x^{h_j-h_{j+1}})$, tel que D_α induise (3), et tel qu'apparaisse dans π^{an} l'unique extension de π^α par $\text{alg} \otimes_E \pi^\infty$ envoyée par D_α vers le (φ, Γ) -module associé par [4, Th. A] à la filtration $\text{Fil}^{-(h_j-h_{j+1})} = \wedge_E^{n-j} D_{\text{dR}}(\rho_p)$, $\text{Fil}^{-(h_j-h_{j+1})+1} = \dots = \text{Fil}^0 = \text{Fil}_\alpha^{\text{max}}(\rho_p)$, $\text{Fil}^1 = 0$.

Notre idée de départ pour essayer de construire D_α est d'adapter au cadre localement analytique le foncteur défini dans [11] étendant celui de Colmez à des représentations lisses de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (ou de groupes plus généraux) en caractéristique p (ou de p^m -torsion), plus précisément la variante de [11] où l'on ne considère qu'une seule racine simple α ([35], [66]). Résumons la construction de [11], [35]. Notons N_0^α un sous-groupe ouvert compact du sous-groupe $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ des unipotents supérieurs $N(\mathbb{Q}_p)$ de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ où l'on a "enlevé" la racine α (i.e. l'entrée correspondante est nulle), si π est une représentation lisse de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ en caractéristique p , on peut munir le dual $(\pi^{N_0^\alpha})^\vee$ d'une structure naturelle de (ψ, Γ) -module compact où rappelons que l'opérateur ψ (dans un (φ, Γ) -module étale en caractéristique p) est l'inverse à gauche de φ . On peut alors associer à π le foncteur covariant $F_\alpha(\pi)$ sur la catégorie abélienne des (φ, Γ) -modules étales en caractéristique p en envoyant un tel (φ, Γ) -module D vers $F_\alpha(\pi)(D) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}((\pi^{N_0^\alpha})^\vee, D)$ (morphisms continus de (ψ, Γ) -modules). Il résulte alors de [11, Rem. 5.6(iii)] avec [11, Prop. 3.2(ii)] que le foncteur $\pi \mapsto F_\alpha(\pi)$ est exact à gauche et que $F_\alpha(\pi)$ est pro-représentable par un pro- (φ, Γ) -module étale $D_\alpha(\pi)$. De plus $D_\alpha(\pi)$ est un vrai (φ, Γ) -module (i.e. de rang fini) au moins lorsque les constituants irréductibles de π sont en nombre fini et sous-quotients de séries principales ([11, Cor. 9.3]).

La situation se complique lorsque l'on considère des représentations localement analytiques de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ (sur des E -espaces vectoriels de type compact) au lieu de représentations en caractéristique p . On peut penser associer à une telle représentation π le foncteur $D \mapsto \text{Hom}_{\psi, \Gamma}((\pi^{N_0^\alpha})^\vee, D)$ pour D dans la catégorie abélienne des (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E ([47]). Mais on tombe sur plusieurs problèmes techniques. Par exemple, écrivant $D = \lim_{r \rightarrow +\infty} D_r$ où D_r est un (ψ, Γ) -module sur $\mathcal{R}_E^r =$ le E -espace de Fréchet des fonctions rigides analytiques sur la couronne $p^{-1/r} \leq |\cdot| < 1$, il n'est d'abord pas clair que l'image d'un morphisme dans $\text{Hom}_{\psi, \Gamma}((\pi^{N_0^\alpha})^\vee, D)$ tombe dans un D_r pour $r \gg 0$, de sorte qu'il vaut mieux considérer $D \mapsto \lim_{r \rightarrow +\infty} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}((\pi^{N_0^\alpha})^\vee, D_r)$. Par ailleurs, si π est une représentation de Steinberg généralisée localement analytique (qui n'est pas une représentation de Steinberg), alors $D \mapsto \lim_{r \rightarrow +\infty} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}((\pi^{N_0^\alpha})^\vee, D_r)$ n'est pas le foncteur nul, alors que

l'on aimerait que la contribution de ces Steinberg généralisées soit nulle. Dans la théorie classique des représentations lisse (sur E), une manière d'annuler les Steinberg généralisées est de considérer, plutôt que le foncteur de Jacquet usuel $\pi_{N(\mathbb{Q}_p)}$, la dérivée supérieure de Bernstein $\pi(\eta^{-1})_{N(\mathbb{Q}_p)}$ pour un caractère (générique) non trivial $\eta : N(\mathbb{Q}_p) \rightarrow E_\infty^\times$ où $E_\infty = \cup_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} E_m$ avec $E_m = E(\sqrt[p^m]{1})$ (i.e. on tord l'action de $N(\mathbb{Q}_p)$ par η^{-1}). Revenant à $\pi^{N_0^\alpha}$, on tombe alors sur le fait que η peut être trivial sur N_0^α , il faut donc remplacer $\pi^{N_0^\alpha}$ par autre chose. Un examen du cas où π est une représentation lisse de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E montre qu'en fixant une famille croissante $(N_m)_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ de sous-groupes ouverts compacts de $N(\mathbb{Q}_p)$ telle que $\cup_m N_m = N(\mathbb{Q}_p)$ et en considérant :

$$F_\alpha(\pi) : D \longmapsto \lim_{r, m \rightarrow +\infty} \mathrm{Hom}_{\psi, \Gamma} \left(((\pi \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha})^\vee, D_r \otimes_E E_m \right)$$

où $N_m^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} N_m \cap N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$, on obtient un foncteur $\pi \mapsto F_\alpha(\pi)$ exact à gauche qui annule les Steinberg généralisées (lisses). Pour π localement analytique, on définit alors $F_\alpha(\pi)$ comme suit (cf. (37)) :

$$(4) \quad D \longmapsto \lim_{r, m \rightarrow +\infty} \mathrm{Hom}_{\psi, \Gamma} \left(((\pi[\mathfrak{n}^\alpha] \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha})^\vee, D_r \otimes_E E_m \right)$$

où D est un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E et \mathfrak{n}^α est l'algèbre de Lie de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$. Comme de plus π est définie sur E , les E_∞ -espaces vectoriels (4) sont naturellement munis d'une action E_∞ -semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(E_\infty/E)$. Noter que (4) n'utilise que l'action du Borel $B(\mathbb{Q}_p)$ des matrices triangulaires supérieures dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix des N_m (Proposition 2.3.6). Noter aussi que $(\pi[\mathfrak{n}^\alpha] \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \simeq (\pi \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$ (cf. Remarque 2.1.4), mais cette deuxième définition donne des flèches de functorialité dans le mauvais sens quand m grandit. Noter enfin que si l'on considère, par analogie, le foncteur $\sigma \mapsto \lim_{m \rightarrow +\infty} \mathrm{Hom}_{D(T^+(\mathbb{Q}_p), E)}((\pi[\mathfrak{n}]_{N_m})^\vee, \sigma^\vee)$ où σ est une représentation localement analytique du tore $T(\mathbb{Q}_p)$ dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathrm{la.c.}}^z(T(\mathbb{Q}_p))$ de [33], \mathfrak{n} l'algèbre de Lie de $N(\mathbb{Q}_p)$ et $D(T(\mathbb{Q}_p)^+, E)$ les distributions localement analytiques sur le tore "positif" $T(\mathbb{Q}_p)^+$ ([33, Def. 2.2.1]), on peut montrer que ce foncteur est représentable par le dual $J_B(\pi)^\vee$ où $J_B(-)$ est le foncteur de Jacquet-Emerton relativement à $B(\mathbb{Q}_p)$ ([32, 33]), de sorte que (4) semble raisonnable.

Théorème 1.2 (Proposition 2.3.4 & Théorème 3.7.2)

(i) Pour toute suite exacte $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'$ de représentations localement analytiques de $B(\mathbb{Q}_p)$ sur des E -espaces vectoriels de type compact, on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow F_\alpha(\pi'') \longrightarrow F_\alpha(\pi) \longrightarrow F_\alpha(\pi')$$

(i.e. $0 \longrightarrow F_\alpha(\pi'')(D) \longrightarrow F_\alpha(\pi)(D) \longrightarrow F_\alpha(\pi')(D)$ est exact pour tout (φ, Γ) -module généralisé D).

(ii) Soit $P(\mathbb{Q}_p) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ un sous-groupe parabolique contenant $B(\mathbb{Q}_p)$ tel que α est une racine simple du facteur de Levi $L_P(\mathbb{Q}_p)$, $P^-(\mathbb{Q}_p)$ le parabolique opposé et π_P

une représentation localement analytique de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur un E -espace vectoriel de type compact. Alors on a un isomorphisme $F_\alpha((\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}}) \simeq F_\alpha(\pi_P)$.

Le problème de la représentabilité du foncteur $F_\alpha(\pi)$ pour, disons, π une représentation de longueur finie de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ est beaucoup plus délicat. Lorsque l'on se limite, dans un premier temps, aux représentations construites par Orlik et Strauch dans [54], on peut montrer que $F_\alpha(\pi)$ est représentable dans beaucoup de cas. Rappelons que, si $P(\mathbb{Q}_p) \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ est un sous-groupe parabolique contenant $B(\mathbb{Q}_p)$, $P^-(\mathbb{Q}_p)$ le parabolique opposé d'algèbre de Lie \mathfrak{p}^- et $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}^-}$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{O}^{\mathfrak{p}^-}$ ([41]) des objets avec des poids entiers, alors pour π_P^∞ une représentation lisse de longueur finie du Levi $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E , Orlik et Strauch construisent dans [54] un foncteur contravariant exact $M \mapsto \mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$ de $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}^-}$ dans la catégorie des représentations localement analytiques (admissibles) de longueur finie de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E . Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $\alpha = e_i - e_{i+1}$, on note dans la suite $\lambda_{\alpha^\vee}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{diag}(\underbrace{x, \dots, x}_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-i})$ (un cocaractère algébrique de $T(\mathbb{Q}_p)$). Si λ est un caractère algébrique de $T(\mathbb{Q}_p)$, on peut considérer le (φ, Γ) -module $\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee})$.

Théorème 1.3 (Corollaire 3.7.3 & Corollaire 3.7.8). — Soit $P(\mathbb{Q}_p)$, $M \in \mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}^-}$, π_P^∞ comme ci-dessus et $\pi \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$. On suppose que π_P^∞ admet un caractère central $\chi_{\pi_P^\infty}$ et on note $d_{\pi_P^\infty} = \dim_E(\pi_P^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N_{L_P}(\mathbb{Q}_p)}$ où $N_{L_P}(\mathbb{Q}_p) = N(\mathbb{Q}_p) \cap L_P(\mathbb{Q}_p)$. Lorsque α n'est pas une racine de $L_P(\mathbb{Q}_p)$, on note $Q(\mathbb{Q}_p)$ le plus petit sous-groupe parabolique de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ contenant $P(\mathbb{Q}_p)$ tel que α est une racine de $L_Q(\mathbb{Q}_p)$ et \mathfrak{q}^- l'algèbre de Lie de $Q^-(\mathbb{Q}_p)$.

(i) Il existe des caractères algébriques distincts $\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_r}$ de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ (cf. (48) pour χ_{λ_i}) et des (φ, Γ) -modules généralisés $D_{\alpha,1}(\pi), \dots, D_{\alpha,r}(\pi)$ tels que :

$$F_\alpha(\pi) \simeq \bigoplus_{i=1}^r E_\infty(\chi_{\lambda_i}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_{\alpha,i}(\pi), -).$$

(ii) Supposons de plus que M est un quotient non nul de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$ où $L^-(\lambda)_P$ est une représentation algébrique irréductible de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ (pour λ un caractère algébrique de $T(\mathbb{Q}_p)$ dominant pour $B^-(\mathbb{Q}_p) \cap L_P(\mathbb{Q}_p)$). Alors si α n'est pas une racine de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ et si $M \notin \mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}^-}$, on a :

$$F_\alpha(\pi) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)} \left(\mathcal{R}_E((\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee})(\chi_{\pi_P^\infty}^{-1} \circ \lambda_{\alpha^\vee}))^{\oplus d_{\pi_P^\infty}}, - \right).$$

(iii) Avec les notations de (ii), si α n'est pas une racine de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ et si $M \in \mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}^-}$, ou bien si α est une racine de $L_P(\mathbb{Q}_p)$, on a :

$$F_\alpha(\pi) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)} \left((\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee}) / (t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}))^{\oplus d_{\pi_P^\infty}}, - \right).$$

Le Théorème 1.2 et le Théorème 1.3 ne sont pas vrais seulement pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, on les démontre dans le texte pour $G(\mathbb{Q}_p)$ où G est un groupe algébrique réductif connexe déployé sur \mathbb{Q}_p de centre connexe. La preuve du Théorème 1.3 utilise comme ingrédients principaux le Théorème 1.2 (légèrement généralisé), le cas π localement algébrique (Théorème 3.3.1, dont la preuve utilise de manière essentielle des résultats de Bernstein et Zelevinsky [7, § 3.5]), le Théorème 3.7.7 qui permet de se ramener à une induite parabolique localement analytique, et enfin des dévissages parfois techniques pour montrer que seule la grosse cellule d'une telle induite parabolique a une contribution non nulle à F_α (cf. Proposition 3.4.4 et Corollaire 3.6.4, ce dernier corollaire est aussi utilisé de manière cruciale dans la preuve du (ii) du Théorème 1.2). Dans ces dévissages, on utilise en particulier à maintes reprises le fait technique suivant : pour certains ψ -modules de Fréchet dont le E -espace vectoriel sous-jacent est une limite projective $\varprojlim_N X_N$ de ψ -modules de Fréchet X_N avec morphismes de transition surjectifs, tout morphisme $f : \varprojlim_N X_N \rightarrow D_r$ d'espaces de Fréchet commutant à ψ se factorise par un X_N pour $N \gg 0$ (voir par exemple le Lemme 3.2.7). Noter que le foncteur $\pi \mapsto F_\alpha(\pi)$ n'est pas exact en général, cf. par exemple le Théorème 3.7.7.

Revenons maintenant au contexte du début de l'introduction avec ρ_p , $(h_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, W , $\mathrm{alg} \otimes_E \pi^\infty$, π^{an} . Comme cas particulier du (iii) du Théorème 1.3 (le cas $P(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$), on a bien $F_\alpha(\mathrm{alg} \otimes_E \pi^\infty) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(\mathcal{R}_E(\chi)/(t^{h_j - h_{j+1}}), -)$ où $\lambda \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} (n - i - h_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ et χ est un certain caractère localement algébrique (plus précisément $x^{h_j - h_{j+1}} \chi$ est le caractère apparaissant en (217)). Le foncteur F_α permet maintenant d'énoncer la conjecture principale de cet article (on renvoie au § 5.3 pour plus de détails).

Conjecture 1.4 (Conjecture 5.3.1). — *Pour toute racine simple $\alpha = e_j - e_{j+1}$ il existe une représentation localement analytique admissible de longueur finie π^α de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E ne dépendant que des poids de Hodge-Tate $(h_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, de la représentation de Weil-Deligne W et de α et vérifiant les propriétés suivantes :*

$$(i) \quad F_\alpha(\pi^\alpha) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D(\wedge_E^{n-j} W)(x^{h_j - h_{j+1}}) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(\chi), -);$$

(ii) *pour toute extension π de π^α par $\mathrm{alg} \otimes_E \pi^\infty$ on a :*

$$F_\alpha(\pi) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi), -)$$

pour un (unique) (φ, Γ) -module généralisé $D_\alpha(\pi)$ et le foncteur $\pi \mapsto D_\alpha(\pi)$ induit un isomorphisme :

$$(5) \quad \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha, \mathrm{alg} \otimes_E \pi^\infty) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\chi)/(t^{h_j - h_{j+1}}), D(\wedge_E^{n-j} W)(x^{h_j - h_{j+1}}) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(\chi));$$

(iii) *tout plongement $\mathrm{alg} \otimes_E \pi^\infty \hookrightarrow \pi^{\mathrm{an}}$ s'étend en un plongement :*

$$(\mathrm{alg} \otimes_E \pi^\infty) \hookrightarrow \pi^\alpha \hookrightarrow \pi^{\mathrm{an}}$$

où $(\text{alg} \otimes_E \pi^\infty) \text{---} \pi^\alpha$ est l'unique extension non scindée de π^α par $\text{alg} \otimes_E \pi^\infty$ dont la droite engendrée dans $\text{Ext}_{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha, \text{alg} \otimes_E \pi^\infty)$ s'envoie vers la droite $\text{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_p)$ via les isomorphismes (5) puis (2) (tordu par χ).

On énonce maintenant nos résultats partiels sur la Conjecture 1.4. Le premier théorème est valable pour tout $n \geq 2$.

Théorème 1.5 (Théorème 4.1.5, Corollaire 5.2.6 & Théorème 5.4.4)

(i) Si π^α existe et vérifie le (i) de la Conjecture 1.4, alors pour toute extension π de π^α par $\text{alg} \otimes_E \pi^\infty$ on a :

$$F_\alpha(\pi) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi), -)$$

et le foncteur $\pi \mapsto D_\alpha(\pi)$ induit un morphisme :

$$(6) \quad \text{Ext}_{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha, \text{alg} \otimes_E \pi^\infty) \longrightarrow \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\chi)/(t^{h_j-h_{j+1}}), D(\wedge_E^{n-j} W)(x^{h_j-h_{j+1}}) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(\chi)).$$

(ii) Supposons ρ_p cristalline avec les ratios des valeurs propres du Frobenius sur $D_{\text{cris}}(\rho_p)$ distincts de 1, p . Alors il existe π^α (admissible de longueur finie) vérifiant les (i) et (ii) de la Conjecture 1.4. De plus, sous les hypothèse standard de Taylor-Wiles, il existe un plongement :

$$(\text{alg} \otimes_E \pi^\infty) \text{---} \pi^\alpha \hookrightarrow \pi^{\text{an}}$$

avec $(\text{alg} \otimes_E \pi^\infty) \text{---} \pi^\alpha$ comme dans le (iii) de la Conjecture 1.4.

La première assertion du (ii) du Théorème 1.5 requiert en particulier la preuve de [10, Conj. 3.3.1] pour $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, ce qui est l'objet du § 5.2. L'un des ingrédients cruciaux de la deuxième assertion du (ii) du Théorème 1.5 est l'existence des constituants compagnons dans le cas cristallin ([18, Th. 1.3] qui requiert les ‘‘hypothèses standard de Taylor-Wiles’’).

Le deuxième théorème considère le cas $n = 2$. Pour $n = 2$, la représentation π^{an} est bien définie par la correspondance de Langlands locale pour $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (et compatible avec la théorie globale, au moins dans beaucoup de cas, cf. [34], [22], [23]) et de plus $\pi^{\text{an}}/(\text{alg} \otimes_E \pi^\infty)$ ne dépend que des h_i et de W par [25, Th. VI.6.43].

Théorème 1.6 (Théorème 5.4.2). — Supposons $n = 2$.

(i) La Conjecture 1.4 est vraie lorsque W est réductible.

(ii) Si W est irréductible et si le (i) de la Conjecture 1.4 est vrai avec $\pi^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \pi^{\text{an}}/(\text{alg} \otimes_E \pi^\infty)$, alors on a $F_\alpha(\pi^{\text{an}}) \simeq E_\infty \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p), -)$ où $D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)$ est le (φ, Γ) -module étale sur \mathcal{R}_E associé au dual de Cartier $\check{\rho}_p$ de ρ_p .

La démonstration du Théorème 1.6 utilise comme ingrédients principaux plusieurs résultats de Colmez et Dospinescu ([24], [26]) combinés avec le Théorème 1.3, le (i)

du Théorème 1.5 et un résultat de représentabilité et d'exactitude pour le foncteur F_α appliqué à certaines extensions de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (contenu dans le Théorème 4.1.6). Pour démontrer complètement la Conjecture 1.4 lorsque $n = 2$ et W est irréductible, il semble qu'il faille aller plus loin que les résultats énoncés dans [24], [25], [26].

Le troisième théorème, le plus délicat, concerne le cas où $n = 3$ et π^∞ est la représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ à torsion près (en particulier ρ_p est semi-stable non cristalline à torsion près). Ce cas est particulièrement intéressant car, d'une part la présence de l'opérateur de monodromie "rigidifie" la situation et implique que les deux droites $\mathrm{Fil}_{e_1-e_2}^{\max}(\rho_p)$ et $\mathrm{Fil}_{e_2-e_3}^{\max}(\rho_p)$ déterminent la filtration de Hodge sur $D_{\mathrm{dR}}(\rho_p)$ (ce qui n'est pas vrai dans le cas cristallin par exemple), d'autre part on dispose de candidats explicites pour les représentations π^α de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, cf. [10, § 4.5].

Théorème 1.7 (Théorème 5.4.5). — *Supposons $n = 3$, $\pi^\infty =$ la représentation de Steinberg (à torsion près) et soit π^α comme dans [10, § 4.5] (aux notations près).*
 (i) *On a $F_\alpha(\pi^\alpha) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D(\wedge_E^{3-j} W)(x^{h_j-h_{j+1}}) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(\chi), -)$.*
 (ii) *Le morphisme (6) (qui existe par le (i) ci-dessus et le (i) du Théorème 1.5) est un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha, \mathrm{alg} \otimes_E \pi^\infty) \\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\chi)/(t^{h_j-h_{j+1}}), D(\wedge_E^{3-j} W)(x^{h_j-h_{j+1}}) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(\chi)). \end{aligned}$$

La démonstration du Théorème 1.7 utilise essentiellement tous les théorèmes précédents, les résultats de [10] et le Théorème 4.1.6 dans le texte qui donne un énoncé crucial (mais délicat) de représentabilité et d'exactitude pour le foncteur F_α appliqué à certaines extensions de représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. La preuve que l'on donne de ce Théorème 4.1.6 est longue et très technique, et pour aider le lecteur à s'y retrouver nous en donnons les grandes étapes au début du § 4.3. Elle utilise des résultats dus à Schraen ([64]) et beaucoup d'analyse fonctionnelle p -adique parfois fastidieuse sur des (ψ, Γ) -modules de Fréchet où l'opérateur ψ joue un rôle important (cf. §§ 4.4 & 4.5). Noter que, pour démontrer ce résultat d'exactitude, on utilise aussi l'action de $\mathrm{Gal}(E_\infty/E)$ (cf. preuve de la Proposition 4.3.3).

Indépendamment du Théorème 1.7, dans [14] sous des hypothèses de genericité faibles est associée à ρ_p pour chaque α une extension non scindée $\pi^\alpha(\rho_p)$ de π^α par $\mathrm{alg} \otimes_E \pi^\infty$ (qui dépend *a priori* de ρ_p "tout entier") telle que, au moins lorsque les h_i sont des entiers consécutifs, tout plongement $\mathrm{alg} \otimes_E \pi^\infty \hookrightarrow \pi^{\mathrm{an}}$ s'étend en un plongement $\pi^\alpha(\rho_p) \hookrightarrow \pi^{\mathrm{an}}$. Le (ii) du Théorème 1.7 permet par ailleurs d'associer à $(h_i)_{i \in \{1,2,3\}}$, W et $\mathrm{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_p)$ (via la Proposition 1.1) une autre extension non scindée de π^α par $\mathrm{alg} \otimes_E \pi^\infty$ que l'on note $\pi^\alpha(\mathrm{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_p))$. Le (iii) de la Conjecture 1.4 et [14, Th. 1.1] impliquent que, au moins lorsque les h_i sont consécutifs, ces deux extensions non scindées devraient être les mêmes. La conjecture suivante (pour des h_i quelconques) est donc naturelle.

Conjecture 1.8 (Conjecture 5.4.7). — *Avec les notations précédentes, on a $\pi^\alpha(\rho_p) \simeq \pi^\alpha(\mathrm{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_p))$.*

Le dernier théorème de cette introduction montre que la Conjecture 1.8 est très vraisemblable.

Théorème 1.9 (Théorème 5.4.6). — *La représentation $\pi^\alpha(\rho_p)$ ne dépend que de $(h_i)_{i \in \{1,2,3\}}$, W et $\mathrm{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_p)$.*

La preuve du Théorème 1.9 repose sur les résultats de [14] et est indépendante des théorèmes précédents, mais a été fortement inspirée par la Conjecture 1.8. Il s’agit d’un raffinement de la construction de $\pi^\alpha(\rho_p)$ dans [14] qui consiste à utiliser la correspondance localement analytique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour construire, par induction parabolique localement analytique et des calculs de cohomologie galoisienne, un accouplement parfait entre deux Ext^1 de dimension 2, l’un côté (φ, Γ) -modules (sans torsion), l’autre côté représentations de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, puis à définir $\pi^\alpha(\rho_p)$ (ou plutôt une sous-représentation $\pi^\alpha(\rho_p)^-$ qui détermine $\pi^\alpha(\rho_p)$) comme l’orthogonal de la droite engendrée par le (φ, Γ) -module associé à $\mathrm{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_p)$ dans la Proposition 1.1 (à torsion et dualité près) vu comme élément du Ext^1 côté (φ, Γ) -modules. Ce raffinement repose sur la Proposition 5.5.13 (dont la preuve utilise des résultats de Dospinescu [29]) et la Proposition 6.2.10 (dont la preuve a été reléguée en appendice car elle n’utilise que des techniques de [14] et des calculs d’algèbre de Lie). L’idée nouvelle par rapport à [14] dans ces deux propositions est de considérer des représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ admettant un caractère infinitésimal.

Nous aurions aimé pouvoir montrer complètement la Conjecture 1.8, mais cela semble difficile sans avoir à démontrer encore d’autres propriétés (redoutables) de représentabilité et d’exactitude de F_α ni sans avoir à subir de nouveaux calculs dans de grosses induites paraboliques localement analytiques de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. On atteint probablement là les limites des méthodes relativement “explicites” de cet article (et de [10], [14]). Pour aller plus loin, par exemple pour traiter $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ et ρ_p générique semi-stable non cristalline de dimension $n \geq 4$, il faut probablement trouver de nouvelles méthodes.

Nous nous sommes limités au corps de base \mathbb{Q}_p dans cet article pour le confort de n’avoir à considérer que des (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}_E . Plusieurs résultats, par exemple la définition de F_α , le Théorème 1.2 et le Théorème 1.3, devraient s’étendre au cas de représentations localement σ -analytiques de $G(L)$ pour L extension finie de \mathbb{Q}_p , $\sigma : L \hookrightarrow E$ et G déployé sur L de centre connexe, en remplaçant les (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}_E par la théorie de [6].

Terminons cette introduction avec quelques notations et conventions générales.

Dans tout l’article E désigne un corps de coefficients pour les représentations, une extension finie de \mathbb{Q}_p , et $(E_m)_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ une tour d’extensions galoisiennes de E telle que

$E_m = E[\sqrt[p^m]{1}]$ (on peut avoir $E = E_m$ pour m petit). On désigne par val la valuation p -adique normalisée par $\text{val}(p) = 1$ et $|\cdot| = 1/p^{\text{val}(\cdot)}$ la norme p -adique associée. On note $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\sqrt[p^\infty]{1})/\mathbb{Q}_p)$ et $\varepsilon : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \twoheadrightarrow \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p -adique, qui permet d'identifier Γ à \mathbb{Z}_p^\times . On normalise la théorie du corps de classe local de telle sorte que les Frobenius géométriques correspondent aux uniformisantes. Ainsi $\varepsilon(x) = x|x|$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p^\times$. On convient que le poids de Hodge-Tate de ε est 1.

Si G est un groupe algébrique on note Z_G son centre. Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie (sur un corps), on note $U(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante. Si K est une extension finie de \mathbb{Q}_p , on note $U(\mathfrak{g}, K) \stackrel{\text{déf}}{=} K \otimes_{\mathbb{Q}_p} U(\mathfrak{g})$. Si V est un $U(\mathfrak{g})$ -module et $X \subseteq \mathfrak{g}$ un sous-ensemble quelconque, on note $V[X] \stackrel{\text{déf}}{=} \{v \in V, xv = 0 \forall x \in X\}$. Si M est un module sur un anneau commutatif A et $S \subseteq A$ un sous-ensemble quelconque, on note M_{tor} le sous- A -module de torsion de M et $M[S]$ le sous- A -module $\{m \in M, sm = 0 \forall s \in S\}$.

Si V est une représentation d'un groupe G sur un E -espace vectoriel et $\eta : G \rightarrow E$ un caractère, on note $V(\eta)$ la représentation de V tordue par η . Si V est un \mathbb{Q}_p -espace vectoriel muni d'une topologie localement convexe, on note $V^{\text{sép}}$ son quotient séparé, c'est-à-dire $V/\overline{\{0\}}$ (où $\overline{\{0\}}$ est l'adhérence de $\{0\}$ dans V) muni de la topologie quotient, et V^\vee son dual continu muni de la topologie forte ([57, p. 30]). Si V et W sont deux E -espaces vectoriels localement convexes, on note $V \otimes_{E,\pi} W$, resp. $V \otimes_{E,\iota} W$, le produit tensoriel muni de la topologie projective, resp. injective, et simplement $V \otimes_E W$ lorsque ces deux topologies coïncident. On note $\widehat{\otimes}_{E,\pi}$, $\widehat{\otimes}_{E,\iota}$, $\widehat{\otimes}_E$ au lieu de $\otimes_{E,\pi}$, $\otimes_{E,\iota}$, \otimes_E les complétés respectifs ([57, Prop. 7.5]).

Si M est une variété localement \mathbb{Q}_p -analytique paracompacte (ou de manière équivalente strictement paracompacte) de dimension finie (cf. [58, § II]), par exemple un groupe analytique p -adique, et V un E -espace vectoriel muni d'une topologie localement convexe séparée, on note $C^{\text{an}}(M, V)$ le E -espace vectoriel des fonctions localement analytiques de M dans V ([59, § 2]), $D(M, E)$ l'algèbre des distributions localement analytiques sur M à valeurs dans E , c'est-à-dire le dual continu de $C^{\text{an}}(M, E)$ avec sa topologie forte (cf. *loc.cit.*). Si M est compacte et V est un espace de type compact, alors $C^{\text{an}}(M, V)$ est aussi un espace de type compact ([31, Prop. 2.1.28]). On note $C^\infty(M, V)$ le sous- E -espace vectoriel des fonctions localement constantes.

Si G est un groupe analytique p -adique, on note $\text{Rep}_E^{\text{an}}(G)$ la catégorie des représentations localement analytiques de G sur des E -espaces vectoriels localement convexes de type compact ([59, § 3]). La catégorie $\text{Rep}_E^{\text{an}}(G)$ n'est pas abélienne, mais elle est munie d'une notion de suite exacte (rappelons qu'une suite exacte courte d'espaces de type compact est nécessairement stricte, de même qu'une suite exacte courte d'espaces de Fréchet). Pour les objets de $\text{Rep}_E^{\text{an}}(G)$, on abrège "absolument topologiquement irréductible" (i.e. qui reste topologiquement irréductible après extension des scalaires à une extension finie arbitraire de E) en "irréductible". On

rappelle que l'algèbre $D(G, E)$ contient $U(\mathfrak{g}, E)$ (où \mathfrak{g} est la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de G). Si π, π' sont deux représentations localement analytiques admissibles de G ([60, § 6]), on note $\text{Ext}_G^1(\pi, \pi')$ le E -espace vectoriel des extensions dans la catégorie des représentations localement analytiques admissibles de G .

2. Foncteurs F_α et (φ, Γ) -modules sur l'anneau de Robba

On définit les foncteurs F_α et on montre leurs propriétés générales.

2.1. Quelques préliminaires. — On introduit plusieurs notations et on démontre quelques résultats préliminaires, dont la Proposition 2.1.6, sur des représentations de $B(\mathbb{Q}_p)$.

On fixe un triplet (G, B, T) où G est un groupe algébrique réductif connexe déployé sur \mathbb{Q}_p , $B \subset G$ un sous-groupe de Borel défini sur \mathbb{Q}_p et $T \subset B$ un tore maximal déployé sur \mathbb{Q}_p . On suppose $G \neq T$ (donc aussi $B \neq T$) et on note $W = N_G(T)/T \neq \{1\}$ le groupe de Weyl de G et N le radical unipotent de B . On note $X(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\text{gr}}(T, \mathbb{G}_m)$ le groupe des caractères algébriques de T , $X^\vee(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\text{gr}}(\mathbb{G}_m, T) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X(T), \mathbb{Z})$ le groupe des cocaractères, $(X(T), R, X^\vee(T), R^\vee)$ la donnée radicielle de (G, T) , $R^+ \subset X(T)$ les racines positives relativement à B et $S \subset R^+$ les racines simples. On note $s_\alpha \in W$ la réflexion associée à la racine $\alpha \in R$ et $\rho \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha \in \frac{1}{2}X(T)$. Pour $\alpha \in R^+$, on note $N_\alpha \subseteq N$ le sous-groupe radiciel (commutatif) associé et on fixe un isomorphisme $\iota_\alpha : N_\alpha \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_a$ de groupes algébriques sur \mathbb{Q}_p tel que ([43, § II.1.2]) :

$$(7) \quad \iota_\alpha(tx_\alpha t^{-1}) = \alpha(t)\iota_\alpha(x_\alpha) \quad \forall t \in T, \quad \forall x_\alpha \in N_\alpha.$$

L'application produit donne un isomorphisme de variétés algébriques sur \mathbb{Q}_p (pour un ordre quelconque sur les $\alpha \in R^+$) $\prod_{\alpha \in R^+} N_\alpha \xrightarrow{\sim} N$. On note (cf. [63, § 5]) :

$$\ell : N \twoheadrightarrow \prod_{\alpha \in S} N_\alpha \xrightarrow{\sum_{\alpha \in S} \iota_\alpha} \mathbb{G}_a$$

ainsi que le morphisme de groupes induit $\ell : N(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{Q}_p$.

Pour $\alpha \in S$, on note $N^\alpha \simeq \prod_{\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}} N_\beta$ le radical unipotent du sous-groupe parabolique P_α de G contenant B dont le groupe de Levi a pour racines simples $\{\alpha\}$. C'est un sous-groupe algébrique invariant de N tel que $N_\alpha \xrightarrow{\sim} N/N^\alpha$. On note aussi Q_α le sous-groupe parabolique maximal de G contenant B dont le Levi a pour racines simples $S \setminus \{\alpha\}$. On désigne avec un $-$ en exposant les sous-groupes paraboliques opposés ainsi que leur radical unipotent : $B^-, N^-, P_\alpha^-, Q_\alpha^-$, etc.

Soit E une extension finie de \mathbb{Q}_p , $E_m = E(\sqrt[m]{1})$, $E_\infty = \cup_{m \geq 0} E_m$ et $\eta : \mathbb{Q}_p \rightarrow E_\infty$ un caractère additif localement constant non trivial. On rappelle que si η' est un autre tel

caractère, par exemple $\eta' = g \circ \eta$ pour $g \in \text{Gal}(E_\infty/E)$, alors on a $\eta'(-) = \eta(a(-))$ pour un $a \in \mathbb{Q}_p^\times$, cf. par exemple [19, § 1.7] (pour $\eta' = g \circ \eta$ on a $a \in \mathbb{Z}_p^\times$). On note encore $\eta : N(\mathbb{Q}_p) \rightarrow E_\infty$ le caractère induit $N(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\ell} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\eta} E_\infty$ ainsi que sa restriction à tous les sous-groupes de $N(\mathbb{Q}_p)$.

Comme dans [63, § 0] on dit qu'un sous-groupe ouvert compact $N^0 \subseteq N(\mathbb{Q}_p)$ est totalement décomposé si $\prod_{\alpha \in R^+} N_\alpha \xrightarrow{\sim} N$ induit :

$$(8) \quad \prod_{\alpha \in R^+} (N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N^0) \xrightarrow{\sim} N^0$$

pour tout ordre sur les racines α . On fixe une suite croissante de sous-groupes ouverts compacts de $N(\mathbb{Q}_p)$:

$$N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_m \subseteq N_{m+1} \subseteq \cdots$$

vérifiant les conditions suivantes : N_m est totalement décomposé pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\cup_{m \geq 0} N_m = N(\mathbb{Q}_p)$ et $\eta(N_m) \subseteq E_m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Pour $\alpha \in S$ et $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on note $N_m^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m \simeq \prod_{\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}} N_\beta(\mathbb{Q}_p) \cap N_m$ et on suppose de plus que $N(\mathbb{Q}_p)/N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \simeq N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\iota_\alpha} \mathbb{Q}_p$ induit par restriction pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ des isomorphismes :

$$(9) \quad N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m = N_m/N_m^\alpha \xrightarrow{\iota_\alpha} \frac{1}{p^m} \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p.$$

On suppose enfin que le centre Z_G est connexe. Pour tout $\alpha \in S$ il existe alors des cocaractères fondamentaux $\lambda_{\alpha^\vee} \in X^\vee(T)$ vérifiant pour $\beta \in S$ (voir par exemple [15, Prop.2.1.1(iii)]) :

$$(10) \quad \langle \beta, \lambda_{\alpha^\vee} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Rappelons que les λ_{α^\vee} sont définis à addition près d'un élément de $X^0(T) = \{\lambda \in X^\vee(T), \langle \beta, \lambda \rangle = 0 \forall \beta \in R\} = X^\vee(Z_G)$ (la dernière égalité découle de $Z_G = \cap_{\beta \in R} \ker(\beta)$, cf. [43, § II.1.6]) et que $\lambda_{\alpha^\vee} : \mathbb{G}_m \rightarrow T$ se factorise par le centre $Z_{L_{Q_\alpha}}$ de L_{Q_α} , i.e. induit $\lambda_{\alpha^\vee} : \mathbb{G}_m \rightarrow Z_{L_{Q_\alpha}}$. Pour $N^0 \subseteq N(\mathbb{Q}_p)$ sous-groupe ouvert compact totalement décomposé, comme $N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N^0$ pour $\alpha \in R^+$ est isomorphe à un sous- \mathbb{Z}_p -module libre de rang 1 dans $N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\iota_\alpha} \mathbb{Q}_p$, on déduit de (7), (10) et (8) que l'on a pour $\alpha \in S$ et $z \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Q}_p^\times$:

$$(11) \quad \lambda_{\alpha^\vee}(z) N^0 \lambda_{\alpha^\vee}(z)^{-1} \subseteq N^0$$

avec égalité lorsque $z \in \mathbb{Z}_p^\times$.

Exemple 2.1.1. — Le cas essentiel pour cet article et celui où $G = \text{GL}_n$ ($n \geq 2$), $B =$ Borel des matrices triangulaires supérieures, $T =$ tore diagonal, $N =$ matrices unipotentes supérieures et $\ell : \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & a_{2,3} & \cdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i+1}$ (ce qui détermine les

ι_α). Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ soit $e_i \in X(T)$ tel que $e_i(\text{diag}(t_1, \dots, t_n)) = t_i$, on a $S = \{e_i - e_{i+1}, i \in \{1, \dots, n-1\}\}$ et $R \simeq R^\vee$. On prend η tel que $\eta|_{\mathbb{Z}_p} = 1$, $\eta(1/p) \neq 1$ et $N_m \subseteq N(\mathbb{Q}_p)$ pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ le sous-groupe ouvert compact des matrices telles que $a_{i,j} \in \frac{1}{p^{m(j-i)}}\mathbb{Z}_p$ pour $1 \leq i < j \leq n$. Enfin on prend $\lambda_{e_i - e_{i+1}}(x) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \text{diag}(\underbrace{x, \dots, x}_i, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-i})$.

Noter que $Z_G = \mathbb{G}_m$ et $X^\vee(Z_G) = \{x \mapsto \text{diag}(x^i, \dots, x^i), i \in \mathbb{Z}\}$.

Lemme 2.1.2. — (i) Pour tout $\alpha \in S$ et tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, le sous-groupe N_m^α est normal dans N_m .

(ii) Pour tout $\alpha \in S$, tout $z \in \mathbb{Q}_p^\times$, tout $x \in N(\mathbb{Q}_p)$ et tout $x_\alpha \in N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ on a $\eta(\lambda_{\alpha^\vee}(z)x_\alpha\lambda_{\alpha^\vee}(z)^{-1}) = \eta(x_\alpha) = \eta(xx_\alpha x^{-1})$.

D\u00e9monstration. — (i) Le sous-groupe $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ est normal dans $N(\mathbb{Q}_p)$. (ii) Par (7) et (10) on a $\ell(\lambda_{\alpha^\vee}(z)x_\alpha\lambda_{\alpha^\vee}(z)^{-1}) = \ell(x_\alpha)$, et il est clair que $\ell(xx_\alpha x^{-1}) = \ell(x_\alpha)$. \square

On fixe $\alpha \in S$ jusqu'\\a la fin de ce paragraphe. On note \mathfrak{n}^α la \mathbb{Q}_p -alg\u00e8bre de Lie de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$, ou de mani\u00e8re \u00e9quivalente de N_m^α pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si V est un $U(\mathfrak{n}^\alpha)$ -module, on note $V_{\mathfrak{n}^\alpha} \simeq V \otimes_{U(\mathfrak{n}^\alpha)} \mathbb{Q}_p$ le quotient de V par le sous- \mathbb{Q}_p -espace vectoriel de V engendr\u00e9 par les vecteurs xv pour $(x, v) \in \mathfrak{n}^\alpha \times V$.

On fixe de plus $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ jusqu'\\a la fin de ce paragraphe. Soit π une repr\u00e9sentation dans $\text{Rep}_{E_m}^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$, on rappelle que π^\vee est un espace de Fr\u00e9chet (nucl\u00e9aire) r\u00e9flexif muni d'une structure de $D(B(\mathbb{Q}_p), E_m)$ -module (\u00e0 gauche) s\u00e9par\u00e9ment continu (cf. [59, \u00a7 3]). En particulier π et π^\vee sont munis d'actions continues de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ et \mathfrak{n}^α pour tout $\alpha \in S$ qui commutent avec la structure de E_m -espace vectoriel. On note $\overline{\langle xv, x \in \mathfrak{n}^\alpha, v \in \pi^\vee \rangle}$ l'adh\u00e9rence dans π^\vee du sous- E_m -espace vectoriel $\langle xv, x \in \mathfrak{n}^\alpha, v \in \pi^\vee \rangle$ engendr\u00e9 par xv pour $(x, v) \in \mathfrak{n}^\alpha \times \pi^\vee$. On a $(\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha}^{\text{s\u00e9p}} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} ((\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha})^{\text{s\u00e9p}} \simeq \pi^\vee / \overline{\langle xv, x \in \mathfrak{n}^\alpha, v \in \pi^\vee \rangle}$ et le E_m -espace vectoriel $(\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha}^{\text{s\u00e9p}}$ muni de la topologie quotient est encore un espace de Fr\u00e9chet r\u00e9flexif (cf. [59, \u00a7 1]). On d\u00e9finit de m\u00eame l'espace de Fr\u00e9chet r\u00e9flexif $(\pi^\vee)_{N_m^\alpha}^{\text{s\u00e9p}} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} ((\pi^\vee)_{N_m^\alpha})^{\text{s\u00e9p}}$ en rempla\u00e7ant $\langle xv, x \in \mathfrak{n}^\alpha, v \in \pi^\vee \rangle$ par $\langle gv - v, g \in N_m^\alpha, v \in \pi^\vee \rangle$.

Les sous- E_m -espaces vectoriels $\pi[\mathfrak{n}^\alpha]$ et $\pi^{N_m^\alpha}$ de π sont ferm\u00e9s, donc sont des espaces de type compact (pour la topologie induite) par [59, Prop. 1.2]. De plus $\pi[\mathfrak{n}^\alpha]$ est stable sous l'action de N_m^α puisque \mathfrak{n}^α est la \mathbb{Q}_p -alg\u00e8bre de Lie de N_m^α , et cette action de N_m^α sur $\pi[\mathfrak{n}^\alpha]$ est lisse par l'argument de [62, p. 114]. On note $(-)(\eta)$, resp. $(-)(\eta^{-1})$, le tordu de $(-)$ par le caract\u00e8re η , resp. η^{-1} , pour l'action de N_m^α .

Lemme 2.1.3. — (i) On a des isomorphismes topologiques $(\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha}^{\text{s\u00e9p}} \simeq \pi[\mathfrak{n}^\alpha]^\vee$ et $(\pi^\vee)_{N_m^\alpha}^{\text{s\u00e9p}}(\eta) \simeq (\pi(\eta^{-1})^{N_m^\alpha})^\vee$.

(ii) Le sous- E_m -espace vectoriel de $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})$ engendr\u00e9 par $xv - v$ pour $(x, v) \in N_m^\alpha \times \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})$ est ferm\u00e9.

Démonstration. — (i) En utilisant la réflexivité de π , on obtient facilement :

$$((\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha}^{\text{sép}})^\vee \simeq \{v \in \pi, f(xv) = 0 \ \forall f \in \pi^\vee, \forall x \in \mathfrak{n}^\alpha\} = \pi[\mathfrak{n}^\alpha].$$

Par réflexivité de $(\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha}^{\text{sép}}$, on en déduit la première assertion en (i) en redualisant. La deuxième assertion se montre de manière analogue.

(ii) Notons $\langle xv - v, x \in N_m^\alpha, v \in \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1}) \rangle$ le sous- E_m -espace vectoriel de $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})$ engendré par $xv - v$ pour $(x, v) \in N_m^\alpha \times \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})$ et $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$ le quotient $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1}) / \langle xv - v, x \in N_m^\alpha, v \in \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1}) \rangle$. Comme l'action du groupe compact N_m^α sur $\pi[\mathfrak{n}^\alpha]$, et donc sur la représentation tordue $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})$, est lisse, on dispose de l'application de projection usuelle :

$$(12) \quad \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1}) \twoheadrightarrow \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$$

dont le noyau est exactement le sous-espace $\langle xv - v, x \in N_m^\alpha, v \in \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1}) \rangle$ (utiliser que le noyau contient ce sous-espace et que la surjection $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1}) \twoheadrightarrow \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$ induit une surjection $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \twoheadrightarrow \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$ par exactitude du foncteur $(-)^{N_m^\alpha}$ sur les représentations lisses de N_m^α). Il suffit donc de montrer que l'application (12) est continue où $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$ est muni de la topologie induite par $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})$. Mais cela découle de [31, Prop. 7.1.6] avec [31, Cor. 7.1.4]. \square

Par le (ii) du Lemme 2.1.3, le E_m -espace vectoriel $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} = \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1}) / \langle xv - v, x \in N_m^\alpha, v \in \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1}) \rangle$ avec la topologie quotient de $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})$ est (séparé) de type compact. De plus l'action de N_m sur π préserve le sous-espace $\pi[\mathfrak{n}^\alpha]$ (car, par le (i) du Lemme 2.1.2, l'action adjointe de N_m sur la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de $N(\mathbb{Q}_p)$ préserve la sous-algèbre \mathfrak{n}^α) et, toujours par le Lemme 2.1.2, fait du quotient $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$ une représentation localement analytique de $N_m/N_m^\alpha \simeq \frac{1}{p^m}\mathbb{Z}_p$ (cf. (9)). Pour $z \in \mathbb{Q}_p^\times$, l'action de $\lambda_{\alpha^\vee}(z)$ sur π préserve de même $\pi[\mathfrak{n}^\alpha]$, et si de plus $\text{val}(z) \geq 0$ elle passe au quotient $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$ par (11) (appliqué à $N^0 = N_m^\alpha$) et la première égalité du (ii) du Lemme 2.1.2, et définit une action continue du monoïde multiplicatif $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ (vu dans \mathbb{Q}_p^\times) sur $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$. De plus, si $x \in \frac{1}{p^m}\mathbb{Z}_p$ et $z \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \subset \mathbb{Q}_p^\times$, on a par (7) et (10) :

$$(13) \quad z \circ x = zx \circ z \text{ sur } \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$$

où zx est vu dans $\frac{1}{p^m}\mathbb{Z}_p \simeq N_m/N_m^\alpha$.

Par le (i) du Lemme 2.1.3, on a un isomorphisme topologique d'espaces de Fréchet réflexifs :

$$(14) \quad (\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha})^\vee = (\pi[\mathfrak{n}^\alpha]^\vee)(\eta)_{N_m^\alpha} \simeq (\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha}^{\text{sép}}(\eta)_{N_m^\alpha}$$

où $(\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha}^{\text{sép}}(\eta)_{N_m^\alpha}$ est muni de la topologie induite par $(\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha}^{\text{sép}}(\eta)$ (noter que la première égalité est immédiate). En particulier $(\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha}^{\text{sép}}(\eta)_{N_m^\alpha}$ est un $D(\mathbb{Z}_p, E_m)$ -module continu via $N_0/N_0^\alpha \simeq \mathbb{Z}_p$. On note pour tout π dans $\text{Rep}_{E_m}^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$:

$$(15) \quad M_\alpha(\pi) \stackrel{\text{déf}}{=} (\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha}^{\text{sép}}(\eta)_{N_m^\alpha} \stackrel{(14)}{\simeq} (\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha})^\vee.$$

Si $z \in \mathbb{Q}_p^\times$, $\text{val}(z) \leq 0$, on a aussi une action continue de z sur $M_\alpha(\pi)$ avec la convention que :

$$(16) \quad (zf)(-) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} f(z^{-1}(-))$$

si $f \in (\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha})^\vee$. Si $x \in N_0/N_0^\alpha \simeq \mathbb{Z}_p$ et $z \in \mathbb{Q}_p^\times$, $\text{val}(z) \leq 0$, on d\u00e9duit de (13) que l'on a sur $M_\alpha(\pi)$:

$$(17) \quad z \circ z^{-1}x = x \circ z$$

o\u00f9 $z^{-1}x$ est vu dans $\mathbb{Z}_p \simeq N_0/N_0^\alpha$.

Remarque 2.1.4. — La fin de la preuve du (ii) du Lemme 2.1.3 montre que pour π dans $\text{Rep}_{E_m}^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ on a une bijection continue, donc un isomorphisme, entre espaces de type compact :

$$\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \xrightarrow{\sim} \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}^{N_m^\alpha} = \pi(\eta^{-1})_{N_m^\alpha}^{N_m^\alpha}$$

dont on v\u00e9rifie facilement qu'il est N_m/N_m^α -\u00e9quivariant et commute aux actions de $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ en d\u00e9finissant l'action de $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ sur le terme de droite via l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur π suivie de la projection sur $\pi(\eta^{-1})_{N_m^\alpha}^{N_m^\alpha}$. On a donc aussi un isomorphisme compatible aux actions duales entre espaces de Fr\u00e9chet r\u00e9flexifs par le (i) du Lemme 2.1.3 et (14) :

$$(18) \quad M_\alpha(\pi) \simeq (\pi^\vee)(\eta)_{N_m^\alpha}^{\text{s\u00e9p}}.$$

On n'utilisera ces isomorphismes qu'\u00e0 m fix\u00e9 (noter que les fl\u00e8ches naturelles quand m grandit ne vont pas dans le m\u00eame sens des deux c\u00f4t\u00e9s). Quand on fera varier m (cf. par exemple le (iii) du Lemme 2.3.2) c'est $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$ et $(\pi^\vee)_{\mathfrak{n}^\alpha}^{\text{s\u00e9p}}(\eta)_{N_m^\alpha}^{N_m^\alpha}$ que l'on utilisera.

Lemme 2.1.5. — Soit $V' \hookrightarrow V$ un morphisme injectif continu de E_m -espaces vectoriels de type compact. Alors le morphisme (continu) $V^\vee \rightarrow V'^\vee$ est d'image dense.

D\u00e9monstration. — Soit W l'adh\u00e9rence de l'image de V^\vee dans V'^\vee , par [57, Cor. 9.3] il suffit de montrer $(V'^\vee/W)^\vee = 0$. Mais par r\u00e9flexivit\u00e9 de V' , $(V'^\vee/W)^\vee$ s'identifie \u00e0 $\{v' \in V', f(\iota(v')) = 0 \ \forall f \in V^\vee\}$ en notant $\iota : V' \hookrightarrow V$. Par [57, Cor. 9.3] encore, on a $\iota(v') = 0$ d'o\u00f9 $v' = 0$. \square

Proposition 2.1.6. — Soit $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'$ une suite exacte de repr\u00e9sentations dans $\text{Rep}_{E_m}^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$. Alors on a un complexe d'espaces de Fr\u00e9chet r\u00e9flexifs :

$$M_\alpha(\pi') \xrightarrow{f} M_\alpha(\pi) \xrightarrow{g} M_\alpha(\pi'') \longrightarrow 0$$

o\u00f9 g est une surjection topologique et o\u00f9 l'image de f est dense dans $\ker(g)$.

D\u00e9monstration. — On a une suite exacte de repr\u00e9sentations lisses de N_m^α :

$$0 \longrightarrow \pi''[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1}) \longrightarrow \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1}) \longrightarrow \pi'[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})$$

d'où, par exactitude du foncteur des coinvariants $(-)_{N_m^\alpha}$ sur les représentations lisses de N_m^α , une suite exacte de E_m -espaces vectoriels de type compact :

$$(19) \quad 0 \longrightarrow \pi''[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \longrightarrow \pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \longrightarrow \pi'[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$$

L'injection de gauche est automatiquement une immersion fermée (rappelons l'argument : elle induit un isomorphisme continu entre $\pi''[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$ et le noyau de l'application de droite, donc un isomorphisme topologique car ce sont deux espaces de type compact). En dualisant (19), le résultat découle du Lemme 2.1.5 appliqué à l'injection continue $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}/\pi''[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \hookrightarrow \pi'[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$. \square

2.2. (φ, Γ) -modules généralisés. — On donne quelques rappels et résultats simples sur les (φ, Γ) -modules généralisés ([47, § 4]).

On fixe une extension finie E de \mathbb{Q}_p . Pour r dans $\mathbb{Q}_{>0}$, soit \mathcal{R}_E^r le E -espace de Fréchet des fonctions rigides analytiques à coefficients dans E sur la couronne $p^{-1/r} \leq |\cdot| < 1$. On a $\mathcal{R}_E^r \subseteq \mathcal{R}_E^{r'}$ si $r \leq r'$ et on note $\mathcal{R}_E \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_E^r$ l'anneau de Robba à coefficients dans E . On note également \mathcal{R}_E^+ le E -espace de Fréchet des fonctions rigides analytiques à coefficients dans E sur le disque unité ouvert $0 \leq |\cdot| < 1$ (la “partie positive” de \mathcal{R}_E). Un élément de \mathcal{R}_E^r (resp. \mathcal{R}_E^+) est une série convergente $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i X^i$ avec $a_i \in E$ (resp. et $a_i = 0$ pour $i < 0$). On rappelle que tout sous- \mathcal{R}_E^r -module de type fini de $(\mathcal{R}_E^r)^d$ (pour un entier $d \geq 0$) est libre (de rang fini) et fermé dans $(\mathcal{R}_E^r)^d$ pour la topologie de Fréchet ([5, Prop. 1.1.1]). Si D_r est un \mathcal{R}_E^r -module de *présentation finie*, on le munit de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet définie par la topologie quotient d'une présentation finie (on vérifie facilement que cela ne dépend pas du choix de la présentation). Tout sous-module fermé d'un \mathcal{R}_E^r -module de présentation finie est de présentation finie (prendre l'image inverse du sous-module fermé dans une présentation et utiliser ce qui précède).

Lemme 2.2.1. — *Soit $r, r' \in \mathbb{Q}_{>0}$, $r \leq r'$, alors les injections d'anneaux $\mathcal{R}_E^+ \hookrightarrow \mathcal{R}_E^r$ et $\mathcal{R}_E^r \hookrightarrow \mathcal{R}_E^{r'}$ sont plates.*

Démonstration. — On démontre le premier cas seulement, la preuve du deuxième étant strictement analogue. Comme \mathcal{R}_E^+ et \mathcal{R}_E^r sont des anneaux de Bézout intègres ([3, Prop. 4.12(2)]), ce sont des anneaux de Prüfer et par [38, Cor. 5.3.6] ils sont cohérents. Mais avec des anneaux cohérents, il suffit de tester la platitude avec des modules de présentation finie (merci à A. Abbes pour ce point), i.e. il suffit de voir que si $M'' \hookrightarrow M$ est une injection de \mathcal{R}_E^+ -modules de présentation finie, alors $\mathcal{R}_E^r \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M'' \rightarrow \mathcal{R}_E^r \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M$ est encore injectif (utiliser la Remarque 1 de [8, § I.2.3] et le fait que tout idéal de type fini d'un anneau cohérent est de présentation finie). Les anneaux \mathcal{R}_E^+ et \mathcal{R}_E^r sont des algèbres de Fréchet-Stein au sens de [60, § 3], plus précisément on a des isomorphismes topologiques (pour la topologie limite projective) :

$$\mathcal{R}_E^+ = \varprojlim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_E^{[0,s]} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_E^r = \varprojlim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{R}_E^{[r,s]}$$

où $\mathcal{R}_E^{[0,s]}$ (resp. $\mathcal{R}_E^{[r,s]}$) est l'espace de Banach des fonctions rigides analytiques à coefficients dans E sur la couronne $0 \leq |\cdot| \leq p^{-1/s}$ (resp. $p^{-1/r} \leq |\cdot| \leq p^{-1/s}$). Pour tout \mathcal{R}_E^+ -module, resp. \mathcal{R}_E^r -module, de présentation finie M , on a :

$$(20) \quad M \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{s \rightarrow +\infty} (\mathcal{R}_E^{[0,s]} \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M), \quad \text{resp.} \quad M \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{s \rightarrow +\infty} (\mathcal{R}_E^{[r,s]} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} M),$$

par [60, Cor. 3.4(v)]. Soit $M'' \hookrightarrow M$ une injection de \mathcal{R}_E^+ -modules de présentation finie. Comme $\mathcal{R}_E^+ \hookrightarrow \mathcal{R}_E^{[0,s]}$ est plat par [60, Rem. 3.2], on a encore une injection $\mathcal{R}_E^{[0,s]} \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M'' \hookrightarrow \mathcal{R}_E^{[0,s]} \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M$. Comme $\mathcal{R}_E^{[0,s]} \hookrightarrow \mathcal{R}_E^{[r,s]}$ est aussi plat (car cela correspond à une immersion ouverte entre affinoïdes), on a aussi une injection $\mathcal{R}_E^{[r,s]} \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M'' \hookrightarrow \mathcal{R}_E^{[r,s]} \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M$. Comme le foncteur \varprojlim est exact à gauche, on en déduit une injection :

$$\varprojlim_{s \rightarrow +\infty} (\mathcal{R}_E^{[r,s]} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} (\mathcal{R}_E^r \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M'')) \hookrightarrow \varprojlim_{s \rightarrow +\infty} (\mathcal{R}_E^{[r,s]} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} (\mathcal{R}_E^r \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M))$$

d'où une injection $\mathcal{R}_E^r \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M'' \hookrightarrow \mathcal{R}_E^r \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M$ par (20) puisque $\mathcal{R}_E^r \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M''$ et $\mathcal{R}_E^r \otimes_{\mathcal{R}_E^+} M$ sont des \mathcal{R}_E^r -modules de présentation finie. Cela termine la preuve. \square

On munit tous les anneaux précédents de l'action continue E -linéaire de Γ usuelle $\gamma(X^i) = \gamma(X)^i = ((1+X)^{\varepsilon(\gamma)} - 1)^i$ pour $\gamma \in \Gamma$ et $i \in \mathbb{Z}$. On définit aussi l'opérateur de Frobenius E -linéaire continu $\varphi : \mathcal{R}_E^r \rightarrow \mathcal{R}_E^{pr}$ pour $r > p-1$ (resp $\varphi : \mathcal{R}_E \rightarrow \mathcal{R}_E$, resp. $\varphi : \mathcal{R}_E^+ \rightarrow \mathcal{R}_E^+$) par $\varphi(X^i) = \varphi(X)^i = ((1+X)^p - 1)^i$ pour $i \in \mathbb{Z}$ (en remarquant que $|(1+z)^p - 1| = |z^p| = |z|^p$ si $p^{-1/r} \leq |z| < 1$ et $r > p-1$). On note $t \stackrel{\text{déf}}{=} \log(1+X) \in \mathcal{R}_E^+$, qui vérifie $\gamma(t) = \varepsilon(\gamma)t$ et $\varphi(t) = pt$.

Pour $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$, on appelle (φ, Γ) -module généralisé (resp. (φ, Γ) -module) sur \mathcal{R}_E^r un \mathcal{R}_E^r -module D_r de présentation finie (resp. libre de rang fini) muni d'une action semi-linéaire continue de Γ et d'un morphisme $\varphi : D_r \rightarrow \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r$ qui commute à Γ et induit un isomorphisme \mathcal{R}_E^{pr} -linéaire :

$$(21) \quad \text{Id} \otimes \varphi : \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^r} D_r \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r.$$

Si D_r est un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r , l'argument de la preuve de [47, Prop. 4.1] montre que pour $r' \gg r$ on a un isomorphisme de $\mathcal{R}_E^{r'}$ -modules :

$$(22) \quad \mathcal{R}_E^{r'} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r \simeq (\mathcal{R}_E^{r'})^d \oplus (\oplus_{i=1}^{d'} \mathcal{R}_E^{r'} / (t^{k_i}))$$

pour des entiers $d, d', k_i \geq 0$ (noter au passage que l'injection $\mathcal{R}_E^r \subseteq \mathcal{R}_E^{r'}$ induit une surjection $\mathcal{R}_E^r / (t^k) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_E^{r'} / (t^k)$, cf. [47, Lem. 4.2]). Si $r' \geq r$, alors $D_{r'} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_E^{r'} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r$ avec action de Γ par extension des scalaires et :

$$\begin{aligned} \varphi : D_{r'} &\longrightarrow \mathcal{R}_E^{pr'} \otimes_{\mathcal{R}_E^{r'}} D_{r'} \simeq \mathcal{R}_E^{pr'} \otimes_{\mathcal{R}_E^{pr}} (\mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r) \\ \lambda \otimes d &\longmapsto \varphi(\lambda) \otimes \varphi(d), \quad \lambda \in \mathcal{R}_E^{r'}, d \in D_r \end{aligned}$$

définit un foncteur des (φ, Γ) -modules (généralisés) sur \mathcal{R}_E^r vers les (φ, Γ) -modules (généralisés) sur $\mathcal{R}_E^{r'}$. On appelle (φ, Γ) -module généralisé (resp. (φ, Γ) -module) sur

\mathcal{R}_E un \mathcal{R}_E -module D muni d'actions semi-linéaires de φ et Γ tel que pour $r \gg 0$ il existe un (φ, Γ) -module généralisé (resp. un (φ, Γ) -module) D_r sur \mathcal{R}_E^r et un morphisme \mathcal{R}_E^r -linéaire $D_r \rightarrow D$ qui induit un isomorphisme $\mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r \xrightarrow{\sim} D$ compatible à φ et Γ . Si D_r, D'_r (resp. D, D') sont deux (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E^r (resp. \mathcal{R}_E) on note $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_r, D'_r)$ (resp. $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D, D')$) les morphismes de \mathcal{R}_E^r -modules (resp. \mathcal{R}_E -modules) qui commutent à φ et Γ . Ce sont des E -espaces vectoriels de dimension finie⁽¹⁾.

Remarque 2.2.2. — Les (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E sont définis de manière un peu différente dans [47, § 4.1] mais on montre facilement que la définition ci-dessus est équivalente en utilisant l'argument précédant [47, Lem. 4.2].

Lemme 2.2.3. — (i) Les catégories de (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E^r ou sur \mathcal{R}_E sont abéliennes. La sous-catégorie des (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E de torsion est artinienne.

(ii) Soit $D, D_r, D_{r'}$ des (φ, Γ) -modules généralisés sur $\mathcal{R}_E, \mathcal{R}_E^r$ et $\mathcal{R}_E^{r'}$ respectivement tels que l'on a $f_r : \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r \xrightarrow{\sim} D$ et $f_{r'} : \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^{r'}} D_{r'} \xrightarrow{\sim} D$, alors il existe $r'' \geq r, r'$ et un isomorphisme $\mathcal{R}_E^{r''} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_E^{r''} \otimes_{\mathcal{R}_E^{r'}} D_{r'}$ de (φ, Γ) -modules généralisés sur $\mathcal{R}_E^{r''}$ tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r & \xrightarrow{f_{r'}^{-1} \circ f_r} & \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^{r'}} D_{r'} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{R}_E^{r''} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}_E^{r''} \otimes_{\mathcal{R}_E^{r'}} D_{r'}. \end{array}$$

(iii) Tout morphisme $D \rightarrow D'$ de (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E se factorise sous la forme :

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D' \\ \uparrow & & \uparrow \\ D_r & \longrightarrow & D'_r. \end{array}$$

où D_r, D'_r sont des (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E^r pour $r \gg 0$ tels que $\mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r \xrightarrow{\sim} D$, $\mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D'_r \xrightarrow{\sim} D'$ et $D_r \rightarrow D'_r$ est un morphisme de (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E^r .

Démonstration. — (i) Pour \mathcal{R}_E le premier énoncé est démontré dans [47, § 4.1] et le deuxième découle de (22) par extension des scalaires à \mathcal{R}_E . Comme \mathcal{R}_E^r est un anneau cohérent (cf. la preuve du Lemme 2.2.1), un morphisme de (φ, Γ) -modules généralisés

⁽¹⁾Par dévissage sur D et D' , il suffit de traiter les deux cas : D et D' sont libres de rang fini sur \mathcal{R}_E^r (resp. \mathcal{R}_E), et D et D' sont libres de rang fini sur $\mathcal{R}_E^r/(t)$ (resp. $\mathcal{R}_E/(t)$). En utilisant $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_r, D'_r) \simeq \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(\mathcal{R}_E^r, D_r^\vee \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D'_r)$ ou $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(\mathcal{R}_E^r/(t), D_r^\vee \otimes_{\mathcal{R}_E^r/(t)} D'_r)$ (suivant les cas), et idem avec \mathcal{R}_E au lieu de \mathcal{R}_E^r , le résultat se déduit de [47, Th. 4.7(1) & Th. 5.3(1)] (et de leur preuve) avec le (iii) du Lemme 2.2.3.

$f : D_r \rightarrow D'_r$ sur \mathcal{R}_E^r a son noyau et son image de présentation finie comme \mathcal{R}_E^r -module. Il suffit donc de montrer que $\ker(f)$ et $\operatorname{im}(f)$ vérifient (21). Comme \mathcal{R}_E^{pr} est libre de rang fini ($= p$) sur $\varphi(\mathcal{R}_E^r)$, le foncteur $\mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^r} (-)$ est exact sur les \mathcal{R}_E^r -modules. Le foncteur $\mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} (-)$ est aussi exact par le Lemme 2.2.1. Le résultat découle alors du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^r} D_r & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r \\ \downarrow \operatorname{Id} \otimes f & & \downarrow \operatorname{Id} \otimes f \\ \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^r} D'_r & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D'_r. \end{array}$$

(ii) Quitte à augmenter r et r' on peut supposer D_r et $D_{r'}$ de la forme (22). L'assertion découle alors facilement du résultat suivant (on laisse les détails au lecteur) : si $x_r \in \mathcal{R}_E^r/(t^k)$ (resp. \mathcal{R}_E^r) et $x_{r'} \in \mathcal{R}_E^{r'}/(t^k)$ (resp. $\mathcal{R}_E^{r'}$) ont même image dans $\mathcal{R}_E/(t^k)$ (resp. \mathcal{R}_E), alors il existe $r'' \geq r, r'$ tel que x_r et $x_{r'}$ ont même image dans $\mathcal{R}_E^{r''}/(t^k)$ (resp. $\mathcal{R}_E^{r''}$), cf. [47, Lem. 4.2]. L'argument pour (iii) est analogue. \square

Soit D un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E . On note $I(D)$ la catégorie des triplets (r, f_r, D_r) où $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$, D_r est un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r et $f_r : \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r \xrightarrow{\sim} D$ un isomorphisme de (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E , les morphismes $(r, f_r, D_r) \rightarrow (r', f_{r'}, D_{r'})$ étant les isomorphismes $f_{r,r'} : \mathcal{R}_E^{r'} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r \xrightarrow{\sim} D_{r'}$ pour $r' \geq r$ de (φ, Γ) -modules généralisés sur $\mathcal{R}_E^{r'}$ tels que le diagramme commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^{r'}} (\mathcal{R}_E^{r'} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r) & \xrightarrow{\operatorname{Id} \otimes f_{r,r'}} & \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^{r'}} D_{r'} \\ & \searrow f_r & \downarrow f_{r'} \\ & & D. \end{array}$$

On déduit du (ii) du Lemme 2.2.3 (et de sa preuve) que la catégorie $I(D)$ est une catégorie filtrante au sens de [50, § IX.1] et que l'on a un isomorphisme de \mathcal{R}_E -modules qui commute à φ et Γ :

$$(23) \quad \varinjlim_{(r, f_r, D_r) \in I(D)} D_r \xrightarrow{\sim} D$$

(en particulier cette limite inductive est filtrante).

Remarque 2.2.4. — Si D est un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E , on pourrait penser munir D de la topologie limite inductive (cf. [57, § 5]) pour tous les morphismes $D_r \rightarrow D$ en (23). Mais cette topologie n'est pas très utile car elle n'est en général pas séparée. Par exemple, le noyau de la surjection continue $\mathcal{R}_E^r/(t) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_E/(t)$ est dense dans $\mathcal{R}_E^r/(t)$ (son adhérence est un idéal principal de $\mathcal{R}_E^r/(t)$ dont on vérifie facilement que le seul générateur possible est 1) ! S'il était fermé, il serait tout $\mathcal{R}_E^r/(t)$, ce qui est impossible.

On rappelle (ou on vérifie) que $\mathcal{R}_E^{pr} \simeq \bigoplus_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(\mathcal{R}_E^r)$, de sorte que, si D_r est un (φ, Γ) -module (généralisé) sur \mathcal{R}_E^r , on a :

$$(24) \quad \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^r} D_r \simeq \bigoplus_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \otimes D_r.$$

On note $\text{pr}_0 : \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^r} D_r \rightarrow D_r$ la projection (continue) sur le facteur correspondant à $i = 0$ et on définit l'opérateur continu $\psi : D_r \rightarrow D_r$ comme la composée :

$$(25) \quad D_r \xrightarrow{1 \otimes \text{Id}} \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r \xrightarrow{(\text{Id} \otimes \varphi)^{-1}} \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^r} D_r \xrightarrow{\text{pr}_0} D_r.$$

On voit facilement que ψ commute à l'action de Γ , vérifie $\psi(\varphi(\lambda)d) = \lambda\psi(d)$ pour $\lambda \in \mathcal{R}_E^{r/p}$ et $d \in D_r$, et que l'on a dans $\mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^r} D_r$ pour $d \in D_r$ via (24) :

$$(26) \quad (\text{Id} \otimes \varphi)^{-1}(1 \otimes d) = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \otimes \frac{\psi((1+X)^{p-i}d)}{(1+X)}.$$

En remplaçant \mathcal{R}_E^r et \mathcal{R}_E^{pr} par \mathcal{R}_E , on définit de même $\psi : D \rightarrow D$ si D est un (φ, Γ) -module (généralisé) sur \mathcal{R}_E , et on a encore (26). Si $D \simeq \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r$ pour D_r un (φ, Γ) -module (généralisé) sur \mathcal{R}_E^r , le morphisme $D_r \rightarrow D$ commute à ψ (utiliser (25) pour D_r et D).

Nous aurons besoin de considérations analogues avec les anneaux $\mathcal{R}_E^{[r,s]}$ définis dans la preuve du Lemme 2.2.1. Pour $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$ et $s > r$ dans \mathbb{Q} , on vérifie facilement que l'on a $\varphi(\mathcal{R}_E^{[r,s]}) \subseteq \mathcal{R}_E^{[pr,ps]}$ (où φ est le Frobenius induit par $\varphi(X) = (1+X)^p - 1$), ainsi que $\mathcal{R}_E^{[pr,ps]} \simeq \bigoplus_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(\mathcal{R}_E^{[r,s]})$. Par extension des scalaires de \mathcal{R}_E^{pr} à $\mathcal{R}_E^{[pr,ps]}$ sur (21) on déduit un isomorphisme $\mathcal{R}_E^{[pr,ps]}$ -linéaire :

$$\text{Id} \otimes \varphi : \mathcal{R}_E^{[pr,ps]} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^{[r,s]}} D_{[r,s]} \xrightarrow{\sim} D_{[pr,ps]}$$

où l'on a posé pour $s' > r' \geq r$:

$$(27) \quad D_{[r',s']} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_E^{[r',s']} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_r.$$

On a comme en (25) un opérateur encore noté $\psi : D_{[r,ps]} \rightarrow D_{[r,s]}$ commutant à Γ défini comme la composée :

$$(28) \quad D_{[r,ps]} \rightarrow D_{[pr,ps]} \xrightarrow{(\text{Id} \otimes \varphi)^{-1}} \mathcal{R}_E^{[pr,ps]} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^{[r,s]}} D_{[r,s]} \xrightarrow{\text{pr}_0} D_{[r,s]}.$$

De plus, les flèches de restriction induisent des diagrammes commutatifs évidents quand s grandit qui, lorsque l'on prend la limite projective pour $s \rightarrow +\infty$ sur (28), redonnent (25). On note enfin :

$$(29) \quad \tilde{\psi} : D_{[r,ps]} \rightarrow \mathcal{R}_E^{[pr,ps]} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^{[r,s]}} D_{[r,s]} \xleftarrow{\sim} \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{[r,s]} \simeq \bigoplus_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \otimes D_{[r,s]}$$

(où la première flèche est la composée des deux flèches de gauche en (28)) qui est \mathcal{R}_E^+ -linéaire et commute à Γ .

2.3. Foncteurs F_α . — Pour tout $\alpha \in S$ on associe à toute représentation dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ un foncteur exact à gauche F_α sur les (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E .

On conserve les notations des §§ 2.1 et 2.2 et on fixe une racine $\alpha \in S$. Pour m un entier ≥ 0 , on rappelle que l'on a un isomorphisme d'algèbres de Fréchet $D(\mathbb{Z}_p, E_m) \simeq \mathcal{R}_{E_m}^+$ qui envoie $\mu \in D(\mathbb{Z}_p, E_m)$ vers $\mu((1+X)^z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu\binom{z}{i} X^i \in \mathcal{R}_{E_m}^+$ ([1]) et où la multiplication par $z \in \mathbb{Z}_p^\times$ (resp. p) sur \mathbb{Z}_p induit par functorialité de $D(\mathbb{Z}_p, E_m)$ l'opérateur $\gamma_z = \varepsilon^{-1}(z)$ (resp. φ) sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. Soit π dans $\text{Rep}_{E_m}^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$, on déduit de la fin du § 2.1 que $M_\alpha(\pi) = (\pi^\vee)_{\mathfrak{n}_\alpha}^{\text{sép}}(\eta)^{N_m^\alpha}$ est un $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -module continu sur un espace de Fréchet muni d'une action semi-linéaire continue de $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times (\subset \mathbb{Q}_p^\times)$ et d'un endomorphisme continu ψ commutant à Γ donné par l'action de $1/p \in \mathbb{Q}_p^\times$ (cf. (16)) et vérifiant $\psi(\varphi(\lambda)v) = \lambda\psi(v)$ pour $\lambda \in \mathcal{R}_{E_m}^+$ et $v \in M_\alpha(\pi)$ (cf. (17)). Comme en (26) on en déduit une application E_m -linéaire continue :

$$(30) \quad M_\alpha(\pi) \rightarrow \mathcal{R}_{E_m}^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_{E_m}^+} M_\alpha(\pi), \quad v \mapsto \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \otimes \frac{\psi((1+X)^{p-i}v)}{(1+X)}$$

et on vérifie facilement qu'elle est $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire et commute à Γ . Tout morphisme $\pi' \rightarrow \pi$ dans $\text{Rep}_{E_m}^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ induit un morphisme continu de $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -modules $M_\alpha(\pi) \rightarrow M_\alpha(\pi')$ qui commute à Γ et ψ .

Soit π dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$, pour m entier positif ou nul on considère le foncteur de la catégorie abélienne des (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E dans la catégorie des E_m -espaces vectoriels :

$$(31) \quad F_{\alpha,m}(\pi) : T \longmapsto \varinjlim_{(r,f_r,T_r) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi,\Gamma}(M_\alpha(\pi \otimes_E E_m), T_r \otimes_E E_m)$$

où $\text{Hom}_{\psi,\Gamma}(-, -)$ désigne les morphismes continus de $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -modules qui commutent à ψ et Γ . La limite inductive en (31) est filtrante, cf. (23), et la functorialité en T découle des points (iii) et (ii) du Lemme 2.2.3.

Remarque 2.3.1. — (i) La commutation d'un morphisme de $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -modules $f : M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \rightarrow T_r \otimes_E E_m$ avec ψ est équivalente à celle du diagramme :

$$(32) \quad \begin{array}{ccc} M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) & \xrightarrow{(30)} & \mathcal{R}_{E_m}^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_{E_m}^+} M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \\ \downarrow f & & \downarrow \text{Id} \otimes f \\ T_r \otimes_E E_m & \xrightarrow{(26)} & \mathcal{R}_{E_m}^{pr} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_{E_m}^r} (T_r \otimes_E E_m). \end{array}$$

(ii) L'application $T_r \rightarrow T$ induit un morphisme canonique :

$$F_{\alpha,m}(\pi)(T) \longrightarrow \text{Hom}_{\psi,\Gamma}(M_\alpha(\pi \otimes_E E_m), T \otimes_E E_m),$$

mais sans conditions supplémentaires sur π ce morphisme n'a pas de raison d'être injectif ni surjectif.

- (iii) Soit D_r, D'_r deux (φ, Γ) -modules généralisés sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$, alors tout morphisme continu de $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -modules $D_r \rightarrow D'_r$ est un morphisme (continu) de $\mathcal{R}_{E_m}^r$ -modules (il est facile de vérifier qu'il commute à $\mathcal{R}_{E_m}^+[1/X]$ puis on utilise la continuité pour étendre à $\mathcal{R}_{E_m}^r$). On a le même résultat avec des (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_{E_m} .
- (iv) Soit D_r, D'_r deux (φ, Γ) -modules généralisés sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$, alors par (26) tout morphisme dans $\text{Hom}_{\psi, \Gamma}(D_r, D'_r)$ (rappelons qu'il s'agit des morphismes continus de $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -modules - ou de manière équivalente par (iii) de $\mathcal{R}_{E_m}^r$ -modules - qui commutent à ψ et Γ) commute aussi à $(\text{Id} \otimes \varphi)^{-1}$, d'où on déduit :

$$\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_r, D'_r) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(D_r, D'_r).$$

On a le même résultat avec des (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_{E_m} .

- (v) Soit D_r, D'_r des (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E^r , alors on a :

$$\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_r, D'_r) \otimes_E E_m \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_r \otimes_E E_m, D'_r \otimes_E E_m).$$

Idem avec des (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E .

Lemme 2.3.2. — (i) Pour tout π dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ et $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ il existe une action naturelle du groupe $\text{Gal}(E_\infty/E)$ sur le foncteur $F_{\alpha, m}(\pi)$ qui est E_m -semi-linéaire (via l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ sur E_m).

(ii) Pour tout morphisme $\pi \rightarrow \pi'$ dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ on a un morphisme canonique de foncteurs $F_{\alpha, m}(\pi) \rightarrow F_{\alpha, m}(\pi')$ qui commute à l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ en (i).

(iii) Pour tout π dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ et $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on a un morphisme canonique de foncteurs $F_{\alpha, m}(\pi) \rightarrow F_{\alpha, m+1}(\pi)$ qui commute à l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ en (i).

Démonstration. — (i) Soit $g \in \text{Gal}(E_\infty/E)$ et $\eta' \stackrel{\text{déf}}{=} g \circ \eta$, on a vu au § 2.1 que pour tout $x \in N(\mathbb{Q}_p)$ on a $\eta'(x) = \eta(ax)$ pour un (unique) $a \in \mathbb{Z}_p^\times$. Posons $t_g \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\beta \in S \setminus \{\alpha\}} \lambda_{\beta^\vee}(a) \in T(\mathbb{Q}_p)$, en utilisant (7), (8) et (10) on vérifie que la conjugaison par t_g sur $G(\mathbb{Q}_p)$ préserve N_m et N_m^α , est l'identité sur N_m/N_m^α , commute à $T(\mathbb{Q}_p)$ et vérifie $\eta(t_g x t_g^{-1}) = \eta'(x)$ pour tout $x \in N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$. L'action de g sur $(\pi \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha] = \pi[\mathfrak{n}^\alpha] \otimes_E E_m$ (via son action sur E_m) induit un isomorphisme E_m -semi-linéaire :

$$(33) \quad g : (\pi \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \xrightarrow{\sim} (\pi \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta'^{-1})_{N_m^\alpha}$$

et l'action de $t_g \in T(\mathbb{Q}_p)$ sur π induit un isomorphisme E_m -linéaire :

$$(34) \quad t_g : (\pi \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta'^{-1})_{N_m^\alpha} \xrightarrow{\sim} (\pi \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha},$$

ces deux isomorphismes commutant aux actions de N_m/N_m^α et $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$. On en déduit une action semi-linéaire de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ sur $(\pi \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$ en faisant agir g par $t_g \circ g$, puis une action semi-linéaire sur le dual $M_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$ (cf. (15)) donnée par $(gf)(v) \stackrel{\text{déf}}{=} g(f((t_g^{-1} \circ g^{-1})v))$ pour $v \in (\pi \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$, $f \in M_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$ où g agit sur $f((t_g^{-1} \circ g^{-1})v) \in E_m$ par l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ sur E_m . Soit T un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E , on définit enfin une action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ sur $F_{\alpha, m}(\pi)(T)$ en envoyant $F \in \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M_\alpha(\pi \otimes_E E_m), T_r \otimes_E E_m)$ (cf. (31)) sur gF défini encore par $(gF)(f) \stackrel{\text{déf}}{=} g(F(g^{-1}f))$ où $g^{-1}f$ est l'action ci-dessus de g^{-1} sur $f \in M_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$ et

g agit sur $F(g^{-1}f) \in T_r \otimes_E E_m$ par l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ sur E_m et l'action triviale sur T_r .

(ii) La preuve est immédiate et laissée au lecteur.

(iii) Par les résultats du § 2.1, l'inclusion $N_m^\alpha \subset N_{m+1}^\alpha$ induit un morphisme de E_{m+1} -espaces vectoriels de type compact :

$$(\pi[\mathbf{n}^\alpha] \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \otimes_{E_m} E_{m+1} \rightarrow (\pi[\mathbf{n}^\alpha] \otimes_E E_{m+1})(\eta^{-1})_{N_{m+1}^\alpha}$$

qui induit par (14) un morphisme continu de $\mathcal{R}_{E_{m+1}}^+$ -modules :

$$(35) \quad M_\alpha(\pi \otimes_E E_{m+1}) \rightarrow M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \otimes_{E_m} E_{m+1}$$

qui commute à Γ , ψ ainsi qu'à l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ définie au (ii). Ce morphisme induit pour $(r, f_r, T_r) \in I(T)$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M_\alpha(\pi \otimes_E E_m), T_r \otimes_E E_m) &\hookrightarrow \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \otimes_{E_m} E_{m+1}, T_r \otimes_E E_{m+1}) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M_\alpha(\pi \otimes_E E_{m+1}), T_r \otimes_E E_{m+1}) \end{aligned}$$

d'où le résultat en passant à la limite inductive sur $(r, f_r, T_r) \in I(T)$. \square

Pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on note $F(\varphi, \Gamma)_m$ la catégorie des foncteurs covariants additifs exacts à gauche de la catégorie abélienne des (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E dans la catégorie abélienne des E_m -espaces vectoriels avec action E_m -semi-linéaire de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ (cf. [50, § II.4]). La catégorie $F(\varphi, \Gamma)_m$ est clairement abélienne. On définit de même $F(\varphi, \Gamma)_\infty$ en remplaçant E_m par E_∞ . Le (i) du Lemme 2.3.2 montre que $F_{\alpha, m}(\pi)$ est dans $F(\varphi, \Gamma)_m$.

On vérifie facilement que pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et tout $\pi \rightarrow \pi'$ dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ le diagramme de foncteurs suivant donné par les (ii) et (iii) du Lemme 2.3.2 commute :

$$(36) \quad \begin{array}{ccc} F_{\alpha, m}(\pi) & \longrightarrow & F_{\alpha, m}(\pi') \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{\alpha, m+1}(\pi) & \longrightarrow & F_{\alpha, m+1}(\pi'). \end{array}$$

On définit alors le foncteur additif covariant F_α de la catégorie $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ dans la catégorie abélienne $F(\varphi, \Gamma)_\infty$ par :

$$(37) \quad \pi \longmapsto F_\alpha(\pi) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{\alpha, m}(\pi)$$

(i.e. $F_\alpha(\pi)(T) = \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{\alpha, m}(\pi)(T)$ pour tout (φ, Γ) -module généralisé T sur \mathcal{R}_E).

Exemple 2.3.3. — Explicitons le foncteur F_α quand $G = \text{GL}_2$ (cf. Exemple 2.1.1). On a $N^\alpha = N_m^\alpha = \{1\}$ et $\lambda_{\alpha^\vee}(x) = \text{diag}(x, 1)$, et par la Proposition 2.3.6 ci-dessous, on peut choisir $N_m = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{p^m} \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Pour π dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$, on a $M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) = (\pi \otimes_E E_m)^\vee \simeq \pi^\vee \otimes_E E_m$ où la structure de \mathcal{R}_E^+ -module vient de l'action de $N_0 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur π^\vee , l'action de Γ de celle de $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, l'action de ψ

de celle de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}$ (rappelons que $B(\mathbb{Q}_p)$ agit sur le dual π^\vee comme en (16)) et où l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ est triviale sur π^\vee . On voit donc que l'on a $F_\alpha(\pi)(T) = E_\infty \otimes_E \varinjlim_{(r, f_r, T_r) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(\pi^\vee, T_r)$ (et on pourrait en fait oublier E_∞ dans ce cas).

Si $\chi : \text{Gal}(E_\infty/E) \rightarrow E^\times$ est un caractère localement analytique, on note $E_\infty(\chi)$ le E_∞ -espace vectoriel de dimension 1 avec action semi-linéaire de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ donnée par $g(x) = g(x)\chi(g)$ pour $x \in E_\infty$. Noter que par Hilbert 90 on a $E_\infty(\chi) \simeq E_\infty$ si et seulement χ est lisse (i.e. χ se factorise par $\text{Gal}(E_m/E)$ pour $m \gg 0$). Pour π dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$, si l'on a $F_\alpha(\pi)(T) \simeq E_\infty(\chi) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi), T)$ (fonctoriellement en T) pour tout (φ, Γ) -module généralisé T sur \mathcal{R}_E où $D_\alpha(\pi)$ est un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E , alors le (φ, Γ) -module $D_\alpha(\pi)$ est uniquement déterminé.

Proposition 2.3.4. — (i) Le foncteur $\pi \mapsto F_\alpha(\pi)$ envoie une suite exacte $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'$ dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ vers une suite exacte dans $F(\varphi, \Gamma)_\infty$:

$$0 \longrightarrow F_\alpha(\pi'') \longrightarrow F_\alpha(\pi) \longrightarrow F_\alpha(\pi').$$

(ii) Si l'on a de plus $F_\alpha(-)(T) \simeq E_\infty(\chi) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(-), T)$ (fonctoriellement en T) pour tout (φ, Γ) -module généralisé T sur \mathcal{R}_E où $- \in \{\pi, \pi'\}$ et $D_\alpha(-)$ est un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E , alors on a $F_\alpha(\pi'')(T) = E_\infty(\chi) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi')/D_\alpha(\pi), T)$.

Démonstration. — (i) Par exactitude de $\varinjlim_{m \rightarrow +\infty}$, il suffit de montrer le résultat avec $\pi \mapsto F_{\alpha, m}(\pi)$ pour π dans $\text{Rep}_{E_m}^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$. Soit T un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E et (r, f_r, T_r) dans $I(T)$, par la Proposition 2.1.6 on a un complexe de E_m -espaces vectoriels :

$$(38) \quad \begin{aligned} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M_\alpha(\pi''), T_r \otimes_E E_m) &\hookrightarrow \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M_\alpha(\pi), T_r \otimes_E E_m) \\ &\longrightarrow \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M_\alpha(\pi'), T_r \otimes_E E_m) \end{aligned}$$

où la première application est injective. Si $f : M_\alpha(\pi) \rightarrow T_r \otimes_E E_m$ est nul sur $\text{im}(M_\alpha(\pi') \rightarrow M_\alpha(\pi))$, alors f est nul sur $\ker(M_\alpha(\pi) \twoheadrightarrow M_\alpha(\pi'))$ par continuité et la dernière assertion de la Proposition 2.1.6. Donc f se factorise en un morphisme continu $M_\alpha(\pi'') \rightarrow T_r \otimes_E E_m$ par la surjection topologique dans la Proposition 2.1.6. On en déduit que (38) est en fait une suite exacte pour tout T . Par (31) le résultat découle de l'exactitude des limites inductives filtrantes.

(ii) Cela découle formellement du (i). \square

Remarque 2.3.5. — Le (ii) de la Proposition 2.3.4 peut se généraliser comme suit : si l'on a des caractères localement analytiques χ_1, \dots, χ_r de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ distincts modulo les caractères lisses, et des (φ, Γ) -modules généralisés $D_{\alpha, 1}(-), \dots, D_{\alpha, r}(-)$ sur \mathcal{R}_E pour $- \in \{\pi, \pi'\}$ tels que $F_\alpha(-)(T) \simeq \bigoplus_{i=1}^r (E_\infty(\chi_i) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_{\alpha, i}(-), T))$, alors on a $F_\alpha(\pi'')(T) \simeq \bigoplus_{i=1}^r (E_\infty(\chi_i) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_{\alpha, i}(\pi')/D_{\alpha, i}(\pi), T))$.

Rappelons que la définition du foncteur F_α dépend d'un certain nombre de choix : choix des $(\iota_\alpha)_{\alpha \in S}$ vérifiant (7), du caractère additif non trivial η , de la suite de sous-groupe ouverts compacts $(N_m)_{m \geq 0}$ vérifiant les hypothèses du § 2.1, et du cocaractère λ_{α^\vee} .

Proposition 2.3.6. — *Le foncteur F_α ne dépend pas des choix de $(\iota_\alpha)_{\alpha \in S}$, η et $(N_m)_{m \geq 0}$, i.e. pour un autre choix donnant un foncteur F'_α , il existe un isomorphisme de foncteurs $F'_\alpha \simeq F_\alpha$.*

Démonstration. — Soit $(N'_m)_{m \geq 0}$ une autre suite croissante de sous-groupes ouverts compacts totalement décomposés de $N(\mathbb{Q}_p)$ telle que $\cup_{m \geq 0} N'_m = N(\mathbb{Q}_p)$, $\eta(N'_m) \subseteq E_m$ pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et telle que $N(\mathbb{Q}_p)/N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \simeq N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\iota_\alpha} \mathbb{Q}_p$ induise par restriction (pour la racine simple α fixée) $N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N'_0 = N'_0/N_0^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$. Alors on peut définir des foncteurs $F'_{\alpha,m}$ en remplaçant $(N_m)_{m \geq 0}$ par $(N'_m)_{m \geq 0}$ dans la définition de $F_{\alpha,m}$ (notons que l'on n'a pas besoin de toute la condition (9)). De plus, comme les deux suites $(N'_m)_{m \geq 0}$ et $(N_m)_{m \geq 0}$ sont croissantes et cofinales dans $N(\mathbb{Q}_p)$, en procédant comme dans la preuve du (iii) du Lemme 2.3.2, pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ il existe $m_1, m_2 \gg 0$ tels que pour tout π dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ on a des morphismes naturels de foncteurs $F_{\alpha,m}(\pi) \rightarrow F'_{\alpha,m_1}(\pi)$ et $F'_{\alpha,m}(\pi) \rightarrow F_{\alpha,m_2}(\pi)$ qui commutent à l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$. On en déduit des morphismes fonctoriels en π dans $F(\varphi, \Gamma)_\infty$:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} F_{\alpha,m}(\pi) \longrightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} F'_{\alpha,m}(\pi) \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} F'_{\alpha,m}(\pi) \longrightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{\alpha,m}(\pi)$$

dont la composée dans les deux sens est clairement l'identité.

Soit $\eta' : \mathbb{Q}_p \rightarrow E_\infty$ un autre caractère additif tel que $\eta'(N_m) \subseteq E_m$, alors on a $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ tel que $\eta'(-) = \eta(a(-))$, et quitte à échanger η et η' on peut supposer $\text{val}(a) \geq 0$. Soit $t_a \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\beta \in S \setminus \{\alpha\}} \lambda_{\beta^\vee}(a) \in T(\mathbb{Q}_p)$ et $N'_m \stackrel{\text{déf}}{=} t_a^{-1} N_m t_a$ pour $m \geq 0$. Les sous-groupes $(N'_m)_{m \geq 0}$ sont totalement décomposés et tels que $\cup_{m \geq 0} N'_m = N(\mathbb{Q}_p)$, $\eta'(N'_m) \subseteq E_m$ pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et ι_α induit $N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N'_0 = N'_0/N_0^\alpha \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p$. Par le paragraphe précédent, le foncteur F'_α défini avec $(\iota_\beta)_{\beta \in R^+}$, η' et $(N'_m)_{m \geq 0}$ est le même que celui défini avec $(\iota_\beta)_{\beta \in R^+}$, η et $(N_m)_{m \geq 0}$. Mais, comme dans la preuve du (i) du Lemme 2.3.2, la multiplication par t_a^{-1} induit un isomorphisme :

$$(39) \quad t_a^{-1} : (\pi \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \xrightarrow{\sim} (\pi \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta'^{-1})_{N'_m^\alpha}$$

dont on vérifie facilement qu'il commute aux actions de $\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\iota_\alpha^{-1}} N'_0/N_0^\alpha = N_0/N_0^\alpha$, $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ et $\text{Gal}(E_\infty/E)$. On en déduit $F'_\alpha \simeq F_\alpha$.

Soit $(\iota_\beta)_{\beta \in R^+}$, η , $(N_m)_{m \geq 0}$ avec $\eta(N_m) \subseteq E_m$ et $N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_0 = N_0/N_0^\alpha \xrightarrow{\iota_\alpha} \mathbb{Z}_p$. La construction du foncteur F_α associée à ces choix ne dépend en fait pas des ι_β pour $\beta \in R^+ \setminus S$. Fixons $\beta \in S \setminus \{\alpha\}$ et remplaçons ι_β par $\iota'_\beta \stackrel{\text{déf}}{=} a \iota_\beta$ pour un $a \in \mathbb{Q}_p^\times$. On a donc une nouvelle application $\ell' : N(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{Q}_p$ qui induit un nouveau caractère

$\eta' \stackrel{\text{déf}}{=} \eta \circ \ell' : N(\mathbb{Q}_p) \rightarrow E_\infty$. Alors par (10) on voit que $\lambda_{\beta^\vee}(a) \in T(\mathbb{Q}_p)$ commute avec $N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ et vérifie $(\eta \circ \ell')(-) = (\eta \circ \ell)(\lambda_{\beta^\vee}(a)(-)\lambda_{\beta^\vee}(a)^{-1})$ (avec (7)). La multiplication par $\lambda_{\beta^\vee}(a)^{-1}$ a alors les mêmes propriétés que celle par t_a^{-1} en (39). Donc changer les ι_β pour $\beta \neq \alpha$ n'affecte pas F_α .

Soit enfin $(\iota'_\beta)_{\beta \in R^+}$, η , $(N'_m)_{\geq 0}$ avec $N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N'_0 = N'_0/N_0^\alpha \xrightarrow{\iota'_\alpha} \mathbb{Z}_p$ et $\iota'_\beta = \iota_\beta$ si $\beta \neq \alpha$. On a $\iota'_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} a\iota_\alpha$ pour un $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ ce qui implique $\iota_\alpha^{-1}(z) = \lambda_{\alpha^\vee}(a)\iota'_\alpha^{-1}(z)\lambda_{\alpha^\vee}(a)^{-1}$ pour $z \in \mathbb{Z}_p$ par (10) et (7). La multiplication par $\lambda_{\alpha^\vee}(a)^{-1}$ induit un isomorphisme :

$$\lambda_{\alpha^\vee}(a)^{-1} : (\pi \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \xrightarrow{\sim} (\pi \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{\lambda_{\alpha^\vee}(a)^{-1}N_m^\alpha\lambda_{\alpha^\vee}(a)}$$

qui commute aux actions de \mathbb{Z}_p (agissant via ι_α^{-1} à gauche et via ι'_α^{-1} à droite), $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ et $\text{Gal}(E_\infty/E)$. On en déduit que F_α est isomorphe au foncteur obtenu avec $(\iota'_\beta)_{\beta \in R^+}$, η , $(\lambda_{\alpha^\vee}(a)^{-1}N_m\lambda_{\alpha^\vee}(a))_{\geq 0}$ qui lui même, par le premier paragraphe, est isomorphe au foncteur obtenu avec $(\iota'_\beta)_{\beta \in R^+}$, η , $(N'_m)_{\geq 0}$. Cela achève la preuve. \square

Remarque 2.3.7. — Le foncteur F_α dépend du choix de λ_{α^\vee} , mais si l'on remplace λ_{α^\vee} par $\lambda_{\alpha^\vee} + \mu$ pour $\mu \in X^\vee(Z_G)$, alors lorsque $Z_G(\mathbb{Q}_p)$ agit sur $\pi \in \text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ par un caractère $\chi_\pi : Z_G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow E^\times$, on change $M_\alpha(\pi)$ en $M_\alpha(\pi) \otimes_{\mathcal{R}_E^+} \mathcal{R}_E^+(\chi_\pi \circ \mu)^{-1}$, c'est-à-dire que l'on multiplie l'action de $\gamma = \gamma_z \in \Gamma$ par $\chi_\pi(\mu(z))^{-1}$ et celle de ψ par $\chi_\pi(\mu(p))$. Noter au passage que si l'on tord π par un caractère localement analytique $\chi : B(\mathbb{Q}_p) \rightarrow E^\times$ qui est trivial sur $N(\mathbb{Q}_p) \subseteq B(\mathbb{Q}_p)$, alors on change $M_\alpha(\pi)$ en $M_\alpha(\pi) \otimes_{\mathcal{R}_E^+} \mathcal{R}_E^+(\chi \circ \lambda_{\alpha^\vee}^{-1})$ (cf. le tout début du § 3.3 pour la notation).

3. Foncteurs F_α et théorie d'Orlik-Strauch

On étudie les foncteurs F_α appliqués aux représentations localement analytiques $\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$ définies par Orlik et Strauch ([54]).

3.1. Quelques notations. — On commence par quelques rappels et notations.

On conserve les notations des §§ 2.1, 2.2 et 2.3. On note \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{b} , \mathfrak{n} , \mathfrak{t} , \mathfrak{b}^- , \mathfrak{n}^-) la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de $G(\mathbb{Q}_p)$ (resp. $B(\mathbb{Q}_p)$, $N(\mathbb{Q}_p)$, $T(\mathbb{Q}_p)$, $B^-(\mathbb{Q}_p)$, $N^-(\mathbb{Q}_p)$) et $U(-)$ les algèbres enveloppantes associées. Afin de pouvoir utiliser les résultats de [54], on suppose [54, As. 5.1] (comme dans *loc.cit.*), i.e. $p > 2$ si le système de racine associé à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ a des composantes irréductibles de type B , C , F_4 et $p > 3$ s'il en a de type G_2 (en particulier il n'y a pas d'hypothèse sur p si $G = \text{GL}_n$). Suivant [54, § 2], on note $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{b}^-}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{O} = \mathcal{O}^{\mathfrak{b}^-}$ (cf. [41, § 1.1]) des $U(\mathfrak{g})$ -modules dont les poids (au sens caractères de \mathfrak{t}) sont algébriques. Si $P \subseteq G$ est un sous-groupe parabolique contenant B , on dispose également de la sous-catégorie pleine $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}^-} \subseteq \mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{b}^-}$ où \mathfrak{p}^- est la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de $P^-(\mathbb{Q}_p)$ (cf. [54, § 2]). On note L_P le sous-groupe de Levi de P , N_P son radical unipotent (donc $P = N_P \rtimes L_P$) et

$N_{L_P} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} L_P \cap N$. Pour $w \in W$ et $\lambda \in X(T)$, on note $w \cdot \lambda$ la ‘‘dot-action’’ par rapport \u00e0 B^- , i.e. $w \cdot \lambda = w(\lambda - \rho) + \rho \in X(T)$.

Pour $\lambda \in X(T)$, on note $L^-(\lambda) \in \mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{b}^-}$ le $U(\mathfrak{g})$ -module simple sur E de plus haut poids λ par rapport \u00e0 B^- , c’est-\u00e0-dire l’unique quotient simple du module de Verma $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda$ o\u00f9 $\lambda : U(\mathfrak{t}) \rightarrow E$ est vu comme caract\u00e8re de $U(\mathfrak{b}^-) \rightarrow U(\mathfrak{t})$. Il est dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}^-}$ si et seulement si $\langle \lambda, \beta^\vee \rangle \leq 0$ pour toute racine simple $\beta \in S$ de L_P et c’est alors aussi l’unique quotient simple du module de Verma g\u00e9n\u00e9ralis\u00e9 $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$ o\u00f9 $L^-(\lambda)_P$ est la repr\u00e9sentation alg\u00e8brique irr\u00e9ductible de dimension finie de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E de plus haut poids λ (par rapport \u00e0 $B^- \cap L_P$). Rappelons que toute repr\u00e9sentation alg\u00e8brique irr\u00e9ductible de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E est de la forme $L^-(\lambda)_P$ pour $\lambda \in X(T)$ tel que $\langle \lambda, \beta^\vee \rangle \leq 0$ pour toute racine simple $\beta \in S$ de L_P , et que $L^-(\lambda)$ (pour $\lambda \in X(T)$) est de dimension finie sur E si et seulement si $\langle \lambda, \beta^\vee \rangle \leq 0$ pour tout $\beta \in S$ i.e. λ est dominant par rapport \u00e0 B^- .

Soit π_P^∞ une repr\u00e9sentation lisse de longueur finie de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E , Orlik et Strauch construisent dans [54] un foncteur contravariant exact $M \mapsto \mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$ de la cat\u00e9gorie $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}^-}$ dans la cat\u00e9gorie $\text{Rep}_E^{\text{an}}(G(\mathbb{Q}_p))$ (en fait dans la cat\u00e9gorie des repr\u00e9sentations localement analytiques admissibles de longueur finie de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E). Rappelons bri\u00e8vement sa d\u00e9finition. On choisit d’abord un sous- E -espace vectoriel de dimension finie W de M stable par $U(\mathfrak{p}^-)$ et qui engendre M sous l’action de $U(\mathfrak{g})$, de sorte que l’on a une suite exacte courte de $U(\mathfrak{g})$ -modules \u00e0 gauche :

$$0 \longrightarrow \ker(\phi) \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} W \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0.$$

On d\u00e9finit l’induite parabolique localement analytique :

$$\begin{aligned} (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} W^\vee \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}} &\stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \{f : G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow W^\vee \otimes_E \pi_P^\infty \text{ loc. an. tel que} \\ & f(p^-g) = p^-(f(g)) \text{ pour tous } p^- \in P^-(\mathbb{Q}_p), g \in G(\mathbb{Q}_p)\} \end{aligned}$$

o\u00f9 W^\vee est le dual de la repr\u00e9sentation de dimension finie W (l’action de $G(\mathbb{Q}_p)$ \u00e9tant donn\u00e9e comme d’habitude par $(g'f)(g) = f(gg')$). Pour $f : G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow W^\vee \otimes_E \pi_P^\infty$ localement analytique et $\mathfrak{d} \in U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} W$, on d\u00e9finit $\mathfrak{d} \cdot f \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \mathfrak{x} \cdot (f(-)(w)) \in C^{\text{an}}(G(\mathbb{Q}_p), \pi_P^\infty)$ si $\mathfrak{d} = \mathfrak{x} \otimes w$ avec $(\mathfrak{h} \cdot h)(g) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{d}{dt} h(\exp(-t\mathfrak{h})g)|_{t=0} \in \pi_P^\infty$ si $h \in C^{\text{an}}(G(\mathbb{Q}_p), \pi_P^\infty)$ et $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$. On a alors (cf. [54, \u00a7 1], et aussi [12, (2.5)]) :

$$(40) \quad \mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \left\{ f \in (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} W^\vee \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}, \mathfrak{d} \cdot f = 0 \quad \forall \mathfrak{d} \in \ker(\phi) \right\}$$

qui ne d\u00e9pend pas du choix de W . En particulier, pour $L^-(\lambda)_P$ repr\u00e9sentation alg\u00e8brique irr\u00e9ductible de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E , on a donc :

$$\mathcal{F}_{P^-}^G(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P, \pi_P^\infty) = (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L^-(\lambda)_P^\vee \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}.$$

Noter que $L^-(\lambda)_P^\vee \simeq L(-\lambda)_P$ o\u00f9 $L(-\lambda)_P$ est la repr\u00e9sentation alg\u00e8brique irr\u00e9ductible de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ de plus haut poids $-\lambda$ par rapport \u00e0 $B \cap L_P$. Si λ est dominant par

rapport à B^- , on a par [54, Prop. 4.9(b)] :

$$(41) \quad \mathcal{F}_{P^-}^G(L^-(\lambda), \pi_P^\infty) = L(-\lambda) \otimes_E (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P^\infty)^\infty$$

où $L(-\lambda) = L(-\lambda)_G = L^-(\lambda)^\vee$ et $(\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P^\infty)^\infty$ est l'induite parabolique lisse. De plus pour un tel λ on déduit de [43, Prop. II.2.11] un isomorphisme $L(-\lambda)[\mathfrak{n}_P] \simeq L(-\lambda)_P$.

On fixe maintenant jusqu'à la fin du § 3 une racine $\alpha \in S$. L'objectif du § 3 est d'étudier le foncteur $F_\alpha(\pi)$ pour $\pi = \mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$ avec P, M, π_P^∞ comme ci-dessus. En particulier nous déterminons explicitement $F_\alpha(\pi)$ lorsque M est un quotient de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$ (pour $L^-(\lambda)_P$ représentation algébrique irréductible de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E) et π_P^∞ a un caractère central, cf. Corollaire 3.7.8 ci-dessous. La preuve va utiliser de manière essentielle deux cas particuliers : le cas localement algébrique $\pi = L^-(\lambda) \otimes_E \pi^\infty$ avec λ dominant par rapport à B^- et π^∞ représentation lisse de longueur finie de $G(\mathbb{Q}_p)$, qui sera démontré au § 3.3, et le cas $\pi = (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L^-(\lambda)_P^\vee \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}$ qui sera démontré au § 3.7 en utilisant les résultats des §§ 3.2, 3.4, 3.5 & 3.6.

3.2. Lemmes topologiques. — On montre plusieurs lemmes topologiques (plus ou moins standard) qui seront utilisés dans les paragraphes suivants.

On conserve toutes les notations précédentes. Si A est un E -espace vectoriel localement convexe muni d'une structure d'algèbre séparément continue, et V, W deux E -espaces vectoriels localement convexes tels que V (resp. W) est muni d'une structure de A -module à droite (resp. à gauche) séparément continu, on définit $V \widehat{\otimes}_{A, \iota} W$ comme le quotient de $V \widehat{\otimes}_{E, \iota} W$ par l'adhérence du sous- E -espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $va \otimes w - v \otimes aw$, $(a, v, w) \in A \times V \times W$, muni de la topologie quotient (cf. [45, Rem. 1.2.11]). Lorsque A, V et W sont de plus des espaces de Fréchet, rappelons que les topologies projective et injective coïncident sur $V \otimes_E W$ ([57, Prop. 17.6]) et que V (resp. W) est un A -module à droite (resp. à gauche) continu ([9, Cor. III.5.2.1]). On note dans ce cas $V \widehat{\otimes}_E W$ et $V \widehat{\otimes}_A W$.

La preuve du (premier) lemme suivant est facile et formelle, et laissée au lecteur.

Lemme 3.2.1. — *Soit A un E -espace vectoriel localement convexe muni d'une structure d'algèbre séparément continue, et V, W deux E -espaces vectoriels localement convexes avec V (resp. W) muni d'une structure de A -module à droite (resp. à gauche) séparément continu. Alors on a un isomorphisme canonique $V \widehat{\otimes}_{E, \iota} W \xrightarrow{\sim} V \widehat{\otimes}_{A, \iota} (A \widehat{\otimes}_{E, \iota} W)$ (resp. $V \widehat{\otimes}_{E, \iota} W \xrightarrow{\sim} (V \widehat{\otimes}_{E, \iota} A) \widehat{\otimes}_{A, \iota} W$).*

Lemme 3.2.2. — *Soit $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$ une suite exacte stricte de E -espaces vectoriels localement convexes.*

(i) *Pour tout morphisme continu $W \rightarrow V''$ de E -espaces vectoriels localement convexes, la suite exacte $0 \rightarrow V' \rightarrow V \times_{V''} W \rightarrow W \rightarrow 0$ est stricte où le produit fibré $V \times_{V''} W$ est muni de la topologie induite par la topologie produit sur $V \times W$.*

(ii) Pour tout morphisme continu $V' \rightarrow W$ de E -espaces vectoriels localement convexes, la suite exacte $0 \rightarrow W \rightarrow W \oplus_{V'} V \rightarrow V'' \rightarrow 0$ est stricte où la somme amalgamée $W \oplus_{V'} V$ est munie de la topologie quotient de la topologie produit sur $W \times V$.

Démonstration. — On montre le (i), laissant la preuve du (ii) (qui procède d'arguments analogues) au lecteur. L'injection $V' \hookrightarrow V \times_{V''} W$ étant stricte (car l'injection $V' \simeq V' \times \{0\} \hookrightarrow V \times W$ l'est par [57, Lem. 5.3(i)]), il suffit de montrer que la surjection $V \times_{V''} W \xrightarrow{s} W$ est stricte, i.e. que la topologie sur W est la topologie quotient de $V \times_{V''} W$. Soit $X \subseteq W$ un sous-ensemble tel que $s^{-1}(X)$ est ouvert dans $V \times_{V''} W$, nous allons montrer que X est ouvert dans W . Il existe donc un ouvert U de $V \times W$ tel que $s^{-1}(X) = U \cap (V \times_{V''} W)$. On peut supposer $U = U + V'$ ($= \{u + v', (u, v') \in U \times V'\}$). En effet, on a clairement une inclusion $s^{-1}(X) \subseteq (U + V') \cap (V \times_{V''} W)$, et on a aussi $(U + V') \cap (V \times_{V''} W) = (U \cap (V \times_{V''} W)) + V'$ (car $V' \simeq V' \times \{0\} \subseteq V \times_{V''} W$) et $(U \cap (V \times_{V''} W)) + V' = U \cap (V \times_{V''} W)$ car $U \cap (V \times_{V''} W) = s^{-1}(X) = s^{-1}(X) + V'$. Notons \bar{U} l'image de U dans $V'' \times W \simeq V/V' \times W$, comme U est un ouvert de $V \times W$ tel que $U = U + V'$, on voit que \bar{U} est ouvert dans $V'' \times W$ (dont la topologie est la topologie quotient de $V \times W$ par [57, Lem. 5.3(ii)]). Il suffit de montrer que $X = W \cap \bar{U}$ dans $V'' \times W$. On a clairement $X \subseteq W \cap \bar{U}$. Un élément w de $W \cap \bar{U}$ se relève dans $V \times_{V''} W$ et dans U , la différence des relevés étant dans V' . Comme $V' \subseteq V \times_{V''} W$, quitte à modifier le relevé dans $V \times_{V''} W$, on voit que l'on peut relever w dans $U \cap (V \times_{V''} W) = s^{-1}(X)$, donc $w \in X$ et on a bien $X = W \cap \bar{U}$. \square

Remarque 3.2.3. — Lorsque les 3 espaces V, V', V'' du Lemme 3.2.2 sont des espaces de Fréchet, alors $V \times_{V''} W$ (resp. $W \oplus_{V'} V$) est encore un espace de Fréchet : le premier car c'est le noyau d'un morphisme continu entre espaces de Fréchet, le second car c'est le conoyau d'une immersion fermée $V' \hookrightarrow W \oplus V$ (composée des injections $V' \hookrightarrow W \oplus V' \hookrightarrow W \oplus V$ qui sont des immersions fermées par [57, Rem. 8.4], [57, Lem. 5.3(iii)] et [57, Cor. 8.7]).

Lemme 3.2.4. — Soit $f : V' \rightarrow V$ un morphisme continu de E -espaces vectoriels localement convexes et soit W un E -espace vectoriel localement convexe. Si f est d'image dense, alors les morphismes canoniques $f \otimes \text{Id} : V' \otimes_{E,\pi} W \rightarrow V \otimes_{E,\pi} W$ et $f \otimes \text{Id} : V' \otimes_{E,\iota} W \rightarrow V \otimes_{E,\iota} W$ sont aussi d'image dense.

Démonstration. — On donne la preuve pour $\otimes_{E,\pi}$, celle avec $\otimes_{E,\iota}$ étant analogue. Si l'image de $f \otimes \text{Id}$ n'est pas dense, alors par [57, Cor. 9.3] on a une forme linéaire continue non nulle $l : V \otimes_{E,\pi} W \rightarrow E$ qui est nulle sur l'image de $f \otimes \text{Id}$. Soit $w \in W$, comme l'injection $V \hookrightarrow V \otimes_{E,\pi} W, v \mapsto v \otimes w$ est continue, la forme linéaire $v \in V \mapsto l(v \otimes w) \in E$ est continue, et nulle sur l'image de f . Comme cette image est dense, on a $l(v \otimes w) = 0$ pour tout $v \in V, w \in W$, ce qui contredit la non nullité de l (cette preuve utilisant [57, Cor. 9.3] nous a été suggérée par le rapporteur). \square

Lemme 3.2.5. — *Considérons un diagramme commutatif de suites exactes de E -espaces vectoriels localement convexes de type compact :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \xrightarrow{g} & V'' \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' \end{array}$$

où les injections f' , f'' et l'application g sont strictes. Alors l'injection f est aussi stricte.

Démonstration. — Rappelons d'abord que les injections $V' \hookrightarrow V$ et $W' \hookrightarrow W$ sont automatiquement strictes, qu'une injection d'espaces de type compact est stricte si et seulement si c'est une immersion fermée, et qu'une composée d'injections strictes est une injection stricte. On en déduit en particulier un diagramme commutatif d'espaces de type compact :

$$\begin{array}{ccccc} & & V/V' & \xrightarrow{\bar{g}} & V'' \\ & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & W'/V' & \xrightarrow{i} & W/V' & \longrightarrow & W'' \end{array}$$

où les injections \bar{g} et f'' sont strictes, puis une suite exacte d'espaces de type compact :

$$0 \longrightarrow W'/V' \oplus V/V' \xrightarrow{i \oplus \bar{f}} W/V' \longrightarrow W''/(V/V').$$

Cette dernière suite exacte implique que l'injection $i \oplus \bar{f}$ est une immersion fermée, d'où également l'injection $\bar{f} : V/V' \hookrightarrow W/V'$. L'image inverse du fermé V/V' dans W via la surjection continue $W \twoheadrightarrow W/V'$, c'est-à-dire V , est donc un fermé de W , ce qui termine la preuve. \square

Lemme 3.2.6. — *Soit $\cdots \rightarrow X_N \rightarrow X_{N-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_M$ un système projectif de E -espaces vectoriels localement convexes et munissons $X \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{N \geq M} X_N$ de la topologie*

limite projective ([57, § 5.D]). Soit $f : X \rightarrow B$ une application E -linéaire continue vers un E -espace de Banach B . Alors il existe $N \gg M$ tel que f est nulle sur $\ker(p_N)$ où $p_N : X \rightarrow X_N$ est la projection canonique.

Démonstration. — Soit B_0 une boule unité du E -espace de Banach B , l'image inverse $f^{-1}(B_0)$ est un sous- \mathcal{O}_E -module ouvert dans X , donc qui contient $\ker(p_N)$ pour $N \gg M$ par les propriétés de la topologie limite projective. Mais comme $\ker(p_N)$ est un E -espace vectoriel, son image dans B_0 l'est aussi, ce qui implique qu'elle est nulle. \square

On appelle module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ (resp. \mathcal{R}_E^r) un E -espace vectoriel de Fréchet M muni d'une structure de \mathcal{R}_E^+ -module continu (resp. de \mathcal{R}_E^r -module continu). On appelle ψ -module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ (resp. \mathcal{R}_E^r) un module de Fréchet M sur \mathcal{R}_E^+

muni d'un morphisme continu $\psi : M \rightarrow M$ qui vérifie $\psi(\varphi(\lambda)v) = \lambda\psi(v)$ pour $\lambda \in \mathcal{R}_E^+$ (resp. avec \mathcal{R}_E^r). On appelle (ψ, Γ) -module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ (resp. \mathcal{R}_E^r) un ψ -module de Fréchet M sur \mathcal{R}_E^+ (resp. \mathcal{R}_E^r) muni d'une action semi-linéaire continue de Γ qui commute à ψ . Si M, M' sont deux ψ -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ , on note $\text{Hom}_\psi(M, M')$ les morphismes continus de \mathcal{R}_E^+ -modules qui commute à ψ (lorsqu'il y a en plus une action de Γ , $\text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M, M')$ a déjà été défini après (31)).

Le lemme suivant et sa preuve nous ont été suggérés par le rapporteur à partir d'un lemme moins général dans une première version. Ce lemme sera utilisé de nombreuses fois dans la suite.

Lemme 3.2.7. — Soit $\cdots \rightarrow X_N \rightarrow X_{N-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_M$ un système projectif de ψ -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ tel que les applications de transition $X_N \rightarrow X_{N-1}$ sont surjectives, et munissons $X \stackrel{\text{déf}}{=} \varprojlim_{N \geq M} X_N$ de la topologie limite projective (c'est encore un ψ -module de Fréchet). Pour tout $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$ et tout (φ, Γ) -module généralisé T_r sur \mathcal{R}_E^r on a un isomorphisme canonique et fonctoriel (en T_r) de E -espaces vectoriels :

$$\varprojlim_N \text{Hom}_\psi(X_N, T_r) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_\psi(X, T_r).$$

Démonstration. — La functorialité en T_r est claire. Le morphisme canonique de l'énoncé est clairement injectif puisque les projections $X \rightarrow X_N$ sont surjectives par hypothèse. Il faut donc montrer qu'il est surjectif. Soit $f : X \rightarrow T_r$ un morphisme de ψ -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ et $f_n : X \rightarrow T_r \rightarrow T_{[r, p^n r]}$ pour $n \geq 1$ sa composée avec l'application canonique \mathcal{R}_E^r -linéaire $T_r \rightarrow T_{[r, p^n r]}$ (cf. § 2.2 pour $T_{[r, p^n r]}$). Comme $T_{[r, p^n r]}$ est un espace de Banach, par le Lemme 3.2.6 il existe $N \gg M$ tel que $f_1|_{\ker(p_N)} = 0$ (avec les notations de *loc.cit.*). Montrons par récurrence croissante sur $n \geq 1$ que $f_n|_{\ker(p_N)} = 0$. Supposons que c'est vrai au cran n et montrons $f_{n+1}|_{\ker(p_N)} = 0$. Par (28) et la phrase qui le suit, et par la commutation de f à ψ on a $\psi \circ f_{n+1} = f_n \circ \psi$. Comme $\ker(p_N)$ est stable par ψ dans X , on en déduit $\psi(f_{n+1}(\ker(p_N))) = 0$. Mais $f_{n+1}(\ker(p_N))$ est un sous- \mathcal{R}_E^+ -module de $T_{[r, p^{n+1}r]}$, et il n'est pas difficile de voir que $\ker(\psi : T_{[r, p^{n+1}r]} \rightarrow T_{[r, p^n r]})$ ne peut contenir de sous- \mathcal{R}_E^+ -module non nul (si $v \in T_{[r, p^{n+1}r]}$ est non nul, il existe toujours un $i \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $\psi((1+X)^i v) \neq 0$). On en déduit $f_{n+1}(\ker(p_N)) = 0$. Puisque $T_r = \varprojlim_n T_{[r, p^n r]}$ (cf. (20)), on en déduit $f|_{\ker(p_N)} = 0$, i.e. f se factorise par X_N , i.e. f est dans l'image de $\text{Hom}_\psi(X_N, T_r)$. \square

Remarque 3.2.8. — (i) Lorsque T_r est un (φ, Γ) -module sans torsion (donc libre de rang fini sur \mathcal{R}_E^r), il n'y a besoin ni de l'opérateur ψ ni des structures de \mathcal{R}_E^+ -modules dans le Lemme 3.2.7, i.e. il reste vrai en considérant seulement les morphismes E -linéaires continus de X_N ou X dans T_r . La raison est qu'alors on a une *injection* continue $T_r \hookrightarrow T_{[r, s]}$ pour tout $s > r$, et on peut appliquer directement le Lemme 3.2.6 puisque $T_{[r, s]}$ est un espace de Banach.

(ii) Dans l'énoncé du Lemme 3.2.7, on peut bien sûr rajouter une action de Γ en

considérant un système projectif de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ , et on obtient alors un isomorphisme $\varinjlim \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(X_N, T_r) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(X, T_r)$.

Les deux lemmes suivants, dont le second (Lemme 3.2.10) est dû au rapporteur, sont des corollaires du Lemme 3.2.7.

Lemme 3.2.9. — Soit M un ψ -module (resp. un (ψ, Γ) -module) de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ et V un E -espace vectoriel de dimension dénombrable muni de la topologie localement convexe la plus fine ([57, § 5]). Pour tout $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$ et tout (φ, Γ) -module généralisé T_r sur \mathcal{R}_E^r on a un isomorphisme canonique de E -espaces vectoriels :

$$\text{Hom}_{\psi}(M \widehat{\otimes}_E V^{\vee}, T_r) \simeq V \otimes_E \text{Hom}_{\psi}(M, T_r)$$

où l'action de ψ sur $M \widehat{\otimes}_E V^{\vee}$ est seulement sur "le facteur" M (resp. avec $\text{Hom}_{\psi, \Gamma}$).

Démonstration. — Les hypothèses sur V font qu'on peut l'écrire comme une somme directe topologique $V = \bigoplus_{i \geq 1} E e_i$ et on a alors $V^{\vee} = \prod_{i \geq 1} E e_i^*$ et $M \widehat{\otimes}_E V^{\vee} = \prod_{i \geq 1} (M \otimes_E E e_i^*)$ où $(e_i^*)_{i \geq 1}$ est la base duale de $(e_i)_{i \geq 1}$. On pose $X_N \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{1 \leq i \leq N} (M \otimes_E E e_i^*)$ avec action de ψ (resp. ψ, Γ) uniquement sur "le facteur" M , et on a $\varinjlim_N X_N \simeq M \widehat{\otimes}_E V^{\vee}$ et :

$$\varinjlim_N \text{Hom}_{\psi}(X_N, T_r) \simeq \bigoplus_{i \geq 1} \text{Hom}_{\psi}(M \otimes_E E e_i^*, T_r).$$

On en déduit par le Lemme 3.2.7 :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\psi}(M \widehat{\otimes}_E V^{\vee}, T_r) &\simeq \bigoplus_{i \geq 1} \text{Hom}_{\psi}(M \otimes_E E e_i^*, T_r) \\ &\simeq \bigoplus_{i \geq 1} (\text{Hom}_E(E e_i^*, E) \otimes_E \text{Hom}_{\psi}(M, T_r)) \\ &\simeq \left(\bigoplus_{i \geq 1} \text{Hom}_E(E e_i^*, E) \right) \otimes_E \text{Hom}_{\psi}(M, T_r) \\ &\simeq V \otimes_E \text{Hom}_{\psi}(M, T_r), \end{aligned}$$

et idem avec $\text{Hom}_{\psi, \Gamma}$ au lieu de Hom_{ψ} . □

Lemme 3.2.10. — Soit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, π une représentation dans $\text{Rep}_{E_m}^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ et $\pi_N \subseteq \pi$ pour $N \geq M$ des sous- E_m -espaces vectoriels fermés croissants de π vérifiant les conditions suivantes : π_N est stable par N_m et $\lambda_{\alpha^{\vee}}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$, $\pi = \bigcup_{N \geq M} \pi_N$. Définissons $M_{\alpha}(\pi)$ et $M_{\alpha}(\pi_N)$, $N \geq M$ comme en (15), alors pour tout $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$ et tout (φ, Γ) -module généralisé T_r sur \mathcal{R}_E^r l'application naturelle $M_{\alpha}(\pi) \rightarrow M_{\alpha}(\pi_N)$ ($N \geq M$) induit un isomorphisme canonique et fonctoriel (en T_r) de E_m -espaces vectoriels :

$$\varinjlim_N \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M_{\alpha}(\pi_N), T_r) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M_{\alpha}(\pi), T_r).$$

Démonstration. — Par la Proposition 2.1.6 (plus précisément sa preuve) les applications $M_\alpha(\pi_N) \rightarrow M_\alpha(\pi_{N-1})$ sont (continues et) surjectives, l'application $M_\alpha(\pi) \rightarrow \varprojlim M_\alpha(\pi_N)$ est donc une surjection topologique d'espaces de Fréchet. Montrons qu'elle est injective. Comme $\pi = \cup_{N \geq M} \pi_N$, on a $\pi[\mathbf{n}^\alpha] = \cup_{N \geq M} \pi_N[\mathbf{n}^\alpha]$, et en prenant les duaux une injection $\pi[\mathbf{n}^\alpha]^\vee \hookrightarrow \varprojlim (\pi_N[\mathbf{n}^\alpha]^\vee)$, qui reste une injection en tordant par η et en prenant les invariants sous N_m^α (cf. (14) et (15)). On a donc $M_\alpha(\pi) \xrightarrow{\sim} \varprojlim M_\alpha(\pi_N)$ (isomorphisme topologique de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+). Pour conclure on applique la variante du Lemme 3.2.7 en (ii) de la Remarque 3.2.8 avec $X_N \stackrel{\text{déf}}{=} M_\alpha(\pi_N)$. \square

Soit M une variété localement \mathbb{Q}_p -analytique (strictement) paracompacte de dimension finie et V un E -espace vectoriel localement convexe séparé. Rappelons que le support d'une fonction dans $C^{\text{an}}(M, V)$ ou $C^\infty(M, V)$ est l'adhérence dans M de son lieu de non nullité. On note $C_c^{\text{an}}(M, V)$ (resp. $C_c^\infty(M, V)$) le sous-espace de $C^{\text{an}}(M, V)$ (resp. $C^\infty(M, V)$) des fonctions à support compact.

Lemme 3.2.11. — *Supposons que M admette un recouvrement disjoint par un nombre dénombrable d'ouverts compacts et que V soit un espace de type compact, alors $C_c^{\text{an}}(M, V)$ est naturellement muni d'une topologie localement convexe qui en fait un espace de type compact. De plus l'injection naturelle $C_c^{\text{an}}(M, V) \hookrightarrow C^{\text{an}}(M, V)$ est continue.*

Démonstration. — On a par définition $C_c^{\text{an}}(M, V) = \varinjlim_{\overline{U}} C^{\text{an}}(U, V)$ où la limite inductive est prise sur les ouverts compacts U de M ordonnés par l'inclusion, et on munit $C_c^{\text{an}}(M, V)$ de la topologie limite inductive. Il s'agit de montrer que cela en fait un espace de type compact. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$ un recouvrement dénombrable disjoint de M par des ouverts compacts, alors $W_n \stackrel{\text{déf}}{=} U_1 \amalg U_2 \amalg \cdots \amalg U_n$ est une suite croissante d'ouverts compacts de M dont on vérifie facilement qu'elle est cofinale pour l'inclusion parmi les ouverts compacts de M , de sorte que l'on a un isomorphisme topologique $\varinjlim_n C^{\text{an}}(W_n, V) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{\overline{U}} C^{\text{an}}(U, V)$. Mais $\varinjlim_n C^{\text{an}}(W_n, V) \simeq \bigoplus_{i > 0} C^{\text{an}}(U_i, V)$ avec chaque $C^{\text{an}}(U_i, V)$ de type compact, et son dual topologique est $\prod_{i > 0} C^{\text{an}}(U_i, V)^\vee$ ([57, Prop. 9.10]), qui est un espace de Fréchet (car produit dénombrable d'espaces de Fréchet [9, § II.4.3]) nucléaire ([57, Prop. 19.7(i)]), donc le dual fort d'un espace de type compact ([59, Th. 1.3]) qui est nécessairement $\bigoplus_{i > 0} C^{\text{an}}(U_i, V)$ ([57, Prop. 9.11] et [59, Th. 1.1]). La dernière assertion résulte de la continuité de l'injection $\bigoplus_{i > 0} C^{\text{an}}(U_i, V) \hookrightarrow \prod_{i > 0} C^{\text{an}}(U_i, V)$ ([57, Lem. 5.2(i)]). \square

Soit M une variété localement \mathbb{Q}_p -analytique paracompacte de dimension finie et $C \subseteq M$ un sous-ensemble arbitraire. Rappelons que l'on dispose du sous- E -espace vectoriel $D(M, E)_C$ de $D(M, E)$ formé des distributions à support dans C ([45, Def. 2.1]). En fait, dans notre cas C sera toujours un sous-ensemble fermé de M .

Lorsque C est fermé, la preuve de [45, Lem. 1.2.5] s'étend *verbatim* (il n'y est en fait pas nécessaire de travailler avec un *groupe* analytique p -adique) et montre que $D(M, E)_C$ est un sous-espace fermé de $D(M, E)$ et que, muni de la topologie induite, il s'identifie au dual fort de $C^{\text{an}}(M, E)/C^{\text{an}}(M, E)_{M \setminus C}$ où $C^{\text{an}}(M, E)_{M \setminus C}$ est le sous- E -espace vectoriel fermé de $C^{\text{an}}(M, E)$ (avec topologie induite) des fonctions dont le support est contenu dans l'ouvert $M \setminus C$. Si C est de plus compact, alors la preuve de [45, Lem. 1.2.5] (étendue) montre aussi que $D(M, E)_C$ s'identifie au dual fort de :

$$(42) \quad C_C^\omega(M, E) \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim_U C^{\text{an}}(U, E)$$

où, dans la limite inductive topologique de droite (qui est alors un espace de type compact) U parcourt les ouverts (compacts) de M contenant C et les applications de transition sont les restrictions naturelles.

Si M_1 et M_2 sont deux variétés localement \mathbb{Q}_p -analytiques (paracompactes de dimension finie), rappelons que l'application naturelle $C^{\text{an}}(M_1, E) \otimes_E C^{\text{an}}(M_2, E) \rightarrow C^{\text{an}}(M_1 \times M_2, E)$, $f_1 \otimes f_2 \mapsto ((m_1, m_2) \mapsto f_1(m_1)f_2(m_2))$ induit un isomorphisme topologique ([61, Prop. A.3]) :

$$(43) \quad D(M_1 \times M_2, E) \xrightarrow{\sim} D(M_1, E) \widehat{\otimes}_{E, \iota} D(M_2, E).$$

Lemme 3.2.12. — Soit M_1 et M_2 deux variétés localement \mathbb{Q}_p -analytiques (paracompactes de dimension finie) et $C_i \subseteq M_i$ un sous-ensemble fermé de M_i pour $i \in \{1, 2\}$. Alors l'isomorphisme (43) induit un isomorphisme topologique :

$$D(M_1 \times M_2, E)_{C_1 \times C_2} \xrightarrow{\sim} D(M_1, E)_{C_1} \widehat{\otimes}_{E, \iota} D(M_2, E)_{C_2}.$$

Démonstration. — On commence par se ramener au cas compact. Si $(M_{1,i})_{i \in I}$ est un recouvrement disjoint de M_1 par des ouverts compacts, on a un isomorphisme topologique $C^{\text{an}}(M_1, E) \simeq \prod_{i \in I} C^{\text{an}}(M_{1,i}, E)$ où chaque $C^{\text{an}}(M_{1,i}, E)$ est un espace de type compact. Si $f = (f_i)_{i \in I} \in C^{\text{an}}(M_1, E)$ avec $f_i \in C^{\text{an}}(M_{1,i}, E)$, le support de f est l'union (disjointe) des supports des f_i . En effet, le complémentaire dans M_1 de l'union disjointe de ces supports est ouvert (car union des complémentaires dans chaque $M_{1,i}$ qui est une union d'ouverts de M_1), donc cette union disjointe est fermée. Notant $C_{1,i} \stackrel{\text{déf}}{=} C_1 \cap M_{1,i}$ on en déduit un isomorphisme topologique $C^{\text{an}}(M_1, E)_{M_1 \setminus C_1} \simeq \prod_{i \in I} C^{\text{an}}(M_{1,i}, E)_{M_{1,i} \setminus C_{1,i}}$ puis un deuxième isomorphisme :

$$C^{\text{an}}(M_1, E)/C^{\text{an}}(M_1, E)_{M_1 \setminus C_1} \simeq \prod_{i \in I} (C^{\text{an}}(M_{1,i}, E)/C^{\text{an}}(M_{1,i}, E)_{M_{1,i} \setminus C_{1,i}}).$$

Avec [57, Prop. 9.11] et la discussion précédant ce lemme, on en déduit :

$$(44) \quad D(M_1, E)_{C_1} \simeq \bigoplus_{i \in I} D(M_{1,i}, E)_{C_{1,i}}.$$

Soit $(M_{2,j})_{j \in J}$ un recouvrement disjoint de M_2 par des ouverts compacts, on a un isomorphisme analogue à (44) avec M_2 , C_2 , $(M_{2,j})_{j \in J}$ et $(C_{2,j} \stackrel{\text{déf}}{=} C_2 \cap M_{2,j})_{j \in J}$. On

en déduit :

$$(45) \quad D(M_1, E)_{C_1} \widehat{\otimes}_{E, \iota} D(M_2, E)_{C_2} \simeq \left(\bigoplus_{i \in I} D(M_{1,i}, E)_{C_{1,i}} \right) \widehat{\otimes}_{E, \iota} \left(\bigoplus_{j \in J} D(M_{2,j}, E)_{C_{2,j}} \right) \\ \simeq \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} D(M_{1,i}, E)_{C_{1,i}} \widehat{\otimes}_{E, \iota} D(M_{2,j}, E)_{C_{2,j}}$$

où le deuxième isomorphisme résulte de l'argument à la fin de la preuve de [61, Prop. A.3]. Par ailleurs, le même argument que pour démontrer (44) mais avec $M_1 \times M_2$ au lieu de M_1 et $C_1 \times C_2$ au lieu de C_1 donne un isomorphisme topologique :

$$(46) \quad D(M_1 \times M_2, E)_{C_1 \times C_2} \simeq \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} D(M_{1,i} \times M_{2,j}, E)_{C_{1,i} \times C_{2,j}}.$$

Comparant (45) et (46), on voit que l'on est ramené au cas où M_1 , M_2 , C_1 et C_2 sont compacts.

En utilisant la compacité de $C_1 \times C_2$ dans la variété paracompacte $M_1 \times M_2$, on vérifie que les ouverts de la forme $U_1 \times U_2$ pour U_1 ouvert compact de M_1 contenant C_1 et U_2 ouvert compact de M_2 contenant C_2 sont cofinaux dans les ouverts compacts de $M_1 \times M_2$ contenant $C_1 \times C_2$. Par la discussion précédant ce lemme et par la version duale de [57, Prop. 20.13], il suffit alors de montrer que l'on a un isomorphisme d'espaces de type compact :

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_1 \times U_2}} C^{\text{an}}(U_1 \times U_2, E) \simeq \left(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_1}} C^{\text{an}}(U_1, E) \right) \widehat{\otimes}_E \left(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_2}} C^{\text{an}}(U_2, E) \right)$$

où U_1 , resp. U_2 parcourt les ouverts compacts de M_1 , resp. M_2 contenant C_1 , resp. C_2 . On a un isomorphisme topologique par [61, Lem. A.1 & Prop. A.2] :

$$(47) \quad \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_1 \times U_2}} C^{\text{an}}(U_1 \times U_2, E) \simeq \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_1 \times U_2}} \left(C^{\text{an}}(U_1, E) \widehat{\otimes}_E C^{\text{an}}(U_2, E) \right),$$

il suffit donc de montrer que l'on a un isomorphisme topologique :

$$\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_1 \times U_2}} \left(C^{\text{an}}(U_1, E) \widehat{\otimes}_E C^{\text{an}}(U_2, E) \right) \simeq \left(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_1}} C^{\text{an}}(U_1, E) \right) \widehat{\otimes}_E \left(\lim_{\substack{\longrightarrow \\ U_2}} C^{\text{an}}(U_2, E) \right).$$

Mais cela découle de [46, Prop. 1.2(2)] et de la preuve de [46, Prop. 1.2(3)]. Plus précisément, le point clef dans la preuve de [46, Prop. 1.2(3)] est que $\varinjlim (V_i \widehat{\otimes}_{K, \iota} W_i)$ (avec les notations de *loc.cit.*) est complet, ce qui est automatique ici puisqu'on l'applique à $\varinjlim (C^{\text{an}}(U_1, E) \widehat{\otimes}_E C^{\text{an}}(U_2, E))$ qui est complet car de type compact par (47) (car $\varinjlim C^{\text{an}}(U_1 \times U_2, E)$ l'est). Cela achève la preuve du lemme. \square

3.3. Le cas localement algébrique. — En utilisant des résultats de Bernstein-Zelevinsky ([7, § 3.5]), on explicite le foncteur F_α appliqué à une représentation localement algébrique de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Si $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow E^\times$ est un caractère continu et $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$, on note $\mathcal{R}_E^+(\delta) = \mathcal{R}_E^+ e$ (resp. $\mathcal{R}_E^r(\delta) = \mathcal{R}_E^r e$) avec $\varphi(e) = \delta(p)e$ et $\gamma(e) = \delta(\varepsilon(\gamma))e$ (cf. [44, Not. 6.2.2]), et $\mathcal{R}_E(\delta)$ l'extension des scalaires à \mathcal{R}_E . Si $\lambda \in X(T)$, on note :

$$(48) \quad \chi_\lambda : \text{Gal}(E_\infty/E) \longrightarrow E^\times, g \longmapsto \lambda(t_g)$$

où $t_g \in T(\mathbb{Q}_p)$ est comme dans la preuve du (i) du Lemme 2.3.2 (en fait χ_λ est une puissance entière du caractère cyclotomique restreint à $\text{Gal}(E_\infty/E)$). L'objectif de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant.

Théorème 3.3.1. — *Soit $\pi = L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty$ où $\lambda \in X(T)$ est dominant par rapport à B^- et π^∞ est une représentation lisse de longueur finie de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E , et soit $d_{\pi^\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} \dim_{E_\infty}(\pi^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N(\mathbb{Q}_p)}$. Alors on a un isomorphisme dans $F(\varphi, \Gamma)_\infty$:*

$$F_\alpha(\pi) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)} \left(\left(\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee}) / (t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}) \right)^{\oplus d_{\pi^\infty}}, - \right).$$

Avant de démontrer le Théorème 3.3.1, on a besoin de plusieurs préliminaires.

On note P_2 le sous-groupe de $G(\mathbb{Q}_p)$ engendré par $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Q}_p^\times)$ et $N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$. Il est isomorphe au sous-groupe $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (la notation P_2 est celle de [7]). Pour $m \geq 0$ on note $P_{2,m}$ le sous-groupe ouvert compact de P_2 engendré par $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p^\times)$ et $N_{\alpha,m} \stackrel{\text{déf}}{=} N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m$, que l'on peut identifier à $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \frac{1}{p^m} \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans P_2 . On note \widehat{E} le complété p -adique d'une clôture algébrique \overline{E} de E contenant E_∞ (le corps \widehat{E} n'est pas sphériquement complet, mais cela ne sera pas un problème dans ce paragraphe). On pose $W^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} \{f : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \widehat{E}, f \text{ loc. const. à support compact}\}$ muni de l'action lisse de P_2 définie par $\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f\right)(z) = f(zx)$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f\right)(z) = \eta(yz)f(z)$ pour $(x, y) \in \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p$ et $z \in \mathbb{Q}_p^\times$. Appelons E -structure d'une représentation lisse τ d'un groupe topologique sur \widehat{E} tout sous- E -espace vectoriel τ_E de τ stable par l'action du groupe tel que $\tau_E \otimes_E \widehat{E} \xrightarrow{\sim} \tau$. Si π est une représentation lisse d'un groupe topologique H sur un corps K et $H' \subseteq H$ est un sous-ensemble, on note $\pi(H') \subseteq \pi$ le sous- K -espace vectoriel engendré par $h'v - v$ pour $h' \in H'$ et $v \in \pi$.

Lemme 3.3.2. — *La représentation W^∞ est irréductible et admet une unique E -structure W_E^∞ à multiplication près par un scalaire dans \widehat{E}^\times .*

Démonstration. — Toute représentation lisse irréductible générique τ_E de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E est telle que :

$$\ker \left(\tau_E \rightarrow (\tau_E) \Big|_{\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right) \Big|_{P_2} \otimes_E \widehat{E} \simeq W^\infty$$

par [7, § 3.5], de sorte que $\ker(\tau_E \rightarrow (\tau_E) \Big|_{\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}})$ est une E -structure de W^∞ . On vérifie facilement par ailleurs que $W^\infty(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}} = \widehat{E} \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p^\times}$. Si τ_E est une E -structure sur W^∞ , par irréductibilité τ_E est engendrée dans W^∞ (sur E et sous l'action de

P_2) par l'un quelconque de ses vecteurs non nuls, par exemple un vecteur de base du E -espace de dimension un $\tau_E(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}}$. Comme $\tau_E(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}} \otimes_E \widehat{E} \xrightarrow{\sim} W^\infty(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}}$, tous ces vecteurs de base pour toutes les E -structures τ_E sont des multiples les uns des autres par des scalaires dans \widehat{E}^\times , d'où le résultat. \square

Notons P_2^+ le sous-monoïde de P_2 engendré par $\lambda_{\alpha^\vee}(p)$ et $P_{2,0}$, ou de manière équivalente par $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ et $N_{\alpha,0}$, que l'on peut identifier à $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \mathbb{Z}_p)$ dans P_2 . Soit $V_E^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} W_E^\infty(N_{\alpha,1}) \subseteq W_E^\infty$ et $V^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} V_E^\infty \otimes_E \widehat{E}$, en écrivant $W^\infty = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} C^\infty(p^m \mathbb{Z}_p^\times, \widehat{E})$, on vérifie que $V^\infty = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} C^\infty(\frac{1}{p^m} \mathbb{Z}_p^\times, \widehat{E})$. De plus V_E^∞ est une sous- P_2^+ -représentation de W_E^∞ telle que $\dim_E V_E^\infty{}^{P_{2,0}} = 1$ avec $V_E^\infty{}^{P_{2,0}} \otimes_E \widehat{E} = V^\infty{}^{P_{2,0}} = \widehat{E} \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p^\times} \subseteq W^\infty$ (cf. la preuve du Lemme 3.3.2). Enfin V_E^∞ est engendré sous l'action (itérée) de $\lambda_{\alpha^\vee}(p) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par $V_E^\infty{}^{N_{\alpha,0}}$ car c'est le cas de V^∞ (puisque $V^\infty{}^{N_{\alpha,0}} = C^\infty(\mathbb{Z}_p^\times, \widehat{E})$) et car $V_E^\infty{}^{N_{\alpha,0}} \otimes_E \widehat{E} \simeq V^\infty{}^{N_{\alpha,0}}$ (en effet, si \widetilde{V}_E^∞ désigne le sous-espace de V_E^∞ engendrée par $V_E^\infty{}^{N_{\alpha,0}}$ sous $\lambda_{\alpha^\vee}(p)$, l'inclusion $\widetilde{V}_E^\infty \subseteq V_E^\infty$ devient un isomorphisme après extension des scalaires à \widehat{E} , donc est déjà un isomorphisme (sinon, considérer son conoyau)). On note U_E^∞ la sous- P_2^+ -représentation de V_E^∞ engendrée par $V_E^\infty{}^{P_{2,0}}$ et $U^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} U_E^\infty \otimes_E \widehat{E}$.

Lemme 3.3.3. — *Soit N_E^∞ une représentation de P_2^+ sur un E -espace vectoriel de dimension dénombrable telle que l'action de $P_{2,0}$ est lisse et celle de $\lambda_{\alpha^\vee}(p)$ nilpotente. Alors la représentation N_E^∞ est localement finie, i.e. on a $N_E^\infty = \varinjlim_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N_n^\infty$ pour des sous- P_2^+ -représentations N_n^∞ croissantes de dimension finie sur E .*

Démonstration. — Il suffit de montrer que pour tout $v \in N_E^\infty$ (non nul) le E -espace vectoriel $\langle P_2^+ v \rangle$ engendré par v sous P_2^+ est de dimension finie. Quitte à agrandir E , on se ramène facilement au cas où $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \chi(a)v$ pour tout $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ et un caractère lisse $\chi : \mathbb{Z}_p^\times \rightarrow E$. Soit $M \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $\begin{pmatrix} p^M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = 0$ et $\begin{pmatrix} 1 & p^M \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = v$, on a alors :

$$(49) \quad \langle P_2^+ v \rangle = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{i=0}^{p^{m+M}-1} E \begin{pmatrix} p^m & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$$

qui est en particulier de dimension finie. En effet, on a $\begin{pmatrix} p^N & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($b \in \mathbb{Z}_p$), d'où $\begin{pmatrix} p^N & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = 0$ si $N \geq M$. Si $0 \leq N < M$ et $b = i + p^{M+N}x$ avec $0 \leq i \leq p^{M+N} - 1$ et $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $\begin{pmatrix} p^N & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^N & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p^M x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} p^N & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} p^N & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$. On en déduit (49). \square

En utilisant l'action explicite de P_2^+ sur V^∞ , il est facile de vérifier que $\lambda_{\alpha^\vee}(p)$ est nilpotent sur la P_2^+ -représentation V^∞/U^∞ , donc la P_2^+ -représentation V_E^∞/U_E^∞ vérifie les hypothèses du Lemme 3.3.3. Par ailleurs, en utilisant le fait que

$\lambda_{\alpha^\vee}(p)$ est injectif sur V^∞ et nilpotent sur V^∞/U^∞ , on en déduit que V^∞ est indécomposable (réductible) comme P_2^+ -représentation (considérer une décomposition P_2^+ -équivariante $V^\infty = S_1 \oplus S_2$ et remarquer que le vecteur $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}_p^\times} \in V^{\infty P_2,0}$ est forcément soit dans S_1 soit dans S_2 puisque $\dim_{\widehat{E}} V^{\infty P_2,0} = 1$).

Soit Y_E^∞ une représentation lisse de P_2^+ sur un E -espace vectoriel de dimension dénombrable, l'action diagonale de P_2^+ sur $Y_E \stackrel{\text{déf}}{=} L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E Y_E^\infty$ (pour λ comme dans le Théorème 3.3.1, P_α comme au § 2.1 et en remarquant que $P_2 \subseteq L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$) avec la topologie localement convexe la plus fine permet de munir le dual algébrique $Y_E^\vee \simeq L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E Y_E^{\infty \vee}$ d'une structure de (ψ, Γ) -module sur \mathcal{R}_E^+ exactement comme au début du § 2.3. On définit alors les foncteurs $F_{\alpha,m}(Y_E)$ pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de la catégorie abélienne des (φ, Γ) -modules généralisés T sur \mathcal{R}_E à valeurs dans les E_m -espaces vectoriels comme en (31), c'est-à-dire avec les notations de *loc.cit.* :

$$F_{\alpha,m}(Y_E)(T) \stackrel{\text{déf}}{=} \varinjlim_{(r,f_r,T_r) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi,\Gamma}((Y_E)^\vee \otimes_E E_m, T_r \otimes_E E_m).$$

Lemme 3.3.4. — Soit N_E^∞ comme dans le Lemme 3.3.3 et $N_E \stackrel{\text{déf}}{=} L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E N_E^\infty$. Alors on a $F_{\alpha,m}(N_E) = 0$ pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Démonstration. — Soit N_n^∞ comme dans le Lemme 3.3.3 et $N_n \stackrel{\text{déf}}{=} L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E N_n^\infty$, on a $N_E^\vee \simeq \varprojlim_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} N_n^\vee$. De plus $(M_n \stackrel{\text{déf}}{=} \ker(N_E^\vee \rightarrow N_n^\vee))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ est un système de voisinages ouverts de 0 dans N_E^\vee stables par (ψ, Γ) . Pour montrer que $F_{\alpha,m}(N_E) = 0$, il faut montrer que tout morphisme continu E -linéaire $f : N_E^\vee \rightarrow T_r \otimes_E E_m$ commutant à ψ et Γ devient nul dans $T_{r'} \otimes_E E_m$ pour $r' \gg r$.

Par le Lemme 3.2.7 on a $f|_{M_n} = 0$ pour $n \gg 0$, i.e. f se factorise par le quotient N_n^\vee de N_E^\vee . Comme N_n^\vee est le dual d'une représentation localement algébrique de dimension finie de $(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$, on en déduit facilement qu'il existe $M \gg 0$ tel que $((1+X)^{p^M} - 1)^M f = f \circ ((1+X)^{p^M} - 1)^M = 0$. En prenant $r' \gg r$ tel que $(1+X)^{p^M} - 1$ est inversible dans $\mathcal{R}_E^{r'}$ (i.e. tel que les zéros du polynôme $(1+X)^{p^M} - 1$ ne sont plus dans la couronne $p^{-1/r'} \leq |\cdot| < 1$), on voit que le morphisme f devient nul dans $T_{r'} \otimes_E E_m$. \square

On note $U_E \stackrel{\text{déf}}{=} L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E U_E^\infty \subseteq V_E \stackrel{\text{déf}}{=} L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E V_E^\infty \subseteq W_E \stackrel{\text{déf}}{=} L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E W_E^\infty$ que l'on munit de la topologie localement convexe la plus fine.

Lemme 3.3.5. — (i) On a $F_{\alpha,m}(U_E) \xrightarrow{\sim} F_{\alpha,m}(V_E) \xrightarrow{\sim} F_{\alpha,m}(W_E)$ pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
(ii) Pour tout (φ, Γ) -module généralisé T sur \mathcal{R}_E on a pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$F_{\alpha,m}(W_E)(T) = E_m \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi,\Gamma)}(\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee})/(t^{1-(\lambda,\alpha^\vee)}), T).$$

Démonstration. — (i) On a des suites exactes de foncteurs $0 \rightarrow F_{\alpha,m}(V_E) \rightarrow F_{\alpha,m}(W_E) \rightarrow F_{\alpha,m}(W_E/V_E)$ et $0 \rightarrow F_{\alpha,m}(U_E) \rightarrow F_{\alpha,m}(V_E) \rightarrow F_{\alpha,m}(V_E/U_E)$. Il suffit donc de montrer $F_{\alpha,m}(W_E/V_E) = 0$ et $F_{\alpha,m}(V_E/U_E) = 0$. On a que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Id}$ agit par 0 sur $W_E^\infty/V_E^\infty = (W_E^\infty)_{N_{\alpha,1}}$ et on vérifie facilement que $(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Id})^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}$ agit par 0 sur la représentation algébrique $L(-\lambda)_{P_\alpha}$. Cela implique que $X^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}$ agit par 0 sur $(W_E/V_E)^\vee$, et comme X est inversible sur T_r on en déduit $F_{\alpha,m}(W_E/V_E) = 0$. Enfin on a $F_{\alpha,m}(V_E/U_E) = 0$ par le Lemme 3.3.4.

(ii) Soit $\text{St}_2^\infty = (\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty/1$ la représentation de Steinberg lisse de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E où B^- est le sous-groupe des matrices triangulaires inférieures, on a un isomorphisme de P_2 -représentation $\text{St}_2^\infty|_{P_2} \simeq C_c^\infty(\mathbb{Q}_p, E)$ où l'espace de droite est muni de l'action de P_2 donnée par $(f \in C_c^\infty(\mathbb{Q}_p, E), z, y \in \mathbb{Q}_p, x \in \mathbb{Q}_p^\times)$:

$$(50) \quad \left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \right)(z) = f(z+y) \quad \text{et} \quad \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f \right)(z) = f\left(\frac{z}{x}\right).$$

Par le début de la preuve du Lemme 3.3.2 (utilisant [7, § 3.5]), on a une suite exacte de représentations lisses de P_2 sur E :

$$(51) \quad 0 \longrightarrow W_E^\infty \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{Q}_p, E) \longrightarrow (\text{St}_2^\infty)_{\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \longrightarrow 0$$

et par l'argument au début de la preuve du (i) (avec $L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E (\text{St}_2^\infty)_{\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ au lieu de W_E/V_E), on en déduit $F_{\alpha,m}(W_E) \xrightarrow{\sim} F_{\alpha,m}(L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E C_c^\infty(\mathbb{Q}_p, E))$.

Le sous-espace $C^\infty(\mathbb{Z}_p, E)$ de $C_c^\infty(\mathbb{Q}_p, E)$ est stable par P_2^+ , on peut donc définir $F_{\alpha,m}(L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E C^\infty(\mathbb{Z}_p, E))$ et on a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow F_{\alpha,m}(L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E C^\infty(\mathbb{Z}_p, E)) \longrightarrow F_{\alpha,m}(L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E C_c^\infty(\mathbb{Q}_p, E)) \longrightarrow F_{\alpha,m}(L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E \pi_0^\infty)$$

où $\pi_0^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} C_c^\infty(\mathbb{Q}_p, E)/C^\infty(\mathbb{Z}_p, E) \simeq \bigoplus_{m' \geq 1} C^\infty(\frac{1}{p^{m'}} \mathbb{Z}_p^\times, E)$. Montrons que tout morphisme E -linéaire continu $f : L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E (\pi_0^\infty)^\vee \rightarrow T_r \otimes_E E_m$ commutant à ψ et Γ devient nul dans $T_{r'} \otimes_E E_m$ pour $r' \gg r$. On a $L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E (\pi_0^\infty)^\vee \simeq \prod_{n \geq 1} M_n$ où $M_n \stackrel{\text{déf}}{=} L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E C^\infty(\frac{1}{p^n} \mathbb{Z}_p^\times, E)^\vee$ et l'opérateur ψ sur $L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E (\pi_0^\infty)^\vee$ envoie M_n dans M_{n+1} . En posant $X_N \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{N \geq n \geq 1} M_n$, que l'on voit comme quotient de $\prod_{n \geq 1} M_n$ avec la structure induite de ψ -module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ , on a $\prod_{n \geq 1} M_n \simeq \varprojlim X_N$ (comme ψ -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+) et le Lemme 3.2.7 donne que f se factorise par $X_{n'}$ pour $n' \gg 0$. Comme ψ envoie M_n dans M_{n+1} , il existe $N \gg 0$ tel que $\psi^N = 0$ sur $X_{n'}$. Par l'analogie du diagramme commutatif (32) où φ, ψ sont remplacés par respectivement φ^N, ψ^N et pr par $p^N r$ (cf. aussi (148) et (149) ci-dessous), on obtient que la composée :

$$L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E (\pi_0^\infty)^\vee \xrightarrow{f} T_r \otimes_E E_m \longrightarrow T_{p^N r} \otimes_E E_m$$

est nulle, d'où on déduit $F_{\alpha,m}(L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E \pi_0^\infty) = 0$ et donc $F_{\alpha,m}(L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E C^\infty(\mathbb{Z}_p, E)) \xrightarrow{\sim} F_{\alpha,m}(L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E C_c^\infty(\mathbb{Q}_p, E))$.

Maintenant, $L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E C^\infty(\mathbb{Z}_p, E)$ s'identifie aux fonctions localement algébriques sur \mathbb{Z}_p de degré (local) au plus $-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ avec action de P_2^+ induite par (50) et tordue par le caractère $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (-\lambda)(\lambda_{\alpha^\vee}(x))$ de $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, dans l'isomorphisme $D(\mathbb{Z}_p, E) = C^{\text{an}}(\mathbb{Z}_p, E)^\vee \simeq \mathcal{R}_E^+$ du début du § 2.3, la dérivation dans $C^{\text{an}}(\mathbb{Z}_p, E)$ induit (en dualisant) la multiplication par t sur \mathcal{R}_E^+ . On en déduit que le sous-espace fermé de $C^{\text{an}}(\mathbb{Z}_p, E)$ des fonctions localement algébriques sur \mathbb{Z}_p de degré au plus $-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$, i.e. le noyau de la dérivation $(-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle + 1)$ -ième, a pour dual $\mathcal{R}_E^+/(t^{-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle + 1})$, d'où on déduit un isomorphisme $L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E C^\infty(\mathbb{Z}_p, E)^\vee \simeq \mathcal{R}_E^+((-\lambda) \circ \lambda_{\alpha^\vee}^{-1})/(t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}) \simeq \mathcal{R}_E^+(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee})/(t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle})$ qui commute à ψ et Γ . Avec les (iv) et (v) de la Remarque 2.3.1 on obtient $F_{\alpha,m}(L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E C^\infty(\mathbb{Z}_p, E)) = E_m \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee})/(t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}), -)$, d'où le résultat par les deux paragraphes d'avant. \square

On démontre maintenant le Théorème 3.3.1.

Étape 1

On fixe $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On a des isomorphismes $L(-\lambda)[\mathfrak{n}^\alpha] \simeq L(-\lambda)_{P_\alpha}$ (cf. § 3.1) et $\pi[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \simeq L(-\lambda)_{P_\alpha} \otimes_E \pi^\infty(\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$. On note π_α^∞ la sous- P_2 -représentation de $\pi^\infty|_{P_2}$ noyau de la surjection naturelle $\pi^\infty \twoheadrightarrow (\pi^\infty)_{N_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ et on rappelle que $(\pi^\infty \otimes_E E_m)(\eta^{-1})(N_m^\alpha)$ s'identifie à la sous- P_2^+ -représentation de $\pi^\infty \otimes_E E_m$ engendrée par les $yv - \eta(y)v$ pour $y \in N_m^\alpha$, $v \in \pi^\infty \otimes_E E_m$. On pose :

$$\pi_{\alpha,m}^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} (\pi_\alpha^\infty \otimes_E E_m) / ((\pi_\alpha^\infty \otimes_E E_m) \cap (\pi^\infty \otimes_E E_m)(\eta^{-1})(N_m^\alpha)).$$

On a donc une suite exacte de P_2^+ -représentations :

$$0 \longrightarrow \pi_{\alpha,m}^\infty \longrightarrow (\pi^\infty \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \longrightarrow Q_m \longrightarrow 0$$

où Q_m est un quotient stable par P_2^+ de $(\pi^\infty)_{N_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \otimes_E E_m$. La multiplication par X est nulle sur Q_m^\vee (car elle est nulle sur $((\pi^\infty)_{N_\alpha(\mathbb{Q}_p)})^\vee \otimes_E E_m$), donc il existe $M \gg 0$ tel que la multiplication par X^M sur $L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E Q_m^\vee$ est nulle. Cela implique que tout morphisme $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire continu $L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E Q_m^\vee \rightarrow T_r \otimes_E E_m$ commutant à ψ et Γ (pour T_r un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^+) est nul. On en déduit :

$$(52) \quad F_\alpha(\pi)(T) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{(r, f_r, T_r) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi, \Gamma} (L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E (\pi_{\alpha,m}^\infty)^\vee, T_r \otimes_E E_m).$$

Étape 2

On montre que l'on a un isomorphisme de P_2 -représentations $\pi_\alpha^\infty \simeq \bigoplus_{\iota \in I} W_E^\infty$ où I est un ensemble dénombrable d'indices. La représentation $\tau \stackrel{\text{déf}}{=} \pi^\infty|_{P_2} \otimes_E \widehat{E}$ de P_2 étant lisse, on peut lui appliquer les résultats de [7, § 3.5] pour $n = 2$ (les résultats de *loc.cit.* sont sur \mathbb{C} , mais la topologie de \mathbb{C} n'est pas utilisée et ils restent donc

valables sur le corps algébriquement clos \widehat{E}). En particulier on en déduit une suite exacte P_2 -équivariante :

$$0 \longrightarrow \tau(\eta^{-1})_{N_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \otimes_{\widehat{E}} W^\infty \longrightarrow \tau \longrightarrow \tau_{N_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \longrightarrow 0$$

où l'action de P_2 est triviale sur $\tau(\eta^{-1})_{N_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$. Comme π^∞ est de dimension dénombrable sur E (car π^∞ est admissible), c'est *a fortiori* le cas de $\tau(\eta^{-1})_{N_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ sur \widehat{E} , et on a donc un isomorphisme P_2 -équivariant $\pi_\alpha^\infty \otimes_E \widehat{E} \simeq \bigoplus_{\iota \in I} W^\infty$ avec I dénombrable. Pour $\iota \in I$ choisissons une base v_ι du \widehat{E} -espace vectoriel de dimension un $W^\infty(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}}$ (cf. la preuve du Lemme 3.3.2, on prend ici la “copie ι ” de W^∞), on a :

$$(53) \quad (\pi_\alpha^\infty \otimes_E \widehat{E})(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}} = \pi_\alpha^\infty(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}} \otimes_E \widehat{E} \simeq \bigoplus_{\iota \in I} \widehat{E}v_\iota.$$

Quitte à changer la base v_ι et la décomposition $\pi_\alpha^\infty \otimes_E \widehat{E} \simeq \bigoplus_{\iota \in I} W^\infty$ en conséquence (rappelons que la P_2 -représentation irréductible W^∞ est engendrée par $W^\infty(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}}$), (53) montre que l'on peut supposer $v_\iota \in \pi_\alpha^\infty(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}}$, i.e. $\pi_\alpha^\infty(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}} = \bigoplus_{\iota \in I} E v_\iota$. Mais la P_2 -représentation π_α^∞ est engendrée par $\pi_\alpha^\infty(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}}$: en effet, si $\widetilde{\pi}_\alpha^\infty$ désigne la sous- P_2 -représentation de π_α^∞ engendrée par $\pi_\alpha^\infty(N_{\alpha,1})^{P_{2,0}}$ sur E , l'inclusion $\widetilde{\pi}_\alpha^\infty \subseteq \pi_\alpha^\infty$ devient un isomorphisme après extension des scalaires à \widehat{E} (utiliser (53)), donc est déjà un isomorphisme. Donc π_α^∞ est engendré sur E sous l'action de P_2 par le sous- E -espace vectoriel $\bigoplus_{\iota \in I} E v_\iota$ de $\bigoplus_{\iota \in I} W^\infty$, ce qui montre par le Lemme 3.3.2 (et sa preuve) que l'on a un isomorphisme de P_2 -représentations $\pi_\alpha^\infty \simeq \bigoplus_{\iota \in I} W_E^\infty$.

Étape 3

On montre que l'on a un isomorphisme de P_2 -représentations $\lim_{m \rightarrow +\infty} \pi_{\alpha,m}^\infty \simeq (W_E^\infty \otimes_E E_\infty)^{\oplus d_{\pi^\infty}}$ où l'action de P_2 sur $\lim_{m \rightarrow +\infty} \pi_{\alpha,m}^\infty$ est donnée par l'action sur le terme de droite dans l'isomorphisme (que l'on vérifie facilement) :

$$(54) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \pi_{\alpha,m}^\infty \simeq (\pi_\alpha^\infty \otimes_E E_\infty) / ((\pi_\alpha^\infty \otimes_E E_\infty) \cap (\pi^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})(N^\alpha(\mathbb{Q}_p))).$$

Appliquant les résultats de [7, § 3.5] à la représentation lisse $(\pi^\infty \otimes_E \widehat{E})(\eta^{-1})_{N^\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ de P_2 sur \widehat{E} et notant pour abrégé $Q \stackrel{\text{déf}}{=} ((\pi^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N^\alpha(\mathbb{Q}_p)})_{N_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$, on déduit à partir des définitions un diagramme commutatif de représentations lisses de P_2 sur E_∞ où toutes les flèches sont surjectives :

$$(55) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi_\alpha^\infty \otimes_E E_\infty & \longrightarrow & \pi^\infty \otimes_E E_\infty & \longrightarrow & (\pi^\infty \otimes_E E_\infty)_{N_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \sigma & \longrightarrow & (\pi^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N^\alpha(\mathbb{Q}_p)} & \longrightarrow & Q \longrightarrow 0 \end{array}$$

et où $\sigma \otimes_{E_\infty} \widehat{E} \simeq (W^\infty)^{d_{\pi^\infty}}$. Par des considérations analogues à celles de l'Étape 2 en remplaçant E par E_∞ et π_α^∞ par σ on obtient un isomorphisme $\sigma \simeq (W_E^\infty \otimes_E E_\infty)^{d_{\pi^\infty}}$.

On voit donc que l'image de $\pi_\alpha^\infty \otimes_E E_\infty$ dans $(\pi_\alpha^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N^\alpha(\mathbb{Q}_p)}$, i.e. le terme de droite en (54), s'identifie à $(W^\infty)^{d_{\pi^\infty}}$. Avec (54), cela donne le résultat voulu.

Étape 4

Pour $m \geq 1$ le groupe $N_{\alpha,1}$ agit sur $\pi_{\alpha,m}^\infty$, de sorte que l'on peut considérer la sous- P_2^+ -représentation $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1}) \subseteq \pi_{\alpha,m}^\infty$. C'est aussi l'image de $\pi_\alpha^\infty(N_{\alpha,1}) \otimes_E E_m$ dans le quotient $\pi_{\alpha,m}^\infty$ de $\pi_\alpha^\infty \otimes_E E_m$. On déduit des résultats de l'Étape 3 que l'on a un isomorphisme P_2^+ -équivariant $\lim_{m \rightarrow +\infty} \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1}) \simeq (V_E^\infty \otimes_E E_\infty)^{\oplus d_{\pi^\infty}}$ où les flèches de transition à gauche induisent des surjections $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1}) \otimes_{E_m} E_{m+1} \twoheadrightarrow \pi_{\alpha,m+1}^\infty(N_{\alpha,1})$. En utilisant le résultat de l'Étape 3 (avec l'irréductibilité de la P_2 -représentation W_E^∞), on voit qu'il existe donc $m_0 \gg 1$ et un plongement P_2^+ -équivariant $j_{m_0} : (V_E^\infty \otimes_E E_{m_0})^{d_{\pi^\infty}} \hookrightarrow \pi_{\alpha,m_0}^\infty(N_{\alpha,1})$ tels que la composée :

$$(V_E^\infty \otimes_E E_{m_0})^{d_{\pi^\infty}} \otimes_{E_{m_0}} E_\infty \xrightarrow{j_{m_0}} \pi_{\alpha,m_0}^\infty(N_{\alpha,1}) \otimes_{E_{m_0}} E_\infty \twoheadrightarrow (V_E^\infty \otimes_E E_\infty)^{\oplus d_{\pi^\infty}}$$

est un isomorphisme.

Pour $m \geq m_0$ soit $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})_{\text{nilp}} \subseteq \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})$ le sous- E_m -espace vectoriel où $\lambda_{\alpha^\vee}(p)$ est nilpotent. Il est stable par P_2^+ , et donne donc une représentation de P_2^+ comme dans le Lemme 3.3.3 (avec E_m au lieu de E). Par l'Étape 2 on a un isomorphisme P_2^+ -équivariant $\pi_\alpha^\infty(N_{\alpha,1}) \simeq \bigoplus_{\iota \in I} V_E^\infty$. Comme $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})$ est engendré sous l'action de $\lambda_{\alpha^\vee}(p)$ par les invariants $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})^{N_{\alpha,0}}$ (car c'est le cas de $V_E^\infty \otimes_E E_m$), le sous- E_m -espace vectoriel de $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})$ engendré sous l'action de $\lambda_{\alpha^\vee}(p)$ par un supplémentaire stable par $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p^\times)$ de $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})_{\text{nilp}}^{N_{\alpha,0}}$ dans $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})^{N_{\alpha,0}}$ fournit un supplémentaire stable par P_2^+ de $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})_{\text{nilp}}$ dans $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})$ dont on vérifie facilement qu'il est une somme directe (dénombrable) de représentations $V_E^\infty \otimes_E E_m$ (utiliser que l'image d'un facteur direct $V_E^\infty \otimes_E E_m$ de $\pi_\alpha^\infty(N_{\alpha,1}) \otimes_E E_m$ dans $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})/\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})_{\text{nilp}}$ est soit nulle soit $V_E^\infty \otimes_E E_m$). Autrement dit on a $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1}) \simeq (\pi_{\alpha,m}^\infty)_{\text{nilp}} \oplus (\bigoplus_J (V_E^\infty \otimes_E E_m))$ avec J dénombrable. Par ailleurs, la composée :

$$\begin{aligned} (V_E^\infty \otimes_E E_{m_0})^{d_{\pi^\infty}} \otimes_{E_{m_0}} E_m &\xrightarrow{j_{m_0} \otimes \text{Id}} \pi_{\alpha,m_0}^\infty(N_{\alpha,1}) \otimes_{E_{m_0}} E_m \twoheadrightarrow \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1}) \\ &\twoheadrightarrow \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})/\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})_{\text{nilp}} \simeq \bigoplus_J (V_E^\infty \otimes_E E_m) \end{aligned}$$

est injective (car $\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})_{\text{nilp}}$ s'envoie sur 0 dans $(V_E^\infty \otimes_E E_\infty)^{\oplus d_{\pi^\infty}}$) et on vérifie facilement en utilisant le fait que V_E^∞ est indécomposable sous l'action de P_2^+ que son image est nécessairement un facteur direct $(V_E^\infty \otimes_E E_m)^{d_{\pi^\infty}}$ de $\bigoplus_J (V_E^\infty \otimes_E E_m)$ (quitte à modifier cette décomposition). On peut donc finalement écrire :

$$(56) \quad \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1}) \simeq \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})_{\text{nilp}} \oplus (V_E^\infty \otimes_E E_m)^{d_{\pi^\infty}} \oplus (\bigoplus_{J'} (V_E^\infty \otimes_E E_m))$$

avec J' dénombrable et la composée $(V_E^\infty \otimes_E E_m)^{d_{\pi^\infty}} \otimes_{E_m} E_\infty \hookrightarrow \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1}) \otimes_{E_m} E_\infty \twoheadrightarrow (V_E^\infty \otimes_E E_\infty)^{\oplus d_{\pi^\infty}}$ bijective.

Étape 5

Puisque $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{Id}$ annule $\pi_{\alpha,m}^\infty/\pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})$, on en déduit pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ un

isomorphisme comme dans la preuve du (i) du Lemme 3.3.5 :

$$(57) \quad \varinjlim_{(r,f_r,T_r) \in I(T)} \mathrm{Hom}_{\psi,\Gamma} \left(L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})^\vee, T_r \otimes_E E_m \right) \\ \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(r,f_r,T_r) \in I(T)} \mathrm{Hom}_{\psi,\Gamma} \left(L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E (\pi_{\alpha,m}^\infty)^\vee, T_r \otimes_E E_m \right).$$

Considérons pour $m \geq m_0$ un morphisme $f : L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})^\vee \rightarrow T_r \otimes_E E_m$ continu, $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire et commutant à ψ et Γ . Une fois fixée une décomposition comme en (56), le morphisme f induit $f_{\mathrm{nilp}} : L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})_{\mathrm{nilp}}^\vee \rightarrow T_r \otimes_E E_m$ et $f_{\mathrm{libre}} : L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \left((V_E^\infty \otimes_E E_m)^{d_{\pi^\infty}} \oplus (\oplus_{J'} (V_E^\infty \otimes_E E_m)) \right)^\vee \rightarrow T_r \otimes_E E_m$. Par le Lemme 3.3.4, il existe $r' \gg r$ tel que f_{nilp} devient nul dans $T_{r'} \otimes_E E_m$. Par le Lemme 3.2.7 (appliqué avec $X_N = L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \left((V_E^\infty \otimes_E E_m)^{d_{\pi^\infty}} \oplus (\oplus_{\{1,\dots,N\}} (V_E^\infty \otimes_E E_m)) \right)^\vee$ en choisissant une bijection de l'ensemble dénombrable J' avec les entiers ≥ 1) suivi du Lemme 3.3.4 encore (appliqué comme dans la preuve du (i) du Lemme 3.3.5), on obtient que, quitte à augmenter r' , la composée :

$$(58) \quad L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \left((V_E^\infty \otimes_E E_m)^{d_{\pi^\infty}} \oplus (\oplus_{J'} (V_E^\infty \otimes_E E_m)) \right)^\vee \xrightarrow{f_{\mathrm{libre}}} T_r \otimes_E E_m \rightarrow T_{r'} \otimes_E E_m$$

se factorise par un quotient $L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \left((U_E^\infty \otimes_E E_m)^{d_{\pi^\infty}} \oplus (\oplus_{J''} (U_E^\infty \otimes_E E_m)) \right)^\vee$ pour J'' sous-ensemble fini de J' . Mais en utilisant $\lim_{m \rightarrow +\infty} \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1}) \simeq (V_E^\infty \otimes_E E_\infty)^{\oplus d_{\pi^\infty}}$, la définition de U_E^∞ et les propriétés de la décomposition (56), on voit qu'il existe $m' \gg 0$ tel que dans la composée :

$$\left((U_E^\infty \otimes_E E_m)^{d_{\pi^\infty}} \oplus (\oplus_{J''} (U_E^\infty \otimes_E E_m)) \right) \otimes_{E_m} E_{m'} \hookrightarrow \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1}) \otimes_{E_m} E_{m'} \rightarrow \pi_{\alpha,m'}^\infty(N_{\alpha,1})$$

l'image de $(\oplus_{J''} (U_E^\infty \otimes_E E_m)) \otimes_{E_m} E_{m'}$ est en fait *contenue* dans celle de $((U_E^\infty \otimes_E E_m)^{d_{\pi^\infty}}) \otimes_{E_m} E_{m'}$. On déduit de tout cela que la composée :

$$L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \pi_{\alpha,m'}^\infty(N_{\alpha,1})^\vee \hookrightarrow \left(L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \pi_{\alpha,m}^\infty(N_{\alpha,1})^\vee \right) \otimes_{E_m} E_{m'} \\ \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}} T_r \otimes_E E_{m'} \rightarrow T_{r'} \otimes_E E_{m'}$$

se factorise par le quotient $L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \left((U_E^\infty \otimes_E E_{m'})^{d_{\pi^\infty}} \right)^\vee$ de $L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \pi_{\alpha,m'}^\infty(N_{\alpha,1})^\vee$ dual de la composée (injective) :

$$(U_E^\infty \otimes_E E_{m_0})^{d_{\pi^\infty}} \otimes_{E_{m_0}} E_{m'} \subseteq (V_E^\infty \otimes_E E_{m_0})^{d_{\pi^\infty}} \otimes_{E_{m_0}} E_{m'} \\ \xrightarrow{j_{m_0} \otimes \mathrm{Id}} \pi_{\alpha,m_0}^\infty(N_{\alpha,1}) \otimes_{E_{m_0}} E_{m'} \rightarrow \pi_{\alpha,m'}^\infty(N_{\alpha,1}),$$

et donc devient juste un morphisme continu $\mathcal{R}_{E_{m'}}^+$ -linéaire $L(-\lambda)_{P_\alpha}^\vee \otimes_E \left((U_E^\infty \otimes_E E_{m'})^{d_{\pi^\infty}} \right)^\vee \rightarrow T_{r'} \otimes_E E_{m'}$ commutant à ψ et Γ . Par le Lemme 3.3.5 avec (57) et (52), on en déduit que l'on a (sans se préoccuper de l'action de $\mathrm{Gal}(E_\infty/E)$ pour le moment) :

$$F_\alpha(\pi)(T) \simeq E_\infty \otimes_E \mathrm{Hom}_{(\varphi,\Gamma)} \left(\left(\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee}) / (t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}) \right)^{\oplus d_{\pi^\infty}}, T \right).$$

Étape 6

Il reste à examiner l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$. Pour $g \in \text{Gal}(E_\infty/E)$ et t_g comme dans la preuve du (i) du Lemme 2.3.2, on a des isomorphismes $t_g \circ g : \pi_\alpha^\infty \otimes_E E_m \xrightarrow{\sim} \pi_\alpha^\infty \otimes_E E_m$ et $t_g \circ g : \pi_{\alpha,m}^\infty \xrightarrow{\sim} \pi_{\alpha,m}^\infty$ qui sont E_m -semi-linéaires, localement constants et commutent à l'action de P_2 . En particulier, dans l'isomorphisme $\pi_\alpha^\infty \otimes_E E_m \simeq \bigoplus_{\iota \in I} (W_E^\infty \otimes_E E_m)$ induit par l'Étape 2, on voit que pour tout sous-ensemble fini J de I la restriction $(t_g \circ g)|_{\bigoplus_J (W_E^\infty \otimes_E E_m)}$ est l'identité pour tout g dans un sous-groupe ouvert suffisamment petit de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ (dépendant de J). Comme l'action de t_g sur $L(-\lambda)_{P_\alpha}$ est la multiplication par $(-\lambda)(t_g)$, il suit alors des considérations dans l'Étape 5 (en particulier le fait que f est non nulle seulement sur un nombre fini de facteurs) que, pour tout (φ, Γ) -module généralisé T sur \mathcal{R}_E , l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ tordue par $\chi_{-\lambda}^{-1}$ sur le E_∞ -espace vectoriel de dimension finie $F_\alpha(\pi)(T)$ en (52) est localement constante (semi-linéaire). Le résultat final découle alors facilement du théorème de Hilbert 90.

3.4. Le cas de la cellule ouverte d'une induite parabolique. — On examine ce que donne le foncteur F_α appliqué à la cellule ouverte de certaines induites paraboliques localement analytiques.

On conserve les notations précédentes. On fixe $P \subseteq G$ un sous-groupe parabolique contenant B et π_P une représentation localement analytique de $P^-(\mathbb{Q}_p)$ sur un E -espace vectoriel de type compact. Choissant une section localement analytique $s : P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$ de la projection canonique $G(\mathbb{Q}_p) \twoheadrightarrow P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p)$, on a un isomorphisme de variétés localement \mathbb{Q}_p -analytiques :

$$(59) \quad P^-(\mathbb{Q}_p) \times (P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p)) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{Q}_p), \quad (q, x) \longmapsto qs(x)$$

compatible à la multiplication à gauche des deux côtés par $P^-(\mathbb{Q}_p)$ (la multiplication sur le terme de gauche étant triviale sur le facteur $P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p)$). L'isomorphisme (59) induit des isomorphismes topologiques d'espaces de type compact (cf. [46, (56) & Rem. 5.4]) :

$$(60) \quad (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}} \simeq C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), \pi_P) \simeq C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), E) \widehat{\otimes}_{E, \pi} \pi_P \\ \simeq C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), E) \widehat{\otimes}_{E, \iota} \pi_P$$

où l'on a utilisé que $C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), E)$ est un espace de type compact (car $P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p)$ est compact puisque $P^- \backslash G$ est une variété projective).

Soit $U \subseteq G(\mathbb{Q}_p)$ un ouvert stable par multiplication à gauche par $P^-(\mathbb{Q}_p)$, que l'on peut donc écrire par (59) $U \simeq P^-(\mathbb{Q}_p) \times \bar{U}$ où \bar{U} est un ouvert de $P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p)$ (en fait $\bar{U} \simeq P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash U$). On note $(\text{c-Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^U \pi_P)^{\text{an}}$ le sous-espace vectoriel de $(\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}}$ des fonctions dont le support est contenu dans U . Par (60), il s'identifie au sous-espace $C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), \pi_P)_{\bar{U}}$ de $C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), \pi_P)$ des fonctions à support contenu dans l'ouvert \bar{U} , qui est un sous-espace fermé de

$C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p), \pi_P)$ par [36, § 2.3.1], donc encore un espace de type compact. Comme $P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p)$ est une variété compacte (et qu'un fermé dans un compact est compact), toute fonction dans $C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p), \pi_P)_{\bar{U}}$ est à support compact contenu dans \bar{U} , i.e. on a $C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p), \pi_P)_{\bar{U}} = C_c^{\text{an}}(\bar{U}, \pi_P)$ avec les notations du § 3.2. Lorsque U est de plus stable par multiplication à droite par $P(\mathbb{Q}_p)$, notons que $(c\text{-Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^U \pi_P)^{\text{an}}$ est un sous-espace (fermé) de $(\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}}$ stable sous l'action de $P(\mathbb{Q}_p)$.

Remarque 3.4.1. — On peut montrer que tout ouvert d'une variété localement \mathbb{Q}_p -analytique compacte (par exemple \bar{U} dans $P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p)$) admet un recouvrement disjoint par un nombre dénombrable d'ouverts compacts et que la topologie de type compact sur $C_c^{\text{an}}(\bar{U}, \pi_P)$ provenant de $C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p), \pi_P)_{\bar{U}}$ s'identifie à celle du Lemme 3.2.11 (utiliser qu'une bijection continue entre espaces de type compact est un isomorphisme topologique).

Le lemme suivant sera utile (nous remercions le rapporteur pour avoir, là encore, suggéré une simplification dans sa preuve).

Lemme 3.4.2. — *On a un isomorphisme d'espaces de type compact :*

$$(c\text{-Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^U \pi_P)^{\text{an}} \simeq C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p), E)_{\bar{U}} \widehat{\otimes}_E \pi_P.$$

Démonstration. — Par la discussion précédant la Remarque 3.4.1, on a un isomorphisme d'espaces de type compact $(c\text{-Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^U \pi_P)^{\text{an}} \simeq C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p), \pi_P)_{\bar{U}}$. On a également avec la Remarque 3.4.1 un autre isomorphisme d'espaces de type compact $C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p), \pi_P)_{\bar{U}} \simeq C_c^{\text{an}}(\bar{U}, \pi_P)$ où $C_c^{\text{an}}(\bar{U}, \pi_P) = \varinjlim_{\bar{V}} C^{\text{an}}(V, \pi_P)$

avec topologie limite inductive (cf. preuve du Lemme 3.2.11), la limite inductive étant prise sur les ouverts compacts V de $P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p)$. Donc on en déduit un isomorphisme d'espaces de type compact :

$$(61) \quad (c\text{-Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^U \pi_P)^{\text{an}} \simeq \varinjlim_{\bar{V}} C^{\text{an}}(V, \pi_P).$$

Par [61, Prop.A.2] et par l'argument à la fin de la preuve du Lemme 3.2.12, on a un isomorphisme d'espaces de type compact :

$$(62) \quad \varinjlim_{\bar{V}} C^{\text{an}}(V, \pi_P) \simeq \varinjlim_{\bar{V}} (C^{\text{an}}(V, E) \widehat{\otimes}_E \pi_P) \simeq (\varinjlim_{\bar{V}} C^{\text{an}}(V, E)) \widehat{\otimes}_E \pi_P.$$

Mais en remplaçant E par π_P , on a également un isomorphisme comme ci-dessus :

$$(63) \quad C^{\text{an}}(P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p), E)_{\bar{U}} \simeq C_c^{\text{an}}(\bar{U}, E) = \varinjlim_{\bar{V}} C^{\text{an}}(V, E).$$

Le résultat suit de (61), (62) et (63). □

On suppose maintenant $U = P^-(\mathbb{Q}_p)P(\mathbb{Q}_p) \simeq P^-(\mathbb{Q}_p) \times N_P(\mathbb{Q}_p)$ où l'on voit $\bar{U} \simeq N_P(\mathbb{Q}_p)$ comme ouvert de $P^-(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p)$. Par la discussion précédant le Lemme

3.4.2, on déduit que la restriction à l'ouvert $N_P(\mathbb{Q}_p)$ induit un isomorphisme d'espaces de type compact :

$$(64) \quad (c\text{-Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{P^-(\mathbb{Q}_p)P(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P).$$

Cet isomorphisme est de plus $P(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant en définissant l'action de $N_P(\mathbb{Q}_p)$ sur $C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P)$ comme la translation à droite et celle de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ comme suit pour $f \in C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P)$:

$$(65) \quad (gf)(n) = g(f(g^{-1}ng)), \quad g \in L_P(\mathbb{Q}_p), \quad n \in N_P(\mathbb{Q}_p).$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ le sous-espace $C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P)$ de $C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P)$ des fonctions à support dans $N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m$ est de type compact et stable par l'action (65) de N_m et de $\lambda_{\beta^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ pour $\beta \in S$ (utiliser $N_m = (N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m) \rtimes (N_{L_P}(\mathbb{Q}_p) \cap N_m)$ et (11)). On peut donc définir le foncteur $F_{\alpha, m}(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P))$ dans $F(\varphi, \Gamma)_m$ par les formules (15), (31) et le (i) du Lemme 2.3.2. Comme pour (36), les injections :

$$C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P) \hookrightarrow C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_{m+1}, \pi_P) \hookrightarrow C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P)$$

induisent un diagramme commutatif de foncteurs pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ commutant à l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$:

$$(66) \quad \begin{array}{ccc} F_{\alpha, m}(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P)) & \longrightarrow & F_{\alpha, m+1}(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_{m+1}, \pi_P)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{\alpha, m}(C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P)) & \longrightarrow & F_{\alpha, m+1}(C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P)). \end{array}$$

Lemme 3.4.3. — Les diagrammes (66) induisent un isomorphisme dans $F(\varphi, \Gamma)_\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{\alpha, m}(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P)) &\xrightarrow{\sim} \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{\alpha, m}(C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P)) \\ &= F_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P)). \end{aligned}$$

Démonstration. — Comme $(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m) \cup (N_P(\mathbb{Q}_p) \cap (N_{m'} \setminus N_{m'-1}))_{m' \geq m+1}$ est un recouvrement ouvert disjoint de $N_P(\mathbb{Q}_p)$, on a un isomorphisme topologique pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$(67) \quad C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P) \simeq C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P) \bigoplus \left(\bigoplus_{m' \geq m+1} C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap (N_{m'} \setminus N_{m'-1}), \pi_P) \right).$$

On a vu que les actions de N_m et $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ préservent $C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P)$. Pour $m' \geq m+1$ les actions de N_m et $\lambda_{\beta^\vee}(\mathbb{Z}_p^\times)$ pour $\beta \in S$ préservent chaque $C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap (N_{m'} \setminus N_{m'-1}), \pi_P)$ et l'action de $\lambda_{\alpha^\vee}(p)$ envoie $C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap (N_{m'} \setminus N_{m'-1}), \pi_P)$ dans

$C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_{m'}, \pi_P)$ (et préserve $C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_{m'}, \pi_P)$). Posons pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$(68) \quad \begin{aligned} \pi_m &\stackrel{\text{déf}}{=} C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P) / C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P) \\ &\simeq \bigoplus_{m' \geq m+1} C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap (N_{m'} \setminus N_{m'-1}), \pi_P) \end{aligned}$$

muni de l'action quotient de N_m et $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$. Par la preuve du (i) de la Proposition 2.3.4, on a une suite exacte dans $F(\varphi, \Gamma)_m$:

$$0 \longrightarrow F_{\alpha, m}(C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P)) \longrightarrow F_{\alpha, m}(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P)) \longrightarrow F_{\alpha, m}(\pi_m)$$

et par celle du (iii) du Lemme 2.3.2 on a un morphisme $F_{\alpha, m}(\pi_m) \rightarrow F_{\alpha, m+1}(\pi_{m+1})$ de foncteurs qui commute (en un sens évident) avec (66). Il suffit donc de montrer $\lim_{m \rightarrow +\infty} F_{\alpha, m}(\pi_m) = 0$.

Pour $N \geq m+1$, posons $\pi_{m, N} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{N \geq m' \geq m+1} C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap (N_{m'} \setminus N_{m'-1}), \pi_P)$, qui par (68) et [57, Lem. 5.3(iii)] est un sous-espace fermé de π_m stable par N_m et $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$. Par la preuve du Lemme 3.2.10 (appliqué avec $\pi = \pi_m \otimes_E E_m$ et $\pi_N = \pi_{m, N} \otimes_E E_m$), tout morphisme $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire continu commutant à ψ et Γ :

$$f : M_\alpha(\pi_m \otimes_E E_m) \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$$

(où $M_\alpha(-)$ est comme en (15), $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$ et T_r est un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r) se factorise par $M_\alpha(\pi_{m, N} \otimes_E E_m)$ pour $N \gg 0$. En particulier la composée :

$$M_\alpha(\pi_N \otimes_E E_N) \longrightarrow M_\alpha(\pi_m \otimes_E E_m) \otimes_{E_m} E_N \xrightarrow{f \otimes 1} T_r \otimes_E E_N$$

est nulle, ce qui achève la preuve. Il sera utile pour plus tard de remarquer que (68) et [57, Prop. 9.10] impliquent un isomorphisme de $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -modules :

$$(69) \quad M_\alpha(\pi_m \otimes_E E_m) = \prod_{m' \geq m+1} M_{\alpha, m'}$$

où $M_{\alpha, m'} \stackrel{\text{déf}}{=} M_\alpha(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap (N_{m'} \setminus N_{m'-1}), \pi_P \otimes_E E_m))$ et l'opérateur ψ sur $M_\alpha(\pi_m \otimes_E E_m)$ (provenant de l'action de $\lambda_{\alpha^\vee}(p)$ sur π_m , cf. le début du § 2.3) vu à droite envoie $M_{\alpha, m'}$ dans $\bigoplus_{m'' \geq m'} M_{\alpha, m''}$ pour m'' convenable. \square

Jusqu'à la fin du § 3.4 on suppose $\pi_P \simeq W \otimes_E \pi_P^\infty$ où W est une représentation algébrique de $P^-(\mathbb{Q}_p)$ de dimension finie sur E , π_P^∞ est une représentation lisse de dimension dénombrable de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E et où π_P est muni de la topologie localement convexe la plus fine (un espace de type compact par la discussion juste avant [54, Lem. 2.4]). Comme L_P est réductif, on a $W|_{L_P} = \bigoplus_i L(-\lambda_i)_P$ pour des représentations algébriques irréductibles $L(-\lambda_i)_P$ de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E .

On note $S_P \subseteq S$ le sous-ensemble des racines simples de L_P . Rappelons qu'une représentation lisse irréductible π_P^∞ de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E est dite générique si $(\pi_P^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N_{L_P}} \neq 0$ (en particulier π_P^∞ est toujours générique si $L_P = T$).

Proposition 3.4.4. — Supposons que $\alpha \notin S_P$ et que $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Q}_p^\times)$ agisse sur π_P^∞ par un caractère $\chi_{\pi_P^\infty, \alpha}$ de \mathbb{Q}_p^\times (c'est par exemple le cas si π_P^∞ a un caractère central). Alors le foncteur $F_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P))$ est isomorphe à :

$$\bigoplus_i E_\infty(\chi_{-\lambda_i}) \otimes_{E_\infty} (\pi_P^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N_{L_P}(\mathbb{Q}_p)} \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)} \left(\mathcal{R}_E((\lambda_i \circ \lambda_{\alpha^\vee}) \chi_{\pi_P^\infty, \alpha}^{-1}), - \right)$$

avec action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ sur le facteur $(\pi_P^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N_{L_P}(\mathbb{Q}_p)}$ comme dans la preuve du (i) du Lemme 2.3.2. En particulier, si π_P^∞ est de plus de longueur finie, $F_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P))$ est nul si et seulement si π_P^∞ n'a pas de constituant générique.

Démonstration. — Pour calculer $F_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p), \pi_P))$, on commence par calculer $F_{\alpha, m}(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P))$ pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, puis on passe à la limite en utilisant le Lemme 3.4.3.

Étape 1

On calcule $C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P \otimes E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$. On a un isomorphisme topologique comme pour (60) :

$$(70) \quad C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P) \simeq C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E) \otimes_{E, \iota} \pi_P$$

en remarquant que l'espace de droite est de type compact (utiliser [31, Prop. 1.1.32(i)] avec le fait que π_P est une limite inductive topologique dénombrable de E -espaces vectoriels de dimension finie puisque π_P^∞ est de dimension dénombrable), donc déjà complet. Notons $N_P^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} N^\alpha \cap N_P$ (dans N), puisque $\alpha \notin S_P$ on a $N^\alpha = N_P^\alpha \rtimes N_{L_P}$ et $N_P = N_P^\alpha \rtimes N_\alpha$. On en déduit un produit semi-direct des \mathbb{Q}_p -algèbres de Lie respectives $\mathfrak{n}^\alpha \simeq \mathfrak{n}_P^\alpha \rtimes \mathfrak{n}_{L_P}$ et de groupes compacts $N_m^\alpha = (N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m) \rtimes (N_{L_P}(\mathbb{Q}_p) \cap N_m)$, $N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m = (N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m) \rtimes (N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On note $A_m \stackrel{\text{déf}}{=} C^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E)$ et $A_m^{\alpha, \infty} \stackrel{\text{déf}}{=} C^\infty(N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E)$ dans la suite de cette preuve. Écrivant par [61, Lem. A.1] :

$$C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E) \simeq C^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, C^{\text{an}}(N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E))$$

on obtient (en notant \otimes_E au lieu de $\otimes_{E, \iota}$) :

$$\begin{aligned} & (C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E) \otimes_E \pi_P)[\mathfrak{n}_P^\alpha] \\ & \simeq C^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, C^{\text{an}}(N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E)[\mathfrak{n}_P^\alpha]) \otimes_E \pi_P \\ & \simeq C^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, A_m^{\alpha, \infty}) \otimes_E \pi_P. \end{aligned}$$

Par [61, Prop. A.2] et le fait que $A_m^{\alpha, \infty}$ est un espace de type compact de dimension dénombrable muni de la topologie localement convexe la plus fine, on en déduit :

$$(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E) \otimes_E \pi_P)[\mathfrak{n}_P^\alpha] \simeq (A_m \widehat{\otimes}_{E, \pi} A_m^{\alpha, \infty}) \otimes_E \pi_P \simeq A_m \otimes_E A_m^{\alpha, \infty} \otimes_E \pi_P$$

d'où on obtient avec (70) :

$$\begin{aligned} C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P)[\mathfrak{n}^\alpha] & \simeq (C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P)[\mathfrak{n}_P^\alpha])[\mathfrak{n}_{L_P}] \\ & \simeq A_m \otimes_E A_m^{\alpha, \infty} \otimes_E (\pi_P[\mathfrak{n}_{L_P}]). \end{aligned}$$

Si $v_{-\lambda_i}$ est un vecteur de plus haut poids de $L(-\lambda_i)_P$ (pour $B \cap L_P$), on a $\pi_P[\mathfrak{n}_{L_P}] \simeq \bigoplus_i Ev_{-\lambda_i} \otimes_E \pi_P^\infty$. On a un isomorphisme (puisque $N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m$ est un groupe compact) :

$$A_m^{\alpha,\infty}(\eta^{-1})_{N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m} \xrightarrow{\sim} A_m^{\alpha,\infty}(\eta^{-1})_{N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m}$$

qui montre que $A_m^{\alpha,\infty}(\eta^{-1})_{N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m}$ est de dimension 1 sur E_m engendré par la classe de la fonction localement constante $\eta|_{N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m}$ (on utilise *ici* que le support des fonctions de départ est $N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m$ et pas un compact arbitraire de $N_P(\mathbb{Q}_p)$). De plus, l'automorphisme $t_g \circ g$ pour $g \in \text{Gal}(E_\infty/E)$ (cf. (33) et (34)) étant E_m -semi-linéaire, une application du Théorème 90 de Hilbert montre que $A_m^{\alpha,\infty}(\eta^{-1})_{N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m}$ s'identifie à E_m avec action usuelle de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ dessus. On en déduit :

$$(71) \quad C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_P^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m} \\ \simeq \bigoplus_i \left(A_m \otimes_E (Ev_{-\lambda_i} \otimes_E \pi_P^\infty) \otimes_E E_m \right).$$

Via les produits semi-directs ci-dessus, on déduit de (71) et (65) en posant :

$$V_{m,i} \stackrel{\text{déf}}{=} Ev_{-\lambda_i} \otimes_E (\pi_P^\infty \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_{L_P}(\mathbb{Q}_p) \cap N_m} \quad \text{et} \quad V_m \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_i V_{m,i}$$

(de dimension dénombrable muni de la topologie localement convexe la plus fine) :

$$(72) \quad C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \simeq A_m \otimes_E V_m$$

où l'action (résiduelle) de $N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m \simeq \frac{1}{p^m}\mathbb{Z}_p$ (cf. (9)) est la translation à droite sur $A_m = C^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E)$ (et triviale sur V_m), où l'action de $t = \lambda_{\alpha^\vee}(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ est $f \mapsto (z \in \frac{1}{p^m}\mathbb{Z}_p \mapsto f(z/x))$ sur $A_m \simeq C^{\text{an}}(\frac{1}{p^m}\mathbb{Z}_p, E)$ (vu dans $C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), E)$), est la multiplication par $(-\lambda_i)(t)$ sur $Ev_{-\lambda_i}$ et par $\chi_{\pi_P^\infty, \alpha}(x)$ sur $(\pi_P^\infty \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_{L_P}(\mathbb{Q}_p) \cap N_m}$ (donc est la multiplication par $(-\lambda_i)(t)\chi_{\pi_P^\infty, \alpha}(x)$ sur $V_{m,i}$), et où l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ est triviale sur A_m et est comme dans l'énoncé sur V_m .

Étape 2

On calcule $F_{\alpha,m}(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P))$ et on démontre le résultat. Le sous-espace $A_0 \otimes_E V_m = C^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_0, E) \otimes_E V_m$ de (72) est fermé et stable par l'action de $N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_0$ et $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$. De plus il existe $N \gg 0$ tel que l'action de $\lambda_{\alpha^\vee}(p)^N$ sur le quotient $(A_m/A_0) \otimes_E V_m$ est nulle. Soit $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$, T_r un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r et :

$$f : (A_m/A_0)^\vee \widehat{\otimes}_E V_m^\vee \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$$

un morphisme $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire continu commutant à ψ (on utilise tacitement ici la version duale de [57, Prop. 20.13]). On a $\psi^N = 0$ à gauche, et (comme dans la preuve du (ii) du Lemme 3.3.5) par l'analogie du diagramme commutatif (32) où φ, ψ sont remplacés par respectivement φ^N, ψ^N et pr par $p^N r$ (cf. aussi (148) et (149) ci-dessous), on en déduit que la composée :

$$(A_m/A_0)^\vee \widehat{\otimes}_E V_m^\vee \xrightarrow{f} T_r \otimes_E E_m \longrightarrow T_{p^N r} \otimes_E E_m$$

est nulle, ce qui implique :

$$\varinjlim_{(r, f_r, T_r) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi, \Gamma} \left((A_m/A_0)^\vee \widehat{\otimes}_E V_m^\vee, T_r \otimes_E E_m \right) = 0$$

pour tout (φ, Γ) -module généralisé T sur \mathcal{R}_E . En utilisant que $V \mapsto V \widehat{\otimes}_E V_m$ préserve les suites exactes courtes d'espaces de Fréchet ([64, Lem. 4.13]), que $\text{Hom}_{\psi, \Gamma}$ est exact à gauche et que les limites inductives filtrantes sont exactes, on obtient un isomorphisme pour tout (φ, Γ) -module généralisé T sur \mathcal{R}_E :

$$\varinjlim_{(r, f_r, T_r) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi, \Gamma} \left(A_0^\vee \widehat{\otimes}_E V_m^\vee, T_r \otimes_E E_m \right) \xrightarrow{\sim} F_{\alpha, m} \left(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P) \right) (T).$$

Par le Lemme 3.2.9 et l'action de $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ comme explicitée après (72) (et dualisée), on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned} & \varinjlim_{(r, f_r, T_r) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi, \Gamma} \left(A_0^\vee \widehat{\otimes}_E V_m^\vee, T_r \otimes_E E_m \right) \simeq \\ & \bigoplus_i \left(V_{m, i} \otimes_{E_m} \varinjlim_{(r, f_r, T_r) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi, \Gamma} \left(A_0^\vee \otimes_{\mathcal{R}_E^+} \mathcal{R}_E^+ \left(((-\lambda_i) \circ \lambda_{\alpha^\vee}^{-1}) \chi_{\pi_P^\infty, \alpha}^{-1} \right) \otimes_E E_m, \right. \right. \\ & \left. \left. T_r \otimes_E E_m \right) \right). \end{aligned}$$

Avec l'isomorphisme $N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_0 \simeq \mathbb{Z}_p$, les (iii), (iv) et (v) de la Remarque 2.3.1 et le (iii) du Lemme 2.2.3, on en déduit :

$$\begin{aligned} & F_{\alpha, m} \left(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P) \right) (T) \\ & \simeq \bigoplus_i \left(V_{m, i} \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)} \left(\mathcal{R}_E \left(((-\lambda_i) \circ \lambda_{\alpha^\vee}^{-1}) \chi_{\pi_P^\infty, \alpha}^{-1} \right), T \right) \right) \end{aligned}$$

avec action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ (sur $V_{m, i}$) comme dans l'énoncé. Par le Lemme 3.4.3 (et (37)), on a la première assertion puisque $(-\lambda_i) \circ \lambda_{\alpha^\vee}^{-1} = \lambda_i \circ \lambda_{\alpha^\vee}$ et :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (\pi_P^\infty \otimes_E E_m) (\eta^{-1})_{N_{L_P(\mathbb{Q}_p)} \cap N_m} = (\pi_P^\infty \otimes_E E_\infty) (\eta^{-1})_{N_{L_P(\mathbb{Q}_p)}}.$$

La deuxième assertion vient du fait que $(\pi_P^\infty \otimes_E E_\infty) (\eta^{-1})_{N_{L_P(\mathbb{Q}_p)}} \neq 0$ si et seulement s'il existe un constituant C_P de π_P^∞ tel que $(C_P \otimes_E E_\infty) (\eta^{-1})_{N_{L_P(\mathbb{Q}_p)}} \neq 0$, ou de manière équivalente $((C_P \otimes_E E_\infty) (\eta^{-1})_{N_{L_P(\mathbb{Q}_p)}})^\vee \neq 0$, ou encore il existe une fonctionnelle de Whittaker non nulle sur C_P (à valeurs dans E_∞), ou encore C_P est générique. \square

3.5. Approximation des gradués. — On montre un résultat technique mais crucial de densité sur certains gradués (Proposition 3.5.3) qui sera utilisé dans la preuve de la Proposition 3.6.2.

On garde les notations du § 3.4 mais cette fois π_P est une représentation localement analytique de $P(\mathbb{Q}_p)$ sur un E -espace vectoriel de type compact et on suppose $P \neq G$. On fixe une section localement analytique $s : P(\mathbb{Q}_p) \setminus G(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$ de la projection

$G(\mathbb{Q}_p) \twoheadrightarrow P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p)$, on a comme en (59) un isomorphisme de variétés localement \mathbb{Q}_p -analytiques compatible à la multiplication à gauche par $P(\mathbb{Q}_p)$:

$$(73) \quad P(\mathbb{Q}_p) \times (P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p)) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{Q}_p), \quad (q, x) \mapsto qs(x).$$

Soit C un fermé quelconque de $G(\mathbb{Q}_p)$ stable par multiplication à gauche par $P(\mathbb{Q}_p)$ et considérons l'induite $(\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \backslash C} \pi_P)^{\text{an}}$ des fonctions localement analytiques $f : G(\mathbb{Q}_p) \backslash C \rightarrow \pi_P$ à support compact modulo $P(\mathbb{Q}_p)$ (vérifiant l'équation fonctionnelle usuelle). Puisque $G(\mathbb{Q}_p) \backslash C$ est un ouvert de $G(\mathbb{Q}_p)$ stable par multiplication à gauche par $P(\mathbb{Q}_p)$, on a par le (même argument que pour le) Lemme 3.4.2 :

$$(74) \quad (\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \backslash C} \pi_P)^{\text{an}} \simeq C^{\text{an}}(P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), E)_{P(\mathbb{Q}_p) \backslash (G(\mathbb{Q}_p) \backslash C)} \widehat{\otimes}_E \pi_P.$$

De plus $(\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \backslash C} \pi_P)^{\text{an}}$ est un sous-espace fermé de $(\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}} \simeq C^{\text{an}}(P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), E) \widehat{\otimes}_E \pi_P$ (cf. la discussion avant le Lemme 3.4.2).

Il suit de la preuve de [46, Prop. 5.3] (avec [46, (50)], [46, (53)] et [46, Rem. 5.4]) que l'on a un isomorphisme topologique de $G(\mathbb{Q}_p)$ -représentations (cf. le début du § 3.2 pour les notations):

$$(75) \quad ((\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \simeq (\pi_P)^{\vee} \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)$$

où $(\pi_P)^{\vee}$ est ici muni de sa structure de $D(P(\mathbb{Q}_p), E)$ -module à droite (plus précisément les références ci-dessus donnent un isomorphisme $((\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \simeq (\pi_P)^{\vee} \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)$ où le terme de droite est défini comme dans [46, p. 198], mais comme $((\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee}$ est un espace de Fréchet nucléaire, en particulier est séparé, on a un isomorphisme $(\pi_P)^{\vee} \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E) \xrightarrow{\sim} (\pi_P)^{\vee} \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E))$. Dans (75), la multiplication à droite par la distribution de Dirac $\delta_{g^{-1}} \in D(G(\mathbb{Q}_p), E)$ pour $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ correspond à l'action de g sur $((\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee}$, i.e. $(F\delta_{g^{-1}})(f) = (gF)(f) = F(g^{-1}(f))$ si $F \in ((\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee}$ et $f \in (\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}}$. De même si $\mu \in U(\mathfrak{g})$ on a $(F\mu)(f) = F(\mu(f))$ où, si $\mu = \eta \in \mathfrak{g}$, $\mu(f) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{d}{dt} f(\cdot \exp(t\eta))|_{t=0}$.

Posons :

$$(76) \quad \pi_C \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}} / (\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \backslash C} \pi_P)^{\text{an}} \quad \text{et} \quad X_C \stackrel{\text{déf}}{=} (\pi_C)^{\vee}.$$

Alors π_C est un espace de type compact et X_C est un sous-espace fermé de $((\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee}$, donc également un espace de Fréchet nucléaire.

Lemme 3.5.1. — *Conservons les notations ci-dessus.*

(i) *On a un isomorphisme topologique :*

$$(\pi_P)^{\vee} \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_C \simeq X_C$$

où le membre de gauche est muni de la topologie quotient de $(\pi_P)^{\vee} \widehat{\otimes}_{E, \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_C$ (cf. § 3.2 pour $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_C$).

(ii) L'injection $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_C \hookrightarrow D(G(\mathbb{Q}_p), E)$ induit une immersion fermée d'espaces de Fréchet :

$$(\pi_P)^\vee \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_C \hookrightarrow (\pi_P)^\vee \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E).$$

Démonstration. — (i) Soit F l'image de C dans $P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p)$, qui est un fermé (donc un compact) de $P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p)$. On a un isomorphisme topologique par (73) et le Lemme 3.2.12 :

$$(77) \quad D(P(\mathbb{Q}_p), E) \widehat{\otimes}_{E, \iota} D(P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), E)_F \xrightarrow{\sim} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_C.$$

On a également un isomorphisme topologique par (74), (60) et [64, Lem. 4.13] avec [57, Prop. 20.13] :

$$\pi_C \simeq \left(C^{\text{an}}(P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), E) / C^{\text{an}}(P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), E)_{P(\mathbb{Q}_p) \backslash (G(\mathbb{Q}_p) \backslash C)} \right) \widehat{\otimes}_{E \pi_P}$$

qui induit en dualisant un isomorphisme $X_C \simeq (\pi_P)^\vee \widehat{\otimes}_E D(P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), E)_F$ (utiliser la version duale de [57, Prop. 20.13] puis la discussion après le Lemme 3.2.11). Par le Lemme 3.2.1, on a par ailleurs un isomorphisme :

$$\begin{aligned} (\pi_P)^\vee \widehat{\otimes}_E D(P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), E)_F \\ \simeq (\pi_P)^\vee \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} (D(P(\mathbb{Q}_p), E) \widehat{\otimes}_{E, \iota} D(P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p), E)_F) \end{aligned}$$

d'où le résultat avec (77).

(ii) s'obtient en considérant le dual de la surjection topologique d'espaces de type compact :

$$\left(\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P \right)^{\text{an}} \twoheadrightarrow \left(\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P \right)^{\text{an}} / \left(\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \backslash C} \pi_P \right)^{\text{an}} = \pi_C$$

et en utilisant (75) et le (i). □

Le lemme suivant, qui explicite le cas $C = P(\mathbb{Q}_p)$, sera utile au § 4.5.

Lemme 3.5.2. — *On a un isomorphisme de $D(P(\mathbb{Q}_p), E)$ -modules à gauche séparément continus (avec les notations ci-dessus) :*

$$D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{P(\mathbb{Q}_p)} \simeq D(P(\mathbb{Q}_p), E) \widehat{\otimes}_E D(N_P^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$$

et un isomorphisme d'espaces de Fréchet :

$$(\pi_P)^\vee \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{P(\mathbb{Q}_p)} \simeq (\pi_P)^\vee \widehat{\otimes}_E D(N_P^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}.$$

Démonstration. — Par [45, Prop. 1.2.12], on a un isomorphisme de $D(P(\mathbb{Q}_p), E)$ -modules à gauche séparément continus :

$$(78) \quad D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{P(\mathbb{Q}_p)} \simeq D(P(\mathbb{Q}_p), E) \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}.$$

Comme $P(\mathbb{Q}_p)N_P^-(\mathbb{Q}_p) = P(\mathbb{Q}_p)P^-(\mathbb{Q}_p)$ est un ouvert de $G(\mathbb{Q}_p)$ contenant 1, on a un isomorphisme $D(P(\mathbb{Q}_p)N_P^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \xrightarrow{\sim} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$. Comme la multiplication dans $G(\mathbb{Q}_p)$ induit un isomorphisme de variétés localement \mathbb{Q}_p -analytiques $P(\mathbb{Q}_p) \times N_P^-(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} P(\mathbb{Q}_p)N_P^-(\mathbb{Q}_p)$, il suit du Lemme 3.2.12 que la multiplication

dans l'algèbre de Fréchet $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ induit un isomorphisme de $D(P(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ -modules à gauche continus $D(P(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \widehat{\otimes}_E D(N_P^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \xrightarrow{\sim} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$. Par le Lemme 3.2.1 et (78), on en déduit le premier isomorphisme de l'énoncé. On obtient le deuxième isomorphisme en appliquant le Lemme 3.2.1 une deuxième fois. \square

Soit maintenant $C' \subsetneq C \subseteq G(\mathbb{Q}_p)$ deux fermés distincts de $G(\mathbb{Q}_p)$ stables par multiplication à gauche par $P(\mathbb{Q}_p)$ tels que $C \setminus C'$ est un ouvert dense de C . On suppose que $P(\mathbb{Q}_p) \backslash (C \setminus C')$ est une sous-variété localement \mathbb{Q}_p -analytique paracompacte fermée de la variété $P(\mathbb{Q}_p) \backslash (G(\mathbb{Q}_p) \setminus C')$ (qui est une sous-variété ouverte de $P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p)$). La notation $P(\mathbb{Q}_p) \backslash (C \setminus C')$ pouvant prêter à confusion, précisons qu'il s'agit de " C privé de C' , le tout quotienté par l'action de $P(\mathbb{Q}_p)$ par multiplication à gauche". Noter que (73) induit un isomorphisme :

$$(79) \quad P(\mathbb{Q}_p) \times (P(\mathbb{Q}_p) \backslash (C \setminus C')) \xrightarrow{\sim} C \setminus C'$$

qui munit $C \setminus C'$ d'une structure de sous-variété localement \mathbb{Q}_p -analytique fermée de $G(\mathbb{Q}_p) \setminus C'$. Attention que C et C' ne sont pas eux-mêmes supposés être des variétés localement \mathbb{Q}_p -analytiques (i.e. ils peuvent avoir des "singularités"). Par la Remarque 3.4.1 l'ouvert $P(\mathbb{Q}_p) \backslash (G(\mathbb{Q}_p) \setminus C')$ de la variété compacte $P(\mathbb{Q}_p) \backslash G(\mathbb{Q}_p)$ admet un recouvrement disjoint par un nombre *dénombrable* d'ouverts compacts. On en déduit la même chose pour son fermé $P(\mathbb{Q}_p) \backslash (C \setminus C')$ en utilisant que l'intersection d'un fermé et d'un compact est compacte. On note $(\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}}$ l'espace des fonctions localement analytiques $f : C \setminus C' \rightarrow \pi_P$ à support compact modulo $P(\mathbb{Q}_p)$ telles que $f(qc) = q(f(c))$ pour $q \in P(\mathbb{Q}_p)$ et $c \in C \setminus C'$, qui s'identifie par (79) à l'espace de type compact $C_c^{\text{an}}(P(\mathbb{Q}_p) \backslash (C \setminus C'), \pi_P)$, cf. le Lemme 3.2.11. De plus par le Lemme 3.5.1 les inclusions $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{C'} \subseteq D(G(\mathbb{Q}_p), E)_C \subseteq D(G(\mathbb{Q}_p), E)$ induisent des immersions fermées d'espaces de Fréchet (nucléaires) :

$$\begin{aligned} (\pi_P)^\vee \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{C'} &\hookrightarrow (\pi_P)^\vee \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_C \\ &\hookrightarrow (\pi_P)^\vee \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E), \end{aligned}$$

qui sont les duales des surjections topologiques d'espaces de type compact :

$$(80) \quad \begin{aligned} (\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}} &\twoheadrightarrow \pi_C = (\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}} / (\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C} \pi_P)^{\text{an}} \\ &\twoheadrightarrow \pi_{C'} = (\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}} / (\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}}. \end{aligned}$$

On note aussi :

$$\pi_{C/C'} \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}} / (\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C} \pi_P)^{\text{an}},$$

de sorte que l'on a une suite exacte (stricte) d'espaces de type compact :

$$(81) \quad 0 \longrightarrow \pi_{C/C'} \longrightarrow \pi_C \longrightarrow \pi_{C'} \longrightarrow 0$$

et que $(\pi_{C/C'})^\vee \simeq X_C/X_{C'}$ par (76) et (80).

La proposition suivante donne une "approximation" des "gradués" $X_C/X_{C'}$ qui sera cruciale dans la preuve de la Proposition 3.6.2 ci-dessous. La preuve présentée

utilisant $U(\mathfrak{g}, E)$ est due au rapporteur (notre preuve initiale était plus laborieuse). Rappelons que l'injection $U(\mathfrak{g}, E) \hookrightarrow D(G(\mathbb{Q}_p), E)$ tombe dans $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$.

Proposition 3.5.3. — *On a des morphismes continus canoniques d'image dense :*

$$\begin{aligned} ((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \otimes_{E, \iota} U(\mathfrak{g}, E) &\longrightarrow ((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \otimes_{E, \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \\ &\longrightarrow X_C/X_{C'} \end{aligned}$$

où $U(\mathfrak{g}, E)$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine.

Démonstration. — Le premier morphisme est d'image dense par [45, Prop. 1.2.8] et le Lemme 3.2.4. Définissons le second morphisme. Par le (i) du Lemme 3.5.1 $X_C/X_{C'}$ s'identifie au quotient de l'espace de Fréchet $(\pi_P)^{\vee} \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_C$ par le sous-espace fermé $(\pi_P)^{\vee} \widehat{\otimes}_{D(P(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{C'}$. Comme $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{C'}$ et $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_C$ sont des $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ -modules à droite, on en déduit que $X_C, X_{C'}$, et donc $X_C/X_{C'}$, sont aussi des $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ -modules à droite. La restriction à $C \setminus C'$ d'une fonction dans $(c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}}$ tombe dans le sous- E -espace vectoriel $(c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}}$ de $(\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}}$ (utiliser que l'intersection d'un compact et d'un fermé est encore un compact). Cette restriction est de plus clairement nulle sur le sous-espace fermé $(c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C} \pi_P)^{\text{an}}$ de $(c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}}$, d'où un morphisme canonique continu $\pi_{C/C'} \longrightarrow (c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}}$, qui en dualisant donne un morphisme continu $((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \longrightarrow X_C/X_{C'}$. Ce dernier morphisme s'étend naturellement en un morphisme $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ -linéaire continu de $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ -modules à droite comme dans l'énoncé.

Notons R la composée $((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \otimes_{E, \iota} U(\mathfrak{g}, E) \longrightarrow X_C/X_{C'}$. Il suffit de montrer que l'image de R est dense dans $X_C/X_{C'}$. Par [57, Cor. 9.3] appliqué au quotient de $X_C/X_{C'}$ par l'adhérence de l'image de R , il suffit de montrer que l'application duale de R est injective. Comme $(X_C/X_{C'})^{\vee} \simeq \pi_{C/C'} = (c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}} / (c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C} \pi_P)^{\text{an}}$, il suffit de montrer que si $f \in (c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}}$ est tel que $R(F \otimes \mu)(\bar{f}) = 0$ pour tout $F \in ((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee}$ et tout $\mu \in U(\mathfrak{g})$ (où \bar{f} est l'image de f dans $\pi_{C/C'}$), alors $f \in (c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C} \pi_P)^{\text{an}}$, i.e. le support de f est disjoint de C . Mais $R(F \otimes \mu)(\bar{f}) = F(\mu(f)|_{C \setminus C'})$ où $\mu(f) \in (c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p) \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}}$ est défini comme dans la discussion qui suit (75). Donc on déduit $\mu(f)(g) = 0$ pour tout $g \in C$ et tout $\mu \in U(\mathfrak{g})$. Mais le développement de Taylor ([62, (2)]) implique alors que f est nulle dans un voisinage ouvert de g dans $G(\mathbb{Q}_p)$, ce qui achève la preuve. \square

Comme $X_C/X_{C'}$ est un espace complet, le second morphisme dans la Proposition 3.5.3 se factorise en un morphisme continu d'image dense :

$$(82) \quad ((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \widehat{\otimes}_{E, \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \longrightarrow X_C/X_{C'} \simeq (\pi_{C/C'})^{\vee}.$$

Supposons maintenant que les fermés C et C' sont de plus stables par multiplication à droite par $B(\mathbb{Q}_p)$ dans $G(\mathbb{Q}_p)$, de sorte que $(c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}}$ est muni d'une action à gauche de $B(\mathbb{Q}_p)$ par translation à droite sur les fonctions. Alors $((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee}$ est un $D(B(\mathbb{Q}_p), E)$ -module à droite et, comme dans la discussion qui suit (75), on a $F\delta_{b^{-1}} = b(F) = F(b^{-1}\cdot)$ pour $b \in B(\mathbb{Q}_p)$ et $F \in ((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee}$. De même X_C et $X_{C'}$ sont alors aussi des $D(B(\mathbb{Q}_p), E)$ -modules à droite et le morphisme $((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \rightarrow X_C/X_{C'}$ est $D(B(\mathbb{Q}_p), E)$ -linéaire. On munit $((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \widehat{\otimes}_{E, \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ de l'action à gauche de $B(\mathbb{Q}_p)$ donnée par :

$$(83) \quad b(F \otimes \mu) = b(F) \otimes \delta_b \mu \delta_{b^{-1}}$$

pour $b \in B(\mathbb{Q}_p)$, $F \in ((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee}$ et $\mu \in D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$. Noter que cette action préserve le sous-espace $((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \otimes_{E, \iota} U(\mathfrak{g}, E)$ car la conjugaison par δ_b sur $U(\mathfrak{g}, E)$ (vu dans $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$) est l'adjonction usuelle de b sur $U(\mathfrak{g}, E)$ (utiliser [45, (1.3)]). De même $B(\mathbb{Q}_p)$ agit à gauche sur X_C et $X_{C'}$ par la multiplication à droite par $\delta_{b^{-1}}$ dans $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_C$ et $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{C'}$ (via le (i) du Lemme 3.5.1), et le morphisme (82) est $B(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant pour ces actions.

Par ailleurs l'action (à gauche) de $B(\mathbb{Q}_p)$ sur $D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ donnée par la conjugaison par δ_b provient par dualité de l'action à gauche de $B(\mathbb{Q}_p)$ sur $C_1^{\omega}(G(\mathbb{Q}_p), E) = \varinjlim_U C^{\text{an}}(U, E)$ (cf. (42)) induite par :

$$(84) \quad f \in C^{\text{an}}(U, E) \mapsto (g \mapsto f(b^{-1}gb)) \in C^{\text{an}}(bUb^{-1}, E),$$

et on vérifie facilement que cette action de $B(\mathbb{Q}_p)$ sur l'espace de type compact $C_1^{\omega}(G(\mathbb{Q}_p), E)$ est une représentation localement analytique de $B(\mathbb{Q}_p)$. Ainsi, par [57, Prop. 20.13] et [31, Prop. 3.6.18], l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ en (83) provient par dualité de la représentation localement analytique de $B(\mathbb{Q}_p)$ agissant (de manière diagonale) sur l'espace de type compact :

$$(85) \quad (c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}} \widehat{\otimes}_E C_1^{\omega}(G(\mathbb{Q}_p), E).$$

Cette représentation localement analytique servira dans la preuve de la Proposition 3.6.2.

Remarque 3.5.4. — (i) Lorsque les fermés C et C' sont stables par multiplication à droite par $B(\mathbb{Q}_p)$ dans $G(\mathbb{Q}_p)$, on vérifie aussi que les morphismes de la Proposition 3.5.3 et en (82) se factorisent en des morphismes continus canoniques $B(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants d'image dense :

$$\begin{aligned} & ((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \otimes_{U(\mathfrak{b}, E), \iota} U(\mathfrak{g}, E) \\ & \longrightarrow ((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \widehat{\otimes}_{D(B(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}, \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \longrightarrow X_C/X_{C'} \end{aligned}$$

où le terme de gauche est muni de la topologie quotient de $((c\text{-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C \setminus C'} \pi_P)^{\text{an}})^{\vee} \otimes_{E, \iota} U(\mathfrak{g}, E)$.

(ii) Un cas particulier de la Proposition 3.5.3 est lorsque l'on prend $C' = \emptyset$ (donc $C = C \setminus C'$ est alors une variété localement \mathbb{Q}_p -analytique paracompacte fermée dans $G(\mathbb{Q}_p)$). Dans ce cas, on a des morphismes continus canoniques $B(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants d'image dense :

$$\left((\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^C \pi_P)^{\text{an}} \right)^\vee \otimes_{E, \iota} U(\mathfrak{g}, E) \rightarrow \left((\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^C \pi_P)^{\text{an}} \right)^\vee \widehat{\otimes}_{E, \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \rightarrow X_C$$

qui se factorisent comme dans le (i).

3.6. Le cas des cellules non ouvertes. — On montre que le foncteur F_α est nul sur le complémentaire de la cellule ouverte d'induites paraboliques localement analytiques.

On conserve toutes les notations du § 3.5 et on suppose d'abord de plus que l'action de $P(\mathbb{Q}_p)$ sur π_P se factorise par $L_P(\mathbb{Q}_p)$. On note \leq l'ordre de Bruhat sur W , $\text{lg}(w)$ la longueur d'un élément $w \in W$, w_0 l'élément de W de longueur maximale, W_P le groupe de Weyl de L_P et :

$$W_P^{\min} \stackrel{\text{déf}}{=} \{w \in W, \text{lg}(w) \text{ est minimale dans la classe à gauche } W_P w\} \subseteq W.$$

(Noter que $w_0 \in W_P^{\min}$ si et seulement si $P = B$.) Chaque $P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p)$ pour $w \in W$ est une variété localement \mathbb{Q}_p -analytique paracompacte et si $w \in W_P^{\min}$ on a $\dim(P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p)) = \dim(P(\mathbb{Q}_p)) + \text{lg}(w)$. De plus pour $w \in W_P^{\min}$ on a (où $\overline{(-)}$ est l'adhérence de $(-)$ dans $G(\mathbb{Q}_p)$) :

$$\overline{P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p)} = \coprod_{w' \in W_P^{\min}, w' \leq w} P(\mathbb{Q}_p)w'B(\mathbb{Q}_p) \quad \text{et} \quad G(\mathbb{Q}_p) = \coprod_{w' \in W_P^{\min}} P(\mathbb{Q}_p)w'B(\mathbb{Q}_p)$$

avec $P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p)$ ouvert (dense) dans $\overline{P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p)}$ (toutes ces assertions se déduisent par exemple de [39, § 2.3] et des références dans *loc.cit.*). On déduit de cela qu'il existe un entier $t \geq 1$ et une suite strictement croissante de fermés $C_0 \stackrel{\text{déf}}{=} P(\mathbb{Q}_p) \subsetneq C_1 \subsetneq \cdots \subsetneq C_t \subsetneq G(\mathbb{Q}_p)$ tels que :

$$(86) \quad C_i \setminus C_{i-1} = \coprod_{w \in W_P^{\min}, \text{lg}(w)=i} P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p), \quad 1 \leq i \leq t \quad \text{et} \quad G(\mathbb{Q}_p) \setminus C_t = P(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p).$$

De plus $C_i \setminus C_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq t$ est un ouvert dense de C_i qui vérifie toutes les conditions avant et après (79) (notons que les variétés $P(\mathbb{Q}_p) \setminus (C_i \setminus C_{i-1})$ sont même ici affines).

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.6.1. — (i) Notons R_P les racines du Levi L_P et soit $w \in W_P^{\min}$ tel que $w \notin W_P w_0$. Alors il existe $\gamma \in S$ tel que $w(\gamma) \in R^+ \setminus (R^+ \cap R_P)$.

(ii) Soit $w \in W_P^{\min}$, alors on a $N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w \xrightarrow{\sim} N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}P(\mathbb{Q}_p)w$.

Démonstration. — (i) En fait le même énoncé est vrai plus généralement avec n'importe quel élément w de W tel que $w \notin W_P w_0$. Supposons en effet

$w(S) \cap (R^+ \setminus R_P^+) = \emptyset$ (où $R_P^+ = R^+ \cap R_P =$ racines positives de L_P), i.e. $w(S) \subseteq (-R^+) \cup R_P^+$ (puisque $R = (R^+ \setminus R_P^+) \amalg ((-R^+) \cup R_P^+)$), alors $S \subseteq (-w^{-1}(R^+)) \cup w^{-1}(R_P^+)$ et donc $B \subseteq w^{-1}P^-w$. En particulier $w^{-1}P^-w$ est un sous-groupe parabolique de G contenant B . Mais il est conjugué à $w_0P^-w_0$ qui est un autre sous-groupe parabolique de G contenant B . Il s'ensuit que ces deux sous-groupes paraboliques de G à la fois standard et conjugués sont égaux, et donc $P^- = w_0w^{-1}P^-ww_0$. Cela implique $w_0w^{-1} \in W_P (=$ le groupe de Weyl de L_P), i.e. $w \in W_Pw_0$ ce qui contredit l'hypothèse de départ.

(ii) Par la preuve de [39, Lem. 2.3.2] (elle-même déduite d'un lemme de Borel-Tits), on a un homéomorphisme :

$$B(\mathbb{Q}_p) \backslash B(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} P(\mathbb{Q}_p) \backslash P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p).$$

Or le terme de gauche est isomorphe à $(N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w) \backslash N(\mathbb{Q}_p)$ et celui de droite à $(N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}P(\mathbb{Q}_p)w) \backslash N(\mathbb{Q}_p)$, d'où le résultat. \square

Proposition 3.6.2. — *Soit π_P une représentation localement analytique de $P(\mathbb{Q}_p)$ sur un E -espace vectoriel de type compact telle que l'action de $P(\mathbb{Q}_p)$ se factorise par $L_P(\mathbb{Q}_p)$, on a :*

$$F_\alpha \left(\left(\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P \right)^{\text{an}} / \left(\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{P(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p)} \pi_P \right)^{\text{an}} \right) = 0.$$

Démonstration. — **Étape 1**

Par (86), il faut montrer $F_\alpha(\pi_{C_t}) = 0$. Pour $i \in \{1, \dots, t\}$ on a une suite exacte (stricte) dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ (cf. (81)) :

$$0 \longrightarrow \pi_{C_i/C_{i-1}} \longrightarrow \pi_{C_i} \longrightarrow \pi_{C_{i-1}} \longrightarrow 0.$$

Par le (i) de la Proposition 2.3.4 et un dévissage évident, il suffit de montrer $F_\alpha(\pi_{C_0}) = F_\alpha(\pi_{C_i/C_{i-1}}) = 0$ pour $i \in \{1, \dots, t\}$. Par la définition de F_α (cf. (31) et (37)), il suffit de montrer que, pour $- \in \{\pi_{C_0}, \pi_{C_1/C_0}, \dots, \pi_{C_t/C_{t-1}}\}$, pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$, T_r un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r et f un morphisme $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire continu commutant à ψ :

$$f : M_\alpha(- \otimes_E E_m) \longrightarrow T_r \otimes_E E_m,$$

il existe $m' \gg m$ et $r' \gg r$ tels que la composée :

$$(87) \quad M_\alpha(- \otimes_E E_{m'}) \xrightarrow{(35)} M_\alpha(- \otimes_E E_m) \otimes_{E_m} E_{m'} \xrightarrow{f \otimes \text{Id}} (T_r \otimes_E E_m) \otimes_{E_m} E_{m'} \longrightarrow T_{r'} \otimes_E E_{m'}$$

est nulle.

Étape 2

Pour sa simplicité, et pour rendre plus lisibles les étapes qui suivent, on traite d'abord le cas de X_{C_0} (même s'il est en fait un cas particulier des étapes suivantes). Fixons $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tel que $\eta|_{N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m} \neq 1$, $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$, T_r un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r et $f : M_\alpha(\pi_{C_0} \otimes_E E_m) \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$ un morphisme $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire continu commutant à ψ . L'objectif de cette étape est de montrer que f est nul (il n'est nécessaire ici d'augmenter ni m ni r).

Par la Proposition 3.5.3 et le (ii) de la Remarque 3.5.4, on a une application continue $B(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante d'image dense :

$$(\pi_P)^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E), \iota} U(\mathfrak{g}, E) \longrightarrow X_{C_0}$$

qui induit une autre application continue d'image dense en appliquant $(-\otimes_E E_m)(\eta)_{N_m^\alpha}$ des deux côtés et en notant que $-\otimes_E E_m \rightarrow (-\otimes_E E_m)(\eta)_{N_m^\alpha}$ est continu et surjectif (pour la topologie quotient à droite) :

$$(88) \quad ((\pi_P)^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E), \iota} U(\mathfrak{g}, E_m))(\eta)_{N_m^\alpha} \longrightarrow (X_{C_0} \otimes_E E_m)(\eta)_{N_m^\alpha}.$$

Comme on a une surjection continue $(X_{C_0} \otimes_E E_m)(\eta)_{N_m^\alpha} \twoheadrightarrow M_\alpha(\pi_{C_0} \otimes_E E_m)$ par (18), il suffit donc avec (88) de montrer que pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$, T_r un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r , tout morphisme continu commutant à l'action de $N_0/N_0^\alpha \simeq N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_0 \simeq \mathbb{Z}_p$:

$$(89) \quad ((\pi_P)^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E), \iota} U(\mathfrak{g}, E_m))(\eta)_{N_m^\alpha} \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$$

est nul.

Fixons une numérotation $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ des racines de R^+ , par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt ([41, Th. 1.2(a)]) on a une décomposition $U(\mathfrak{n}^-, E_m) \simeq \bigoplus_{(d_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^h} E_m x_{\alpha_1}^{d_1} x_{\alpha_2}^{d_2} \cdots x_{\alpha_h}^{d_h}$ où x_{α_i} est une base de la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie du sous-groupe radiciel $N_{-\alpha_i}^-(\mathbb{Q}_p) \subseteq N^-(\mathbb{Q}_p)$ associé à $-\alpha_i$. Comme $U(\mathfrak{g}, E_m) = U(\mathfrak{b}, E) \otimes_E U(\mathfrak{n}^-, E_m)$, on en déduit une décomposition :

$$(90) \quad (\pi_P)^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E)} U(\mathfrak{g}, E_m) \simeq \bigoplus_{(d_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^h} (\pi_P \otimes_E E_m)^\vee \otimes_{E_m} E_m x_{\alpha_1}^{d_1} \cdots x_{\alpha_h}^{d_h}$$

et $(\pi_P)^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E)} U(\mathfrak{g}, E_m)$ est donc la réunion croissante sur $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ des sous-espaces :

$$(91) \quad ((\pi_P)^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E)} U(\mathfrak{g}, E_m))^{\leq d} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_{\substack{(d_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^h \\ \sum_i d_i \leq d}} (\pi_P \otimes_E E_m)^\vee \otimes_{E_m} E_m x_{\alpha_1}^{d_1} \cdots x_{\alpha_h}^{d_h}.$$

De plus $n \in N(\mathbb{Q}_p)$ agit sur un élément $v \otimes \mu \in (\pi_P)^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E)} U(\mathfrak{g}, E_m)$ par $n(v) \otimes \text{Ad}(n)(\mu)$ où $\text{Ad}(n)$ est l'action par adjonction de $N(\mathbb{Q}_p)$ sur $U(\mathfrak{g}, E_m)$ (cf. (83) et la phrase qui suit). En écrivant $n = \exp(y)$ pour $y \in \mathfrak{n}$, on a $\text{Ad}(n) = \exp(\text{ad}(y))$ où $\text{ad}(y)(\mu) = [y, \mu]$ pour $\mu \in U(\mathfrak{g}, E_m)$. En utilisant les formules usuelles pour $[y, \mu]$ lorsque $\mu \in U(\mathfrak{n}^-, E_m)$ (cf. par exemple [43, § II.1.2], [41, § 1.4]), on voit facilement d'une part que les sous-espaces (91) sont tous stables par l'action de $N(\mathbb{Q}_p)$, d'autre part qu'ils sont des extensions successives finies de la $N(\mathbb{Q}_p)$ -représentation $(\pi_P \otimes_E E_m)^\vee$. Par exemple si $d = 0$, on a $((\pi_P)^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E)} U(\mathfrak{g}, E_m))^{\leq 0} = (\pi_P \otimes_E E_m)^\vee$, si $d = 1$ on a :

$$\begin{aligned} ((\pi_P)^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E)} U(\mathfrak{g}, E_m))^{\leq 1} / (\pi_P \otimes_E E_m)^\vee &\simeq \bigoplus_{i=1}^h (\pi_P \otimes_E E_m)^\vee \otimes_{E_m} E_m x_{\alpha_i} \\ &\simeq ((\pi_P \otimes_E E_m)^\vee)^{\oplus h} \end{aligned}$$

et ainsi de suite (cet argument s'inspire du paragraphe précédant [46, Lem. 8.4]). En utilisant que le foncteur $(-)(\eta)_{N_m^\alpha}$ commute aux limites inductives filtrantes et est exact à droite, il suffit donc pour montrer (89) de montrer qu'un morphisme de $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -modules :

$$(92) \quad (\pi_P \otimes_E E_m)^\vee(\eta)_{N_m^\alpha} \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$$

est nul. Supposons d'abord $\alpha \notin S_P$, alors l'action de $N_0/N_0^\alpha \simeq \mathbb{Z}_p$ sur $(\pi_P)^\vee$ est triviale puisque π_P est une représentation de $L_P(\mathbb{Q}_p)$. En particulier $X \in \mathcal{R}_{E_m}^+$ annule le terme de gauche en (92) alors qu'il est inversible sur celui de droite, d'où le résultat. Supposons maintenant $\alpha \in S_P$. Comme $N_P(\mathbb{Q}_p)$ agit trivialement sur $(\pi_P)^\vee$ et $\eta|_{N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m} \neq 1$, on a en fait $(\pi_P \otimes_E E_m)^\vee(\eta)_{N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m} = 0$, d'où directement $(\pi_P \otimes_E E_m)^\vee(\eta)_{N_m^\alpha} = 0$ puisque $N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m \subseteq N_m^\alpha$ dans ce cas.

Étape 3

Soit $i \in \{1, \dots, t\}$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$, T_r un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r et fixons jusqu'à la fin de cette preuve un morphisme $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire continu commutant à ψ :

$$(93) \quad f : M_\alpha(\pi_{C_i/C_{i-1}} \otimes_E E_m) \longrightarrow T_r \otimes_E E_m.$$

Rappelons qu'il suffit de montrer qu'il existe $m' \gg m$ et $r' \gg r$ tels que la composée (87) est nulle.

Par la discussion précédant la Remarque 3.5.4, le morphisme $B(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant (82) tensorisé par E_m induit un morphisme continu de $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -modules qui commute à ψ :

$$(94) \quad D : M_\alpha((\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C_i \setminus C_{i-1}} \pi_P)^{\text{an}} \widehat{\otimes}_E C_1^\omega(G(\mathbb{Q}_p), E_m)) \longrightarrow M_\alpha(\pi_{C_i/C_{i-1}} \otimes_E E_m).$$

De plus, comme $(-) \rightarrow (-)(\eta)_{N_m^\alpha}^{\text{sép}}$ est un morphisme surjectif et comme l'image de (82) est dense, l'application D est d'image dense (cf. (18)). On peut donc remplacer le morphisme f par la composée $f \circ D$. Par (86), [45, Lem. 1.2.13] (et ce qui précède la Remarque 3.5.4), on a un isomorphisme dans $\text{Rep}_{E_m}^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$:

$$\begin{aligned} & (\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C_i \setminus C_{i-1}} \pi_P)^{\text{an}} \widehat{\otimes}_E C_1^\omega(G(\mathbb{Q}_p), E_m) \\ & \simeq \bigoplus_{w \in W^{\text{min}}, \text{lg}(w)=i} (\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}} \widehat{\otimes}_E C_1^\omega(G(\mathbb{Q}_p), E_m), \end{aligned}$$

et on peut donc remplacer $(\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{C_i \setminus C_{i-1}} \pi_P)^{\text{an}}$ dans (94) par $(\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}}$.

Étape 4

Considérons un morphisme $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire continu commutant à ψ quelconque :

$$(95) \quad h : M_\alpha((\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}} \widehat{\otimes}_E C_1^\omega(G(\mathbb{Q}_p), E_m)) \longrightarrow T_r \otimes_E E_m.$$

On montre dans cette étape en utilisant le Lemme 3.2.10 que h se factorise par un quotient "à support borné" de la source (comme dans la preuve du Lemme 3.4.3).

Soit $(\pi_P)^w$ la représentation de $w^{-1}P(\mathbb{Q}_p)w$ donnée par π_P avec $g \in w^{-1}P(\mathbb{Q}_p)w$ agissant par $wgw^{-1} \in P(\mathbb{Q}_p)$. Comme dans la discussion avant le Lemme 3.4.3, on vérifie en utilisant (79) avec $P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p)$ au lieu de $C \setminus C'$ puis le (ii) du Lemme 3.6.1 que l'on a un isomorphisme topologique $B(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant :

$$(96) \quad \left(\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p)} \pi_P \right)^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} \left(\text{c-Ind}_{N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w}^{N(\mathbb{Q}_p)} (\pi_P)^w \right)^{\text{an}}$$

$$H \longmapsto (g \mapsto H(wg))$$

où à droite il s'agit des fonctions localement analytiques sur $N(\mathbb{Q}_p)$ à support compact modulo $N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w$ (vérifiant l'équation fonctionnelle) avec l'action de $N(\mathbb{Q}_p)$ donnée par la translation à droite sur les fonctions et l'action de $T(\mathbb{Q}_p)$ donnée par $(t\lambda)(g) = t(\lambda(t^{-1}gt))$ pour $\lambda \in \left(\text{c-Ind}_{N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w}^{N(\mathbb{Q}_p)} (\pi_P)^w \right)^{\text{an}}$ (où $t \in T(\mathbb{Q}_p) \subseteq w^{-1}P(\mathbb{Q}_p)w$ agit sur $\lambda(t^{-1}gt)$ par $(\pi_P)^w$). Notons :

$$N_{w<0}(\mathbb{Q}_p) \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\gamma \in R^+, w(\gamma) < 0} N_\gamma(\mathbb{Q}_p),$$

alors on a $N_{w<0}(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} (N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w) \setminus N(\mathbb{Q}_p)$ (pour un ordre quelconque sur les $\gamma \in R^+$ tels que $w(\gamma) < 0$) d'où on déduit :

$$(97) \quad \left(\text{c-Ind}_{N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w}^{N(\mathbb{Q}_p)} (\pi_P)^w \right)^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} C_c^{\text{an}}(N_{w<0}(\mathbb{Q}_p), (\pi_P)^w)$$

où à droite rappelons qu'il s'agit des fonctions localement analytiques à support compact (cf. § 3.2). Comme N_m est totalement décomposé (cf. (8)), on a :

$$(w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w \cap N_m) \times (N_{w<0}(\mathbb{Q}_p) \cap N_m) \xrightarrow{\sim} N_m$$

d'où un isomorphisme :

$$(98) \quad \left(\text{Ind}_{N_m \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w}^{N_m} (\pi_P)^w \right)^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} C^{\text{an}}(N_{w<0}(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, (\pi_P)^w)$$

et avec (97) :

$$\lim_{\overrightarrow{m}} \left(\text{Ind}_{N_m \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w}^{N_m} (\pi_P)^w \right)^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} \left(\text{c-Ind}_{N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w}^{N(\mathbb{Q}_p)} (\pi_P)^w \right)^{\text{an}}$$

où les applications de transition à gauche sont clairement injectives. Pour alléger, on note dans la suite pour $m' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$I(m') \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\text{Ind}_{N_{m'} \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w}^{N_{m'}} (\pi_P)^w \right)^{\text{an}}.$$

Le sous-espace $I(m)$ vu dans $\left(\text{c-Ind}_{N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w}^{N(\mathbb{Q}_p)} (\pi_P)^w \right)^{\text{an}}$ est stable par l'action ci-dessus de N_m et $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$, ainsi que par celle d'un sous-groupe ouvert compact suffisamment petit T_0 de $T(\mathbb{Q}_p)$ (par exemple $T(\mathbb{Z}_p)$ lorsque $G = \text{GL}_n$). De plus, en utilisant (97) et (98), on a une décomposition en somme directe topologique de $\left(\text{c-Ind}_{N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w}^{N(\mathbb{Q}_p)} (\pi_P)^w \right)^{\text{an}}$ analogue à (67). Munissons l'espace de type compact $I(m) \widehat{\otimes}_E C_1^\omega(G(\mathbb{Q}_p), E_m)$ de l'action diagonale de N_m et $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ (par (84)

sur $C_1^\omega(G(\mathbb{Q}_p), E_m)$. En utilisant [45, Lem. 1.2.13] et [57, Lem. 5.3(iii)], on peut appliquer le Lemme 3.2.10 à :

$$\pi = (\mathfrak{c}\text{-Ind}_{N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w}^{N(\mathbb{Q}_p)}(\pi_P)^w)^{\text{an}} \widehat{\otimes}_E C_1^\omega(G(\mathbb{Q}_p), E_m), \pi_m = I(m) \widehat{\otimes}_E C_1^\omega(G(\mathbb{Q}_p), E_m).$$

Il existe donc un entier $m'' \gg m$ tel que le morphisme h en (95) se factorise par $M_\alpha(I(m'') \widehat{\otimes}_E C_1^\omega(G(\mathbb{Q}_p), E_m))$. En appliquant cela au morphisme $h = f \circ D$ de l'Étape 3 (avec $P(\mathbb{Q}_p)wB(\mathbb{Q}_p)$ au lieu de $C_i \setminus C_{i-1}$), on obtient que $f \circ D$ se factorise en un morphisme $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire continu commutant à ψ (encore noté $f \circ D$) :

$$(99) \quad f \circ D : M_\alpha(I(m'') \widehat{\otimes}_E C_1^\omega(G(\mathbb{Q}_p), E_m)) \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$$

pour un $m'' \gg m$. Il suffit donc de montrer qu'il existe $m' \gg m$ et $r' \gg r$ tels que la composée analogue à (87) avec $f \circ D$ en (99) au lieu de f est nulle.

Étape 5

Par (18) et la discussion précédant la Remarque 3.5.4, le terme de gauche dans (99) est un quotient de :

$$(100) \quad (I(m'')^\vee \widehat{\otimes}_E D(G(\mathbb{Q}_p), E_m)_{\{1\}})(\eta)_{N_m^\alpha}$$

et il suffit donc de montrer l'analogie de (99) en remplaçant ce terme de gauche par (100). Comme dans le (i) de la Remarque 3.5.4, le (nouveau) morphisme $f \circ D$ se factorise par un morphisme $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire continu commutant à ψ (encore noté $f \circ D$) :

$$f \circ D : (I(m'')^\vee \widehat{\otimes}_{D(B(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}, \iota} D(G(\mathbb{Q}_p), E_m)_{\{1\}})(\eta)_{N_m^\alpha} \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$$

(noter que $I(m'')^\vee$ est bien un $D(B(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ -module à droite car $D(B(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} = D(B_0, E)_{\{1\}}$ pour tout sous-groupe ouvert compact B_0 de $B(\mathbb{Q}_p)$ par (42)). En utilisant [45, Prop. 1.2.8], le Lemme 3.2.4, et le fait que $-\otimes_E E_m \rightarrow (-\otimes_E E_m)(\eta)_{N_m^\alpha}$ est continu surjectif, il suffit comme dans l'Étape 2 de montrer que tout morphisme continu commutant à l'action de $N_0/N_0^\alpha \simeq N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_0 \simeq \mathbb{Z}_p$:

$$(101) \quad (I(m'')^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E), \iota} U(\mathfrak{g}, E_m))(\eta)_{N_m^\alpha} \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$$

devient nul dans $T_{r'} \otimes_E E_m$ pour $r' \gg r$ quitte à augmenter m .

Comme en (90) et (91), $I(m'')^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E)} U(\mathfrak{g}, E_m)$ s'écrit comme réunion croissante de sous-espaces stables par $N_{m''}$ qui sont des extensions successives finies de la $N_{m''}$ -représentation $(I(m'') \otimes_E E_m)^\vee$. En utilisant que le foncteur $(-)(\eta)_{N_m^\alpha}$ commute aux limites inductives filtrantes et est exact à droite, il suffit donc pour montrer (101) de montrer qu'un morphisme continu de $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -modules :

$$(I(m'') \otimes_E E_m)^\vee(\eta)_{N_m^\alpha} \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$$

est nul quitte à augmenter r et m . Noter qu'un tel morphisme se factorise par :

$$(102) \quad (I(m'') \otimes_E E_m)^\vee(\eta)_{N_m^\alpha}^{\text{sép}} \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$$

où $(I(m'') \otimes_E E_m)^\vee(\eta)_{N_m^\alpha}^{\text{sép}}$ est le dual de $(I(m'') \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$ par la preuve du (i) du Lemme 2.1.3.

Par le (i) du Lemme 3.6.1, il existe une racine simple γ telle que $N_\gamma(\mathbb{Q}_p) \subseteq w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w$ et $N_\gamma(\mathbb{Q}_p)$ agit trivialement sur la $w^{-1}P(\mathbb{Q}_p)w$ -représentation $(\pi_P)^w$ (rappelons que l'action de $P(\mathbb{Q}_p)$ sur π_P se factorise par $L_P(\mathbb{Q}_p)$).

Supposons d'abord que l'on peut prendre $\gamma = \alpha$. Comme $N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ agit alors trivialement sur $(\pi_P)^w$, l'action de $N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_0$ sur $I(m'')$ est donnée par :

$$(103) \quad \lambda \longmapsto (n_{m''} \mapsto \lambda(n_{m''}n_\alpha) = \lambda(n_\alpha^{-1}n_{m''}n_\alpha)).$$

Notons $N^{(2)} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\delta \in R^+ \setminus S} N_\delta$, qui est un sous-groupe normal de N tel que $N/N^{(2)}$ est abélien, et $N_m^{(2)} \stackrel{\text{déf}}{=} N^{(2)}(\mathbb{Q}_p) \cap N_m$, il existe un sous-groupe ouvert compact suffisamment petit $p^M \mathbb{Z}_p$ de $N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_0 \simeq \mathbb{Z}_p$ tel que pour tout $n_\alpha \in p^M \mathbb{Z}_p$ et tout $n_{m''} \in N_{m''}$ on a :

$$n_\alpha^{-1}n_{m''}n_\alpha \in n_{m''}N_m^{(2)}$$

(on utilise que les “dénominateurs en p ” dans $N_{m''}$ sont bornés). Cela implique que l'action de $n_\alpha \in p^M \mathbb{Z}_p$ induite par (103) sur le sous-espace $I(m'')^{N_m^{(2)}}$ est triviale, donc *a fortiori* aussi sur :

$$(104) \quad (I(m'') \otimes_E E_m)(\eta^{-1})^{N_m^\alpha} \subseteq (I(m'') \otimes_E E_m)^{N_m^{(2)}}$$

(rappelons que $\eta|_{N^{(2)}(\mathbb{Q}_p)} = 1$). Donc $(1+X)^{p^M} - 1 \in \mathcal{R}_{E_m}^+$ agit par 0 sur le dual de $(I(m'') \otimes_E E_m)(\eta^{-1})^{N_m^\alpha}$. Soit maintenant $r' \gg r$ tel que $(1+X)^{p^M} - 1$ est inversible dans $\mathcal{R}_{E_m}^{r'}$ (cf. la preuve du Lemme 3.3.4) et considérons (102) avec r' au lieu de r : $(1+X)^{p^M} - 1$ annule le terme de gauche alors qu'il est inversible sur celui de droite par choix de r' , donc le morphisme (102) devient nul dans $T_{r'} \otimes_E E_m$. Ceci achève la preuve lorsque l'on peut prendre $\gamma = \alpha$ (noter qu'il n'est pas nécessaire ici d'augmenter m).

Supposons maintenant que l'on peut prendre $\gamma \neq \alpha$, i.e. $N_\gamma \subseteq N^\alpha$ (cf. § 2.1). Quitte à augmenter m , on peut supposer $m = m''$ dans (99), et quitte à augmenter encore m'' si nécessaire, on peut de plus supposer $\eta|_{N_\gamma(\mathbb{Q}_p) \cap N_{m''}} \neq 1$. Montrons que l'on a dans ce cas en fait $(I(m'') \otimes_E E_{m''})^\vee (\eta)_{N_{m''}^\alpha}^{\text{sép}} = 0$, i.e. :

$$(105) \quad (I(m'') \otimes_E E_{m''})(\eta^{-1})^{N_{m''}^\alpha} = 0.$$

Comme en (103), l'action de $n_\gamma \in N_\gamma(\mathbb{Q}_p) \cap N_{m''}$ sur $I(m'')$ est donnée par $\lambda \mapsto (n_{m''} \mapsto \lambda(n_{m''}n_\gamma) = \lambda(n_\gamma^{-1}n_{m''}n_\gamma))$ avec $n_\gamma^{-1}n_{m''}n_\gamma \in n_{m''}N_{m''}^{(2)}$, donc elle est triviale sur le sous-espace $I(m'')^{N_{m''}^{(2)}}$. Comme $\eta^{-1}|_{N_{m''}^{(2)}} = 1$ mais $\eta^{-1}|_{N_\gamma(\mathbb{Q}_p) \cap N_{m''}} \neq 1$, on en déduit :

$$\left((I(m'') \otimes_E E_{m''})^{N_{m''}^{(2)}} \right) (\eta^{-1})^{N_\gamma(\mathbb{Q}_p) \cap N_{m''}} = (I(m'') \otimes_E E_{m''})(\eta^{-1})^{N_{m''}^{(2)}(N_\gamma(\mathbb{Q}_p) \cap N_{m''})} = 0$$

d'où on obtient (105) puisque $N_{m''}^{(2)}(N_\gamma(\mathbb{Q}_p) \cap N_{m''}) \subseteq N_{m''}^\alpha$. Noter qu'il n'est pas nécessaire ici d'augmenter r . Cela achève la preuve de la proposition. \square

Remarque 3.6.3. — Au vu de la Proposition 3.5.3 et de l'Étape 2 dans la preuve de la Proposition 3.6.2, on pourrait penser montrer directement dans les Étapes 4 et 5 que tout morphisme continu commutant à l'action de $N_0/N_0^\alpha \simeq \mathbb{Z}_p$:

$$\left(\left(\left(\text{c-Ind}_{N(\mathbb{Q}_p) \cap w^{-1}N(\mathbb{Q}_p)w}^{N(\mathbb{Q}_p)} (\pi_P)^w \right)^{\text{an}} \right)^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E), \iota} U(\mathfrak{g}, E_m) \right) (\eta)_{N_m^\alpha} \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$$

devient nul en augmentant m et r , ce qui éviterait d'introduire les représentations localement analytiques (85) et tout ce qu'il faut pour les définir. Mais nous n'avons réussi à montrer cela qu'en partant d'un morphisme $(I(m'')^\vee \otimes_{U(\mathfrak{b}, E), \iota} U(\mathfrak{g}, E_m)) (\eta)_{N_m^\alpha} \rightarrow T_r \otimes_E E_m$ pour un m'' suffisamment grand mais fini (voir l'Étape 5). Et pour se ramener à un tel $I(m'')$, nous ne savons pas faire autrement que d'utiliser le Lemme 3.2.10, qui nécessite des espaces de Fréchet.

La Proposition 3.6.2 s'étend à des représentations π_P un petit peu plus générales.

Corollaire 3.6.4. — Soit π_P une représentation localement analytique de $P(\mathbb{Q}_p)$ sur un E -espace vectoriel de type compact qui est une extension successive finie de représentations localement analytiques sur lesquelles l'action de $P(\mathbb{Q}_p)$ se factorise par $L_P(\mathbb{Q}_p)$. Alors on a :

$$F_\alpha \left(\left(\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P \right)^{\text{an}} / \left(\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{P(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p)} \pi_P \right)^{\text{an}} \right) = 0.$$

Démonstration. — Par dévissage et la Proposition 3.6.2, on peut supposer que l'on a une suite exacte courte (stricte) $0 \rightarrow \pi_P'' \rightarrow \pi_P \rightarrow \pi_P' \rightarrow 0$ de représentations localement analytiques de $P(\mathbb{Q}_p)$ (sur des espaces de type compact) où l'énoncé du corollaire est vrai pour π_P' et π_P'' . Par (60) et le Lemme 3.4.2 appliqués avec P au lieu de P^- et $U = P(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p)$, et en utilisant [64, Lem. 4.13] (combiné avec [57, Prop. 20.13] et [57, Cor. 20.14] pour se ramener à des espaces de Fréchet), on a un diagramme commutatif de suites exactes dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ en posant $U \stackrel{\text{déf}}{=} P(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p)$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^U \pi_P'')^{\text{an}} & \longrightarrow & (\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^U \pi_P)^{\text{an}} & \longrightarrow & (\text{c-Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^U \pi_P')^{\text{an}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P'')^{\text{an}} & \longrightarrow & (\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}} & \longrightarrow & (\text{Ind}_{P(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P')^{\text{an}} \longrightarrow 0. \end{array}$$

En appliquant le (i) de la Proposition 2.3.4 à la suite exacte conoyau, par les hypothèses sur π_P' et π_P'' on en déduit l'énoncé. \square

3.7. Foncteurs F_α et représentations $\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$. — On énonce et démontre les résultats principaux du § 3.

On conserve toutes les notations précédentes. On rappelle que les caractères algébriques $\chi_\lambda : \text{Gal}(E_\infty/E) \rightarrow E^\times$ pour $\lambda \in X(T)$ sont définis avant le Théorème

3.3.1. Dans tout ce paragraphe, on fixe $P \subseteq G$ un sous-groupe parabolique contenant B .

Théorème 3.7.1. — Soit W une représentation algébrique de $P^-(\mathbb{Q}_p)$ de dimension finie sur E , π_P^∞ une représentation lisse de longueur finie de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E admettant un caractère central $\chi_{\pi_P^\infty}$ et $d_{\pi_P^\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} \dim_{E_\infty}(\pi_P^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N_{L_P}(\mathbb{Q}_p)}$. Supposons $\alpha \notin S_P$, alors le foncteur $F_\alpha((\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} W \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}})$ est isomorphe à :

$$\bigoplus_i E_\infty(\chi_{-\lambda_i}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)} \left(\mathcal{R}_E((\lambda_i \circ \lambda_{\alpha^\vee})(\chi_{\pi_P^\infty}^{-1} \circ \lambda_{\alpha^\vee}))^{\oplus d_{\pi_P^\infty}}, - \right)$$

où les $\lambda_i \in X(T)$ sont tels que $W|_{L_P} = \bigoplus_i L(-\lambda_i)_P$. En particulier $F_\alpha((\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} W \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}})$ est nul si et seulement si π_P^∞ n'a pas de constituant générique.

Démonstration. — On note $Q \stackrel{\text{déf}}{=} w_0 P^- w_0 \subseteq G$ et $\pi_P \stackrel{\text{déf}}{=} W \otimes_E \pi_P^\infty$. Comme $w_0(S) = -S$, Q est un sous-groupe parabolique contenant B . On note $\tilde{\pi}_Q$ la représentation localement algébrique de longueur finie de $Q(\mathbb{Q}_p)$ donnée par π_P mais avec $g \in Q(\mathbb{Q}_p)$ agissant par $w_0 g w_0 \in P^-(\mathbb{Q}_p)$. On a un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p)$ -équivalent :

$$(106) \quad (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} (\text{Ind}_{Q(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \tilde{\pi}_Q)^{\text{an}}, \quad f \mapsto (g \mapsto f(w_0 g))$$

qui envoie le sous-espace fermé $(\text{c-Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{P^-(\mathbb{Q}_p)P(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}}$ sur le sous-espace fermé $(\text{c-Ind}_{Q(\mathbb{Q}_p)}^{Q(\mathbb{Q}_p)w_0P(\mathbb{Q}_p)} \tilde{\pi}_Q)^{\text{an}}$. Une application du théorème 90 de Hilbert montre que le E_∞ -espace vectoriel $(\pi_P^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N_{L_P}(\mathbb{Q}_p)}$ de dimension $d_{\pi_P^\infty}$ muni de l'action semi-linéaire de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ définie dans la preuve du (i) du Lemme 2.3.2 est isomorphe à $E_\infty^{\oplus d_{\pi_P^\infty}}$ (avec action semi-linéaire évidente de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ sur chaque facteur). Par la Proposition 3.4.4 avec (64) et le (i) de la Proposition 2.3.4, on voit donc qu'il suffit de montrer :

$$(107) \quad F_\alpha \left((\text{Ind}_{Q(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \tilde{\pi}_Q)^{\text{an}} / (\text{c-Ind}_{Q(\mathbb{Q}_p)}^{Q(\mathbb{Q}_p)w_0P(\mathbb{Q}_p)} \tilde{\pi}_Q)^{\text{an}} \right) = 0.$$

Mais on a $Q(\mathbb{Q}_p)w_0P(\mathbb{Q}_p) = Q(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p)$ puisque :

$$(108) \quad \begin{aligned} Q(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p) &\subseteq Q(\mathbb{Q}_p)w_0P(\mathbb{Q}_p) = Q(\mathbb{Q}_p)(w_0L_P(\mathbb{Q}_p)w_0)w_0N_P(\mathbb{Q}_p) \\ &= Q(\mathbb{Q}_p)L_Q(\mathbb{Q}_p)w_0N_P(\mathbb{Q}_p) = Q(\mathbb{Q}_p)w_0N_P(\mathbb{Q}_p) \subseteq Q(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p), \end{aligned}$$

donc (107) suit du Corollaire 3.6.4 (appliqué avec $P = Q$), en notant que $\tilde{\pi}_Q$ est une extension successive finie de représentations localement algébriques de $Q(\mathbb{Q}_p)$ sur lesquelles l'action de $Q(\mathbb{Q}_p)$ se factorise par $L_Q(\mathbb{Q}_p)$ \square

Si $\alpha \in S_P$, alors on peut définir le foncteur F_α pour le triplet $(L_P, B \cap L_P, T)$ au lieu du triplet (G, B, T) en gardant le même cocaractère $\lambda_{\alpha^\vee} : \mathbb{G}_m \rightarrow T$, le foncteur ne dépendant pas des autres choix par la Proposition 2.3.6 (noter que le centre Z_{L_P} de L_P est bien encore connexe, cf. [11, § 6]).

Théorème 3.7.2. — Soit π_P une représentation localement analytique de $P^-(\mathbb{Q}_p)$ sur un E -espace vectoriel de type compact qui est une extension successive finie de représentations localement analytiques sur lesquelles l'action de $P^-(\mathbb{Q}_p)$ se factorise par $L_P(\mathbb{Q}_p)$. Alors on a un isomorphisme de foncteurs dans $F(\varphi, \Gamma)_\infty$:

$$F_\alpha((\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\text{an}}) \simeq F_\alpha(\pi_P|_{L_P(\mathbb{Q}_p)}).$$

Démonstration. — Par la Proposition 2.3.6, pour définir F_α pour $(L_P, B \cap L_P, T)$ on peut choisir $(\iota_\alpha)_{\alpha \in S_P}$, η et $(L_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m)_{m \geq 0}$ (où $(\iota_\alpha)_{\alpha \in S}$, η et $(N_m)_{m \geq 0}$ sont comme au § 2.1 pour (G, B, T)). On a des produits semi-directs analogues à ceux au début de la preuve de la Proposition 3.4.4 : $N^\alpha = N_P \rtimes N_{L_P}^\alpha$, $\mathfrak{n}^\alpha \simeq \mathfrak{n}_P \rtimes \mathfrak{n}_{L_P}^\alpha$ et $N_m^\alpha = (N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m) \rtimes (N_{L_P}^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Par le Lemme 3.4.3, le Corollaire 3.6.4 (en raisonnant comme dans la preuve du Théorème 3.7.1) et le (i) de la Proposition 2.3.4, il suffit de montrer $F_{\alpha, m}(C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P)) \simeq F_{\alpha, m}(\pi_P|_{L_P(\mathbb{Q}_p)})$ pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. On a des isomorphismes d'espaces de type compact (cf. (65)) :

$$\begin{aligned} C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P)[\mathfrak{n}^\alpha] &= (C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P)[\mathfrak{n}_P])[\mathfrak{n}_{L_P}^\alpha] \\ &= C^\infty(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P)[\mathfrak{n}_{L_P}^\alpha] \\ &\simeq (C^\infty(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E) \otimes_E \pi_P)[\mathfrak{n}_{L_P}^\alpha] \\ &\simeq C^\infty(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E) \otimes_E (\pi_P[\mathfrak{n}_{L_P}^\alpha]) \end{aligned}$$

(rappelons que les topologies projective et injective coïncident sur les deux produits tensoriels du bas, qui sont par ailleurs déjà complets par le même argument que pour (70)). On en déduit (avec le (ii) du Lemme 2.1.3) un isomorphisme d'espaces de type compact :

$$\begin{aligned} &C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \\ &\simeq (C^\infty(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E_m)(\eta^{-1})_{N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m} \otimes_{E_m} (\pi_P \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}_{L_P}^\alpha])(\eta^{-1})_{N_{L_P}^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m}. \end{aligned}$$

Comme dans la preuve de la Proposition 3.4.4, $C^\infty(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, E_m)(\eta^{-1})_{N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m}$ a dimension 1 engendré par la classe de $\eta|_{N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m}$ et l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ dessus est celle sur E_m par Hilbert 90. Par (65) on voit de plus que $N_{L_P}^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m$ et $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ agissent trivialement sur $\eta|_{N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m}$. On en déduit un isomorphisme d'espaces de type compact compatible aux actions de $N_m/N_m^\alpha \xrightarrow{\sim} (N_{L_P}(\mathbb{Q}_p) \cap N_m)/(N_{L_P}^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m)$, $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\})$ et $\text{Gal}(E_\infty/E)$:

$$C^{\text{an}}(N_P(\mathbb{Q}_p) \cap N_m, \pi_P \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \simeq (\pi_P \otimes_E E_m)[\mathfrak{n}_{L_P}^\alpha](\eta^{-1})_{N_{L_P}^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_m}$$

d'où le résultat avec (31) et (15). \square

Corollaire 3.7.3. — Soit π_P^∞ une représentation lisse de longueur finie de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E admettant un caractère central, M un objet quelconque de $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\text{p-}}$ et $\pi \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$. Alors il existe des caractères algébriques distincts $\chi_{\lambda_1}, \dots, \chi_{\lambda_r}$ de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ et des (φ, Γ) -modules généralisés $D_{\alpha,1}(\pi), \dots, D_{\alpha,r}(\pi)$ sur \mathcal{R}_E tels que $F_\alpha(\pi) \simeq \bigoplus_{i=1}^r (E_\infty(\chi_{\lambda_i}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_{\alpha,i}(\pi), -))$.

Démonstration. — Soit $W \subseteq M$ une sous-représentation algébrique de $P^-(\mathbb{Q}_p)$ de dimension finie sur E qui engendre M comme $U(\mathfrak{g})$ -module (cf. [54, Lem. 3.2]), de sorte que l'on a une surjection $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} W \twoheadrightarrow M$. Comme le noyau de cette surjection est aussi dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}^-}$, on peut encore l'écrire comme quotient de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} \widetilde{W}$ pour une autre représentation algébrique de dimension finie \widetilde{W} de $P^-(\mathbb{Q}_p)$. On a donc une suite exacte dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}^-}$:

$$U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} \widetilde{W} \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} W \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

qui donne une suite exacte de représentations localement analytiques :

$$(109) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty) \rightarrow (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} W^\vee \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}} \rightarrow (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \widetilde{W}^\vee \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}.$$

En utilisant que $W^\vee|_{L_P}$ et $\widetilde{W}^\vee|_{L_P}$ se décomposent comme somme directe de $L(-\lambda)_P$ pour des $\lambda \in X(T)$, le résultat découle alors facilement du Théorème 3.7.1 lorsque $\alpha \notin S_P$, du Théorème 3.7.2 et du Théorème 3.3.1 appliqué avec le groupe réductif $G = L_P$ lorsque $\alpha \in S_P$, et du (ii) de la Proposition 2.3.4 avec la Remarque 2.3.5. \square

Remarque 3.7.4. — (i) Par la Proposition 2.3.4 avec la Remarque 2.3.5, le foncteur $\pi \mapsto D_\alpha(\pi) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigoplus_i D_{\alpha, i}(\pi)$ envoie une suite exacte $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi'$ de représentations de la forme $\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$ (pour P, π_P^∞, M variables comme dans le Corollaire 3.7.3) vers une suite exacte $D_\alpha(\pi') \rightarrow D_\alpha(\pi) \rightarrow D_\alpha(\pi'') \rightarrow 0$ de (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E . Mais il suit facilement du Théorème 3.7.7 ci-dessous que ce foncteur n'est pas exact (à gauche).

(ii) L'hypothèse que π_P^∞ admet un caractère central ne devrait pas être nécessaire pour le Corollaire 3.7.3. Elle n'intervient que via le caractère $\chi_{\pi_P^\infty, \alpha} = \chi_{\pi_P^\infty} \circ \lambda_{\alpha^\vee}$ de la Proposition 3.4.4, mais cette dernière peut probablement se généraliser (au moins lorsque π_P^∞ est de longueur finie) en remplaçant (les copies de) $\mathcal{R}_E((\lambda_i \circ \lambda_{\alpha^\vee}) \chi_{\pi_P^\infty, \alpha}^{-1})$ par un (φ, Γ) -module non forcément semi-simple.

Nous allons maintenant expliciter $F_\alpha(\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty))$ dans certains cas utiles. Pour cela, nous avons d'abord besoin de plusieurs lemmes préliminaires.

Lemme 3.7.5. — Soit $\mu \in X(T)$ tel que $\langle \mu, \alpha^\vee \rangle \leq 0$.

- (i) Le constituant $L^-(s_\alpha \cdot \mu)$ apparaît avec multiplicité 1 dans $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \mu$.
- (ii) Le $U(\mathfrak{g})$ -module $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \mu$ admet en quotient une unique extension non scindée $L^-(s_\alpha \cdot \mu) - L^-(\mu)$ dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{b}^-}$ (où $L^-(s_\alpha \cdot \mu)$ est en sous-objet).

Démonstration. — Cela découle de [42, Th. 1.4.2(i)] et de propriétés standard des polynômes de Kazhdan-Lusztig. L'extension en (ii) est non scindée puisque $L^-(\mu)$ engendre tout $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \mu$. \square

Dans le reste de ce paragraphe, on fixe $L(-\lambda)_P$ une représentation algébrique irréductible de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E (où $\lambda \in X(T)$).

Lemme 3.7.6. — Soit M un quotient de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$. On suppose $\alpha \notin S_P$, $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \leq 0$ et on note Q le parabolique contenant P tel que $S_Q = S_P \amalg \{\alpha\}$. Alors M est dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}^-}$ (où \mathfrak{q}^- est l'algèbre de Lie de $Q^-(\mathbb{Q}_p)$) si et seulement si M ne contient pas le constituant $L^-(s_\alpha \cdot \lambda)$.

Démonstration. — Par [41, Th. 9.4(b)] on a un diagramme commutatif de suites exactes de $U(\mathfrak{g})$ -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{\beta \in S_P} U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} s_\beta \cdot \lambda & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \\ \bigoplus_{\beta \in S_Q} U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} s_\beta \cdot \lambda & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}^-)} L^-(\lambda)_Q & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

qui par une chasse au diagramme triviale donne une suite exacte :

$$(110) \quad U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} s_\alpha \cdot \lambda \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}^-)} L^-(\lambda)_Q \longrightarrow 0.$$

Comme $L^-(s_\alpha \cdot \lambda)$ est l'unique quotient irréductible de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} s_\alpha \cdot \lambda$ et qu'il a multiplicité 1 dans $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$ par le (i) du Lemme 3.7.5, on en déduit qu'un quotient M de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$ ne contient pas $L^-(s_\alpha \cdot \lambda)$ si et seulement si c'est en fait un quotient de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}^-)} L^-(\lambda)_Q$. On en déduit l'énoncé avec les propriétés de la catégorie $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}^-}$, cf. [54, § 1] et [41, § 9.4]. \square

Théorème 3.7.7. — Soit π_P^∞ une représentation lisse de longueur finie de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E et M un quotient non nul de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$. On suppose ou bien $\alpha \in S_P$, ou bien $\alpha \notin S_P$ et $M \notin \mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}^-}$ pour Q le parabolique contenant P tel que $S_Q = S_P \amalg \{\alpha\}$ et \mathfrak{q}^- l'algèbre de Lie de $Q^-(\mathbb{Q}_p)$. Alors l'injection $G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante :

$$\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty) \hookrightarrow (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L(-\lambda)_P \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}$$

induit un isomorphisme dans $F(\varphi, \Gamma)_\infty$:

$$F_\alpha(\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)) \xrightarrow{\sim} F_\alpha((\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L(-\lambda)_P \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}).$$

Démonstration. — **Étape 1**

Soit $\pi_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$ et $\pi_2 \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L(-\lambda)_P \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}} = (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L^-(\lambda)_P^\vee \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}$, nous allons montrer que l'injection $\pi_1 \hookrightarrow \pi_2$ induit un isomorphisme $\pi_1[\mathfrak{n}^\alpha] \xrightarrow{\sim} \pi_2[\mathfrak{n}^\alpha]$, ce qui implique le résultat par (15). Si $\alpha \in S_P$ nous allons montrer cette assertion pour $M = L^-(\lambda)$, ce qui suffit par le (i) de la Proposition 2.3.4. Si $\alpha \notin S_P$, on distingue deux cas. Ou bien on a $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$ (i.e. $L^-(\lambda) \notin \mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}^-}$) et nous allons encore montrer le résultat pour $M = L^-(\lambda)$. Ou bien on a $\langle \lambda, \alpha \rangle \leq 0$, auquel cas le Lemme 3.7.6 implique que $L^-(s_\alpha \cdot \lambda)$ est un constituant de M et le Lemme 3.7.5 implique alors que l'on a une surjection $M \twoheadrightarrow (L^-(s_\alpha \cdot \lambda) - L^-(\lambda))$ où $L^-(s_\alpha \cdot \lambda) - L^-(\lambda)$ est l'extension du (ii) du Lemme 3.7.5. Dans ce dernier cas, par le (i) de la Proposition 2.3.4, il suffit de montrer le résultat pour $M = L^-(s_\alpha \cdot \lambda) - L^-(\lambda)$. Dans la suite de

la preuve, on suppose donc $M = L^-(\lambda)$ si $\alpha \in S_P$ ou si $\alpha \notin S_P$ mais $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$, et $M = L^-(s_\alpha \cdot \lambda) - L^-(\lambda)$ si $\alpha \notin S_P$ et $\langle \lambda, \alpha \rangle \leq 0$.

Étape 2

Fixons une numérotation $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ des racines de R^+ telle que $\alpha_1 = \alpha$. Tout élément de $U(\mathfrak{n})$ est une combinaison linéaire à coefficients dans E de monômes $y_{\alpha_1}^{m_1} y_{\alpha_2}^{m_2} \cdots y_{\alpha_h}^{m_h}$ où $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et y_{α_i} est une base de la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de $N_{\alpha_i}(\mathbb{Q}_p)$ (cf. [41, Th. 1.2(a)]). Nous allons d'abord montrer que tout vecteur dans :

$$(111) \quad \ker \left(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P \rightarrow M \right)$$

est l'image via $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$ d'une combinaison linéaire de vecteurs de poids de la forme $y_{\alpha_1}^{m_1} y_{\alpha_2}^{m_2} \cdots y_{\alpha_t}^{m_t} \otimes v_\lambda$ où v_λ est le vecteur de plus haut poids (par rapport à B^-) de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda$ et où t et les m_i sont des entiers positifs ou nuls tels que $2 \leq t \leq h$ et $m_t \neq 0$. Par [41, §§ 5.1 & 5.2] tout poids $\mu \in X(T)$ apparaissant dans (111) est tel que $\mu \in \lambda' + \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ pour $\lambda' \in X(T)$ tel que $\lambda' \uparrow \lambda$ et $\lambda' \neq \lambda$, i.e. il existe $r \geq 1$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in R^+$ tels que $(s_{\gamma_j} \cdots s_{\gamma_r}) \cdot \lambda - (s_{\gamma_{j+1}} \cdots s_{\gamma_r}) \cdot \lambda \in \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ et est non nul pour $j \in \{1, \dots, r\}$. De plus, comme les constituants irréductibles de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$ sont dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}^-}$, on a $\langle \lambda', \gamma^\vee \rangle \leq 0$ pour $\gamma \in S_P$ par [41, Prop. 9.3(e)]. Montrons que l'on a $\lambda' - \lambda = \sum_{i=1}^h m'_i \alpha_i$ pour $m'_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ avec au moins un $m'_i \neq 0$ pour $i \geq 2$. Sinon, on a $\lambda' - \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha$, et donc nécessairement $\gamma_j = \alpha$ pour tout j (puisque α est simple), c'est-à-dire $r = 1$ et $\gamma_1 = \alpha$, i.e. $\lambda' = s_\alpha \cdot \lambda = \lambda + m'_1 \alpha$ pour $m'_1 \geq 1$ (car $\lambda' \neq \lambda$). Par ailleurs $s_\alpha \cdot \lambda = s_\alpha(\lambda - \rho) + \rho = s_\alpha(\lambda) + \alpha$, d'où $s_\alpha(\lambda) = \lambda + (m'_1 - 1)\alpha$ ce qui implique $\langle s_\alpha(\lambda), \alpha^\vee \rangle = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle + 2(m'_1 - 1) = -\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$ et donc $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 1 - m'_1 \leq 0$. Supposons d'abord $\alpha \in S_P$, alors $\langle s_\alpha \cdot \lambda, \alpha^\vee \rangle = \langle \lambda', \alpha^\vee \rangle \leq 0$ (cf. ci-dessus), et aussi $\langle s_\alpha \cdot \lambda, \alpha^\vee \rangle = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle + 2m'_1 = (1 - m'_1) + 2m'_1 = m'_1 + 1 > 0$, ce qui est une contradiction. Supposons maintenant $\alpha \notin S_P$ (et rappelons que $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \leq 0$), comme $L^-(s_\alpha \cdot \lambda)$ a multiplicité 1 dans $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda$ par le (i) du Lemme 3.7.5, on en déduit que λ' ci-dessus ne peut être $s_\alpha \cdot \lambda$ (sinon $L^-(s_\alpha \cdot \lambda)$ apparaîtrait à la fois dans (111) et dans M), une contradiction. Finalement, on en déduit $\mu = \lambda + \sum_{i=1}^h m_i \alpha_i$ pour des m_i dans $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ avec au moins un m_i non nul pour $i \geq 2$, ce qui implique facilement le résultat voulu (un tel poids μ ne pouvant venir de vecteurs de la forme $y_{\alpha_1}^{m_1} \otimes v_\lambda$).

Étape 3

Pour montrer $\pi_1[\mathfrak{n}^\alpha] \xrightarrow{\sim} \pi_2[\mathfrak{n}^\alpha]$, on reprend l'argument de la preuve de [12, Prop. 3.2]. Pour $f : G(\mathbb{Q}_p) \rightarrow L^-(\lambda)_P^\vee \otimes_E \pi_P^\infty$ localement analytique considérons le morphisme de $U(\mathfrak{g})$ -modules à gauche (non nul dès que $f \neq 0$) :

$$\Delta_f : U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P \longrightarrow C^{\text{an}}(G(\mathbb{Q}_p), \pi_P^\infty), \quad \mathfrak{d} \longmapsto \mathfrak{d} \cdot f$$

où $\mathfrak{d} \cdot f$ est défini au § 3.1. Fixons $0 \neq f \in \pi_2[\mathfrak{n}^\alpha]$. Par définition de $\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$ (cf. (40)), il suffit de montrer que $\Delta_f(\ker(\phi)) = 0$ où $\phi : U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P \rightarrow M$. On note :

$$M_f \stackrel{\text{déf}}{=} \left(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P \right) / \ker(\Delta_f),$$

de sorte que $f \in \mathcal{F}_{P^-}^G(M_f, \pi_P^\infty) \subseteq \pi_2$, et il suffit de montrer que l'on a une surjection $M \twoheadrightarrow M_f$ (entre quotients de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$) puisqu'alors $\mathcal{F}_{P^-}^G(M_f, \pi_P^\infty) \subseteq \mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty) = \pi_1$. Comme $\Delta_f \neq 0$ on a $M_f \neq 0$ et donc $M_f \twoheadrightarrow L^-(\lambda)$ (puisque $L^-(\lambda)$ est l'unique quotient irréductible de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$).

Étape 4

On suppose d'abord ou bien $\alpha \in S_P$ ou bien $\alpha \notin S_P$ mais $\langle \lambda, \alpha \rangle > 0$, de sorte que $M = L^-(\lambda)$. Soit C un constituant irréductible (dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{p}^-}$) en sous-objet de $\ker(M_f \twoheadrightarrow L^-(\lambda))$ supposé non nul. Alors C est l'unique quotient irréductible d'un module de Verma généralisé $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} V$ (par [41, §§ 1.3 & 9.3]) et l'application composée $\psi : U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} V \twoheadrightarrow C \hookrightarrow M_f$ s'insère dans le diagramme (commutatif) de $U(\mathfrak{g})$ -modules :

$$(112) \quad \begin{array}{ccccc} U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P & \longrightarrow & M_f & \longrightarrow & L^-(\lambda) \\ & & \uparrow \psi & \nearrow 0 & \\ & & U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} V & & \end{array}$$

et induit un morphisme $G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant :

$$\mathcal{F}_{P^-}^G(M_f, \pi_P^\infty) \longrightarrow \mathcal{F}_{P^-}^G(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} V, \pi_P^\infty) = (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V^\vee \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}.$$

Nous allons montrer que l'image h de $f \in \mathcal{F}_{P^-}^G(M_f, \pi_P^\infty)$ dans $(\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V^\vee \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}$ est nulle, ce qui en reprenant le raisonnement de la preuve de [12, Prop. 3.2] (auquel on renvoie le lecteur pour plus de détails) conduit à une contradiction et implique donc $M_f = L^-(\lambda) = M$. Comme $h \in (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} V^\vee \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}$, on voit facilement que $h = 0$ si et seulement si $h(-)(v)|_{N_P(\mathbb{Q}_p)} \equiv 0$ pour tout $v \in V$. Soit $v \in V$ et $\mathfrak{d}_v \in U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$ qui s'envoie sur $\psi(1 \otimes v)$ dans M_f , on a $\mathfrak{d}_v \in \ker(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P \twoheadrightarrow M)$ par (112). On a aussi $h(-)(v) = (\mathfrak{d}_v \cdot f)(-)$ dans $C^{\text{an}}(G(\mathbb{Q}_p), \pi_P^\infty)$ par [12, Lem. 3.1] et il suffit donc de montrer $(\mathfrak{d}_v \cdot f)(n) = 0$ pour tout $n \in N_P(\mathbb{Q}_p)$. Par ce qui suit (111) on peut écrire \mathfrak{d}_v comme une combinaison linéaire de vecteurs $y_{\alpha_1}^{m_1} y_{\alpha_2}^{m_2} \cdots y_{\alpha_t}^{m_t} \otimes v_\lambda$ pour des $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tels que $t \in \{2, \dots, h\}$ et $m_t \geq 1$. Ainsi $(\mathfrak{d}_v \cdot f)(-)$ est une combinaison linéaire de termes :

$$y_{\alpha_1}^{m_1} y_{\alpha_2}^{m_2} \cdots y_{\alpha_t}^{m_t} \cdot (f(-)(v_\lambda)) = (y_{\alpha_1}^{m_1} y_{\alpha_2}^{m_2} \cdots y_{\alpha_{t-1}}^{m_{t-1}} y_{\alpha_t}^{m_t-1}) \cdot (y_{\alpha_t} \cdot (f(-)(v_\lambda))).$$

On a pour tout $g \in G(\mathbb{Q}_p)$:

$$\begin{aligned} y_{\alpha_t} \cdot (f(g)(v_\lambda)) &= \frac{d}{dt} f(\exp(-ty_{\alpha_t})g)(v_\lambda)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(g \exp(-tg^{-1}y_{\alpha_t}g))(v_\lambda)|_{t=0} \\ &= ((g^{-1}(-y_{\alpha_t})g)(f))(g)(v_\lambda) \end{aligned}$$

où $(g^{-1}(-y_{\alpha_t})g)(f)$ est l'action de Lie sur f dérivée de l'action du groupe $G(\mathbb{Q}_p)$ sur π_2 (par translation à droite). Lorsque $g = n \in N(\mathbb{Q}_p)$, alors $n^{-1}(-y_{\alpha_t})n \in \mathfrak{n}^\alpha$ puisque

$-y_{\alpha_t} \in \mathfrak{n}^\alpha$ (car $\alpha_t \neq \alpha_1 = \alpha$) et N^α est normal dans N , et on obtient :

$$y_{\alpha_t} \cdot (f(n)(v_\lambda)) = ((n^{-1}(-y_{\alpha_t})n)(f))(n)(v_\lambda) = 0$$

puisque $f \in \pi_2[\mathfrak{n}^\alpha]$. On a donc $h(n)(v) = (\mathfrak{d}_v \cdot f)(n) = 0$ pour tout $v \in V$ et tout $n \in N(\mathbb{Q}_p)$, donc *a fortiori* pour tout $n \in N_P(\mathbb{Q}_p)$, ce qui achève la preuve dans ce cas.

Étape 5

On suppose maintenant $\alpha \notin S_P$ et $\langle \lambda, \alpha \rangle \leq 0$, donc $M = L^-(s_\alpha \cdot \lambda) - L^-(\lambda)$. Si $L^-(s_\alpha \cdot \lambda)$ apparaît dans M_f , alors par le (ii) du Lemme 3.7.5 et en prenant un constituant irréductible C en sous-objet de $\ker(M_f \rightarrow M)$ (supposé non nul) on a un diagramme commutatif analogue à (112) :

$$(113) \quad \begin{array}{ccccc} U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P & \longrightarrow & M_f & \longrightarrow & M \\ & & \uparrow \psi & \nearrow 0 & \\ & & U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} V & & \end{array}$$

et une preuve totalement analogue à celle de l'Étape 4 (utilisant le résultat de l'Étape 2) montre que l'on doit avoir $M_f = M$, ce qui achève la preuve dans ce cas.

On suppose maintenant que $L^-(s_\alpha \cdot \lambda)$ n'apparaît pas dans M_f , de sorte que l'on est encore dans la situation de (112). Soit $v \in V$, on va montrer que l'on peut choisir $\mathfrak{d}_v \in U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$ qui s'envoie sur $\psi(1 \otimes v)$ dans M_f par (112) et qui est tel que $\mathfrak{d}_v \in \ker(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P \rightarrow M)$. D'une part la surjection $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P \rightarrow M_f$ se factorise par $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}^-)} L^-(\lambda)_Q$ par le Lemme 3.7.6. D'autre part on a un diagramme commutatif de suites exactes avec (110) et le Lemme 3.7.5 :

$$\begin{array}{ccccccc} U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} s_\alpha \cdot \lambda & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}^-)} L^-(\lambda)_Q & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & L^-(s_\alpha \cdot \lambda) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L^-(\lambda) \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui montre (par une chasse au diagramme triviale) qu'un élément dans $\ker(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}^-)} L^-(\lambda)_Q \rightarrow L^-(\lambda))$ se relève dans $\ker(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P \rightarrow M)$. On en déduit que l'on peut prendre $\mathfrak{d}_v \in \ker(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P \rightarrow M)$. On peut alors dérouler la preuve comme dans l'Étape 4 en utilisant l'Étape 2, ce qui donne $M_f = L^-(\lambda)$ et achève la preuve. \square

Le corollaire qui suit précise le Corollaire 3.7.3 dans des cas importants.

Corollaire 3.7.8. — Soit π_P^∞ une représentation lisse de longueur finie de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ sur E admettant un caractère central $\chi_{\pi_P^\infty}$, $d_{\pi_P^\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} \dim_E(\pi_P^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N_{L_P}(\mathbb{Q}_p)}$, M un quotient non nul de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}^-)} L^-(\lambda)_P$ et $\pi \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$. Quand $\alpha \notin S_P$ on note Q le parabolique contenant P tel que $S_Q = S_P \amalg \{\alpha\}$ et \mathfrak{q}^- l'algèbre de Lie de

$Q^-(\mathbb{Q}_p)$.

(i) Si $\alpha \notin S_P$ et $M \notin \mathcal{O}_{\text{alg}}^-$, on a :

$$F_\alpha(\pi) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)} \left(\mathcal{R}_E((\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee})(\chi_{\pi_P^\infty}^{-1} \circ \lambda_{\alpha^\vee}))^{\oplus d_{\pi_P^\infty}}, - \right).$$

(ii) Si $\alpha \notin S_P$ et $M \in \mathcal{O}_{\text{alg}}^-$ ou si $\alpha \in S_P$, on a :

$$F_\alpha(\pi) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)} \left((\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee}) / (t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}))^{\oplus d_{\pi_P^\infty}}, - \right).$$

Démonstration. — (i) Cela découle du Théorème 3.7.7 avec le Théorème 3.7.1.

(ii) Si $\alpha \in S_P$ cela découle du Théorème 3.7.7 avec le Théorème 3.7.2 et le Théorème 3.3.1 (appliqué avec $G = L_P$). Supposons $\alpha \notin S_P$ et $M \in \mathcal{O}_{\text{alg}}^-$. Par [54, Prop. 4.9(b)] on a :

$$\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty) \simeq \mathcal{F}_{Q^-}^G(M, (\text{Ind}_{L_Q(\mathbb{Q}_p) \cap P^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_Q(\mathbb{Q}_p)} \pi_P^\infty)^\infty).$$

On déduit du Théorème 3.7.7 appliqué avec $P = Q$ un isomorphisme :

$$F_\alpha(\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)) \xrightarrow{\sim} F_\alpha((\text{Ind}_{Q^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L(-\lambda)_Q \otimes_E (\text{Ind}_{L_Q(\mathbb{Q}_p) \cap P^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_Q(\mathbb{Q}_p)} \pi_P^\infty)^\infty)^{\text{an}})$$

puis avec le Théorème 3.7.2 (aussi appliqué avec $P = Q$) un isomorphisme :

$$F_\alpha(\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)) \xrightarrow{\sim} F_\alpha(L(-\lambda)_Q \otimes_E (\text{Ind}_{L_Q(\mathbb{Q}_p) \cap P^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_Q(\mathbb{Q}_p)} \pi_P^\infty)^\infty).$$

Le résultat découle alors du Théorème 3.3.1 (appliqué avec $G = L_Q$) et de l'égalité $d_{\pi_P^\infty} = \dim_{E_\infty} ((\text{Ind}_{L_Q(\mathbb{Q}_p) \cap P^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_Q(\mathbb{Q}_p)} \pi_P^\infty)^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N_{L_Q}(\mathbb{Q}_p)}$ ([56]). \square

4. Quelques résultats d'exactitude pour F_α

On énonce une conjecture de représentabilité et d'exactitude (Conjecture 4.1.3) pour le foncteur F_α appliqué à certaines représentations localement analytiques de $G(\mathbb{Q}_p)$ qui ne sont pas nécessairement de la forme $\mathcal{F}_{P^-}^G(-, -)$ (mais dont les constituants irréductibles le sont). Puis on en démontre deux cas particuliers (Théorème 4.1.5 et Théorème 4.1.6), dont les preuves prennent l'essentiel du paragraphe.

4.1. Préliminaires. — On énonce divers résultats préliminaires et une conjecture (Conjecture 4.1.3) valables pour tout groupe G comme au § 2.1.

On conserve les notations des §§ 2.1 et 3.1, et on fixe $\lambda \in X(T)$ dominant par rapport à B^- . On fixe aussi une racine simple $\alpha \in S$. Considérons une représentation irréductible π de la forme $\mathcal{F}_{P^-}^G(L^-(w \cdot \lambda), \pi_P^\infty)$ pour $w \in W$ et π_P^∞ lisse irréductible. Alors $F_\alpha(\pi)$ est calculé dans le Corollaire 3.7.8. En se souvenant que $d_{\pi_P^\infty} = 1$ si π_P^∞ est irréductible générique et $d_{\pi_P^\infty} = 0$ si π_P^∞ est irréductible non générique ([56]),

on a $F_\alpha(\pi) = 0$ si π_P^∞ est non générique, et si π_P^∞ est générique on obtient $F_\alpha(\pi) \simeq E_\infty(\chi_{-w\cdot\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi), -)$ avec (en utilisant [12, Lem. 4.2]) :

$$\begin{cases} D_\alpha(\pi) = \mathcal{R}_E(((w \cdot \lambda) \circ \lambda_{\alpha^\vee})(\chi_{\pi_P^\infty}^{-1} \circ \lambda_{\alpha^\vee})) & \text{si } w^{-1}(\alpha) < 0 \\ D_\alpha(\pi) = \mathcal{R}_E((w \cdot \lambda) \circ \lambda_{\alpha^\vee}) / (t^{1-\langle w \cdot \lambda, \alpha^\vee \rangle}) & \text{si } w^{-1}(\alpha) > 0. \end{cases}$$

Lemme 4.1.1. — *On a $E_\infty(\chi_{-\lambda}) \simeq E_\infty(\chi_{-w\cdot\lambda})$ si et seulement si $w \in \{1, s_\alpha\}$.*

Démonstration. — Comme $\chi_{-\lambda}$ et $\chi_{-w\cdot\lambda}$ sont algébriques, on a $E_\infty(\chi_{-\lambda}) \simeq E_\infty(\chi_{-w\cdot\lambda})$ si et seulement si $\chi_{-\lambda} = \chi_{-w\cdot\lambda}$ si et seulement si $\chi_{\lambda-w\cdot\lambda} = 1$. Il suffit donc de montrer $\chi_{\lambda-w\cdot\lambda} = 1$ si et seulement si $w \in \{1, s_\alpha\}$. On a $\langle \sum_{\beta \in S \setminus \{\alpha\}} \lambda_{\beta^\vee}, \gamma \rangle \geq 0$ pour $\gamma \in S$ avec nullité si et seulement si $\gamma = \alpha$. En revenant à la définition de χ_μ avant le Théorème 3.3.1, et en utilisant que $\lambda - w \cdot \lambda \in \sum_{\gamma \in S} \mathbb{Z}_{\geq 0} \gamma$ (car λ est dominant par rapport à B^-), on en déduit $\chi_{\lambda-w\cdot\lambda} = 1$ si et seulement si $\lambda - w \cdot \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha$ si et seulement si $w \in \{1, s_\alpha\}$. \square

On désigne par $C_{\lambda, \alpha}$ la sous-catégorie pleine (artinienne) de la catégorie abélienne des représentations localement analytiques admissibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E formée des représentations de longueur finie dont les constituants irréductibles sont de l'une des formes suivantes : $\mathcal{F}_{P^-}^G(L^-(w \cdot \lambda), \pi_P^\infty)$ pour $P \subseteq G$ (contenant B), $w \in \{1, s_\alpha\}$ et π_P^∞ quelconque ou bien $\mathcal{F}_{P^-}^G(L^-(w \cdot \lambda), \pi_P^\infty)$ pour $P \subseteq G$, w quelconque et π_P^∞ non générique. Noter que si $\{\alpha\} \subsetneq S$ et si $w \in \{1, s_\alpha\}$, alors on peut prendre $P \neq B$ (par [54, Prop. 4.9(b)]). Noter aussi que si π dans $C_{\lambda, \alpha}$ est irréductible de la forme $\mathcal{F}_{P^-}^{\text{GL}_3}(L^-(w \cdot \lambda), \pi_P^\infty)$ avec π_P^∞ non générique, on a nécessairement $L_P \neq T$, donc $P \neq B$ et $w \neq w_0$. Noter enfin qu'un objet (réductible) de $C_{\lambda, \alpha}$ n'est en général plus nécessairement de la forme $\mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$ pour un M dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^-$. Par exemple, pour $G = \text{GL}_2$ déjà, il existe une représentation localement analytique indécomposable de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E de la forme :

$$\text{St}_2^\infty \text{ — } \mathcal{F}_{B^-}^G(L^-(s_\alpha \cdot 0), 1)$$

où St_2^∞ (qui est en sous-objet) est la représentation lisse de Steinberg de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E (cette représentation apparaît dans l'Étape 3 de la preuve du Théorème 5.4.2 ci-après). Elle est clairement dans $C_{0, \alpha}$ par définition, mais n'est pas de la forme $\mathcal{F}_{B^-}^G(M, \pi_B^\infty)$ car St_2^∞ n'est pas une série principale.

La proposition qui suit n'est pas nécessaire pour les applications que l'on a en vue, mais est simple à démontrer.

Proposition 4.1.2. — *Soit λ_1, λ_2 distincts dans $X(T)$ et dominants par rapport à B^- , et soit $\pi_{\lambda_1}, \pi_{\lambda_2}$ de la forme $\mathcal{F}_{P_1^-}^G(L^-(w_1 \cdot \lambda_1), \pi_{P_1}^\infty)$, $\mathcal{F}_{P_2^-}^G(L^-(w_2 \cdot \lambda_2), \pi_{P_2}^\infty)$ respectivement où $w_i \in W$ et $\pi_{P_i}^\infty$ est de longueur finie pour $i \in \{1, 2\}$. Alors on a $\text{Ext}_G^j(\pi_{\lambda_1}, \pi_{\lambda_2}) = \text{Ext}_G^j(\pi_{\lambda_2}, \pi_{\lambda_1}) = 0$ pour $j \in \{0, 1\}$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que le centre $Z(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ agit par des caractères distincts sur π_{λ_1} et π_{λ_2} . L'inclusion $\pi_{\lambda_i} \subseteq (\text{Ind}_{P_i^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L(-w_i \cdot \lambda_i)_{P_i} \otimes_E \pi_{P_i}^\infty)^{\text{an}}$ montre que $Z(\mathfrak{g})$ agit sur π_{λ_i} par le caractère infinitésimal $\chi_{-w_i \cdot \lambda_i}$ avec les notations de [41, § 1.7] (cf. [59, Prop. 3.7]). Le résultat découle alors de [41, Th. 1.10(b)]. \square

Conjecture 4.1.3. — Soit $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi' \rightarrow 0$ une suite exacte (stricte) dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(G(\mathbb{Q}_p))$. On suppose π'' irréductible dans $C_{\lambda, \alpha}$ et $F_\alpha(\pi')(-) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi'), -)$ pour un (φ, Γ) -module généralisé $D_\alpha(\pi')$ sur \mathcal{R}_E tel que $D_\alpha(\pi')$ est sans torsion et $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi''), D_\alpha(\pi')) = 0$. Alors on a :

$$F_\alpha(\pi)(-) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi), -)$$

pour un (unique) (φ, Γ) -module généralisé $D_\alpha(\pi)$ sur \mathcal{R}_E qui s'insère dans une suite exacte $0 \rightarrow D_\alpha(\pi') \rightarrow D_\alpha(\pi) \rightarrow D_\alpha(\pi'') \rightarrow 0$.

Remarque 4.1.4. — (i) Sans l'hypothèse $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi''), D_\alpha(\pi')) = 0$, il n'est pas vrai en général que $F_\alpha(\pi)$ est de la forme $E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D, -)$ dans $F(\varphi, \Gamma)_\infty$ pour un (φ, Γ) -module généralisé D sur \mathcal{R}_E . Considérer par exemple $G = \text{GL}_n$ pour $n > 2$ et $\pi = \pi_1 \otimes_E E[\epsilon]/(\epsilon^2)$ avec π_1 irréductible dans $C_{\lambda, \alpha}$ et $G(\mathbb{Q}_p)$ agissant diagonalement par la multiplication par $1 + \epsilon \log(\det)$ à droite (où \log est une branche du logarithme p -adique) : l'action de $g \in \text{Gal}(E_\infty/E)$ ne se fait pas via un caractère $\chi_{-\lambda}$ à cause de la multiplication par $1 + \epsilon \log(\det(t_g))$ qui est en général distinct de 1 quand $n > 2$ (cf. la preuve du (i) du Lemme 2.3.2 pour t_g). Si l'on oublie l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$, il est possible que $F_\alpha(\pi)$ soit de la forme $E_\infty \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D, -)$ sans cette hypothèse (c'est par exemple le cas, si l'on examine leur preuve, dans les situations du Théorème 4.1.5 et du Théorème 4.1.6 ci-dessous), mais alors D n'est pas canoniquement défini (seul $E_\infty \otimes_E D$ l'est).

(ii) Il est par contre possible que la Conjecture 4.1.3 reste vraie sans l'hypothèse que $D_\alpha(\pi')$ est sans torsion (par exemple on peut encore montrer que c'est le cas pour GL_2). L'hypothèse que $D_\alpha(\pi')$ est sans torsion sera satisfaite dans les applications à la compatibilité local-global du § 5.3.

(iii) Si l'on rajoute à la catégorie $C_{\lambda, \alpha}$ des constituants de la forme $\mathcal{F}_{P^-}^G(L^-(w \cdot \lambda), \pi_P^\infty)$ pour $w \notin \{1, s_\alpha\}$ et π_P^∞ générique, il résulte facilement du Théorème 3.7.7 que (l'analogue de) la Conjecture 4.1.3 devient fausse en général.

L'objectif du § 4 est de montrer les deux théorèmes suivants.

Théorème 4.1.5. — La conjecture 4.1.3 est vraie lorsque π'' est localement algébrique.

Théorème 4.1.6. — La conjecture 4.1.3 est vraie pour $G = \text{GL}_2$ et $G = \text{GL}_3$.

L'hypothèse $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi''), D_\alpha(\pi')) = 0$ est automatiquement vérifiée dans le cas du Théorème 4.1.5 par le Théorème 3.3.1 et l'hypothèse que $D_\alpha(\pi')$ est sans torsion. La preuve du Théorème 4.1.6 est nettement plus délicate (pour $G = \text{GL}_3$)

que celle du Théorème 4.1.5. Nous continuons avec quelques lemmes préliminaires valables pour tout G et utilisés ci-dessous dans les preuves de ces deux théorèmes.

Lemme 4.1.7. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et D'_r, D''_r deux (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E^r tels que $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D''_r, D'_r) = 0$. On munit $E_m \otimes_E D'_r$ et $E_m \otimes_E D''_r$ d'une action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ définie par $g(x \otimes d) = \chi_\lambda(g)g(x) \otimes d$ pour $g \in \text{Gal}(E_\infty/E)$, $x \in E_m$ et $d \in D'_r$ ou D''_r . Soit V un (ψ, Γ) -module de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$ muni d'une action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ qui commute à \mathcal{R}_E^r , ψ , Γ , vérifie $g(xv) = g(x)g(v)$ pour $g \in \text{Gal}(E_\infty/E)$, $x \in E_m$, $v \in V$, et s'insère dans une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow E_m \otimes_E D'_r \longrightarrow V \longrightarrow E_m \otimes_E D''_r \longrightarrow 0$$

de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$ commutant à l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$. Alors on a $V \simeq E_m \otimes_E D_r$ pour un unique (φ, Γ) -module généralisé D_r sur \mathcal{R}_E^r qui est une extension de D''_r par D'_r avec action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ sur $E_m \otimes_E D_r$ donnée par $g(x \otimes d) = \chi_\lambda(g)g(x) \otimes d$ ($g \in \text{Gal}(E_\infty/E)$, $x \in E_m$, $d \in D_r$).

Démonstration. — Quitte à tordre partout par $\chi_{-\lambda}$, on peut supposer $\chi_\lambda = 1$. L'unicité de D_r est claire car D_r s'identifie alors à $(E_m \otimes_E D_r)^{\text{Gal}(E_\infty/E)} = V^{\text{Gal}(E_\infty/E)}$. Soit $g \in \text{Gal}(E_\infty/E_m)$, alors $g - \text{Id} : V \rightarrow V$ se factorise en $V \rightarrow E_m \otimes_E D''_r \rightarrow E_m \otimes_E D'_r \hookrightarrow V$, qui est nul puisque $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D''_r, D'_r) = 0$ (avec les (iv) et (v) de la Remarque 2.3.1). Donc $\text{Gal}(E_\infty/E_m)$ agit trivialement sur V , d'où on déduit une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow (E_m \otimes_E D'_r)^{\text{Gal}(E_m/E)} \longrightarrow V^{\text{Gal}(E_m/E)} \longrightarrow (E_m \otimes_E D''_r)^{\text{Gal}(E_m/E)} \longrightarrow 0$$

de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^r , ainsi qu'un isomorphisme $E_m \otimes_E V^{\text{Gal}(E_m/E)} \xrightarrow{\sim} V$ de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$ compatible à $\text{Gal}(E_m/E)$. Comme $(E_m \otimes_E D'_r)^{\text{Gal}(E_m/E)}$ et $(E_m \otimes_E D''_r)^{\text{Gal}(E_m/E)}$ sont des (φ, Γ) -modules généralisés sur \mathcal{R}_E^r , (149) ci-dessous (pour $j = 1$) et un dévissage évident montrent que (148) (pour $j = 1$) induit un isomorphisme $\mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} V^{\text{Gal}(E_m/E)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}_E^{pr} \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^r} V^{\text{Gal}(E_m/E)}$, d'où il suit (en prenant son inverse) que $V^{\text{Gal}(E_m/E)}$ est aussi un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r vérifiant les conditions de l'énoncé. \square

On désigne par $H(\mathfrak{n}^\alpha, -)$ la cohomologie usuelle d'algèbre de Lie (cf. par exemple [65, § 7], cf. aussi [61, § 3] ou [64, p. 73]). C'est la cohomologie d'un complexe dont le terme général est $\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\bigwedge^i \mathfrak{n}^\alpha, -)$. Soit π dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$, alors $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi)$ pour $i \in \mathbb{Z}$ est nul si $i < 0$ et $i > \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathfrak{n}^\alpha$, et est naturellement muni d'une topologie localement convexe (pas forcément séparée) en utilisant que chaque terme $\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\bigwedge^i \mathfrak{n}^\alpha, \pi)$ est un espace localement convexe de type compact puisque $\bigwedge^i \mathfrak{n}^\alpha$ est de dimension finie, cf. [64, p. 75]. Chaque $\text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\bigwedge^i \mathfrak{n}^\alpha, \pi)$ est muni de l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ par automorphismes continus :

$$(114) \quad f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p} \left(\bigwedge^i \mathfrak{n}^\alpha, \pi \right) \longmapsto (x_1 \wedge \cdots \wedge x_i \mapsto bf(\text{Ad}(b^{-1})(x_1) \wedge \cdots \wedge \text{Ad}(b^{-1})(x_i)))$$

qui en fait un objet de $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ et induit une action de $B(\mathbb{Q}_p)$ par automorphismes continus sur chaque $H^i(\mathbf{n}^\alpha, \pi)$. Si la topologie sur $H^i(\mathbf{n}^\alpha, \pi)$ est séparée, alors $H^i(\mathbf{n}^\alpha, \pi)$ est un espace de type compact et l'action de $B(\mathbb{Q}_p)$ en fait aussi un objet de $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ tel que l'action de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ est lisse. On peut dans ce cas définir un (ψ, Γ) -module de Fréchet $M_\alpha(H^i(\mathbf{n}^\alpha, \pi \otimes_E E_m)) = (H^i(\mathbf{n}^\alpha, \pi \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha})^\vee$ sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$ comme en (15).

Lemme 4.1.8. — *Soit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi' \rightarrow 0$ une suite exacte (stricte) dans $\text{Rep}_{E_m}^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ et supposons que $H^1(\mathbf{n}^\alpha, \pi'')$ soit séparé. Alors on a un complexe de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:*

$$M_\alpha(H^1(\mathbf{n}^\alpha, \pi'')) \xrightarrow{h} M_\alpha(\pi') \xrightarrow{g} M_\alpha(\pi) \longrightarrow M_\alpha(\pi'') \longrightarrow 0$$

qui est exact en $M_\alpha(\pi'')$ et $M_\alpha(\pi)$ et tel que l'image de h est dense dans $\ker(g)$.

Démonstration. — On a une suite exacte d'espaces de type compact $0 \rightarrow \pi''[\mathbf{n}^\alpha] \rightarrow \pi[\mathbf{n}^\alpha] \rightarrow \pi'[\mathbf{n}^\alpha] \xrightarrow{\delta} H^1(\mathbf{n}^\alpha, \pi'')$, qui se décompose donc en deux suites exactes d'espaces de type compact :

$$0 \rightarrow \pi''[\mathbf{n}^\alpha] \rightarrow \pi[\mathbf{n}^\alpha] \rightarrow \ker(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow \ker(\delta) \rightarrow \pi'[\mathbf{n}^\alpha] \rightarrow H^1(\mathbf{n}^\alpha, \pi'')$$

(noter que, si $H^1(\mathbf{n}^\alpha, \pi'')$ n'était pas séparé, on aurait encore ces deux suites exactes mais on ne saurait pas que $\ker(\delta)$ est un espace de type compact). Comme dans la preuve de la Proposition 2.1.6 on en déduit deux suites exactes d'espaces de type compact (où la première est stricte et où l'injection dans la deuxième est stricte) :

$$0 \rightarrow \pi''[\mathbf{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \rightarrow \pi[\mathbf{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \rightarrow \ker(\delta)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{et} \\ 0 \rightarrow \ker(\delta)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \rightarrow \pi'[\mathbf{n}^\alpha](\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \rightarrow H^1(\mathbf{n}^\alpha, \pi'')(\eta^{-1})_{N_m^\alpha}.$$

En dualisant, on en déduit une suite exacte stricte d'espaces de Fréchet $0 \rightarrow (\ker(\delta)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha})^\vee \rightarrow M_\alpha(\pi) \rightarrow M_\alpha(\pi'') \rightarrow 0$ et un complexe d'espaces de Fréchet $M_\alpha(H^1(\mathbf{n}^\alpha, \pi'')) \xrightarrow{h} M_\alpha(\pi') \xrightarrow{g} (\ker(\delta)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha})^\vee \rightarrow 0$ où, comme à la fin de la preuve de la Proposition 2.1.6, g est une surjection topologique et l'image de h est dense dans $\ker(g)$. On a l'énoncé en combinant ces deux complexes. \square

Une variante du lemme suivant est utilisée de manière tacite dans [64, § 4.5].

Lemme 4.1.9 (Schraen). — *Soit $i \in \mathbb{Z}$ et $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi' \rightarrow 0$ une suite exacte (stricte) dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$. Si $H^i(\mathbf{n}^\alpha, \pi')$ est séparé et si la flèche continue $H^{i-1}(\mathbf{n}^\alpha, \pi') \rightarrow H^i(\mathbf{n}^\alpha, \pi'')$ est d'image fermée, alors $H^i(\mathbf{n}^\alpha, \pi)$ est aussi séparé.*

Démonstration. — Notons $C^i(-) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\bigwedge^i \mathbf{n}^\alpha, -)$ avec $- \in \{\pi'', \pi, \pi'\}$, qui est un espace de type compact, $d^i : C^i(-) \rightarrow C^{i+1}(-)$, $Z^i(-) \stackrel{\text{déf}}{=} \ker(d^i)$ et $B^i(-) = \text{im}(d^i)$. On a $B^{i-1}(-) \subseteq Z^i(-) \subseteq C^i(-)$ et $H^i(\mathbf{n}^\alpha, -) = Z^i(-)/B^{i-1}(-)$. Le sous-espace $Z^i(-)$ est fermé dans $C^i(-)$ et on le munit de la topologie d'espace de type compact induite. Le quotient $C^i(-)/Z^i(-)$ est alors aussi de type compact et via

l'isomorphisme $C^i(-)/Z^i(-) \xrightarrow{\sim} B^i(-)$ on munit $B^i(-)$ de cette topologie de type compact. Les injections $B^{i-1}(-) \hookrightarrow Z^i(-)$ sont continues.

Par définition $Z^i(-)/B^{i-1}(-)$ est muni de la topologie quotient de $Z^i(-)$, il faut donc montrer que $B^{i-1}(\pi)$ est fermé dans $Z^i(\pi)$ sous les conditions du lemme. Le morphisme $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \rightarrow H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi)$ se factorise comme suit :

$$Z^i(\pi'')/B^{i-1}(\pi'') \twoheadrightarrow Z^i(\pi'')/(B^{i-1}(\pi) \cap Z^i(\pi'')) \hookrightarrow Z^i(\pi)/B^{i-1}(\pi)$$

et la suite exacte $H^{i-1}(\mathfrak{n}^\alpha, \pi') \rightarrow H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \rightarrow H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi)$ montre donc que $Z^i(\pi'')/(B^{i-1}(\pi) \cap Z^i(\pi''))$ avec la topologie quotient de $Z^i(\pi'')$ est isomorphe au *conoyau* de $H^{i-1}(\mathfrak{n}^\alpha, \pi') \rightarrow H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'')$ avec la topologie quotient de $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'')$. Or, l'image de $H^{i-1}(\mathfrak{n}^\alpha, \pi')$ dans $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'')$ est fermée, donc ce conoyau est séparé, i.e. $B^{i-1}(\pi) \cap Z^i(\pi'')$ est fermé dans $Z^i(\pi'')$.

Munissons $B^{i-1}(\pi) \cap Z^i(\pi'')$ de la topologie induite par $B^{i-1}(\pi)$, les suites exactes courtes $0 \rightarrow C^i(\pi'') \rightarrow C^i(\pi) \rightarrow C^i(\pi') \rightarrow 0$ pour tout i montrent que l'on a un diagramme commutatif de suites exactes d'espaces de type compact :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B^{i-1}(\pi) \cap Z^i(\pi'') & \longrightarrow & B^{i-1}(\pi) & \xrightarrow{g} & B^{i-1}(\pi') \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & Z^i(\pi'') & \longrightarrow & Z^i(\pi) & \longrightarrow & Z^i(\pi') \end{array}$$

où les injections f' , f'' sont strictes par ce qui précède et l'hypothèse, et où g est automatiquement stricte car une surjection entre espaces de type compact. Le Lemme 3.2.5 donne alors que l'injection f est aussi stricte, i.e. d'image fermée. Donc $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi) = Z^i(\pi)/B^{i-1}(\pi)$ est séparé. \square

4.2. Un résultat d'exactitude dans le cas localement algébrique. — On montre le Théorème 4.1.5.

On conserve les notations du § 4.1 (en particulier G est comme au § 2.1). Notons d'abord que, si π dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ est tel que $F_\alpha(\pi)(-) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi), -)$ pour un (φ, Γ) -module généralisé $D_\alpha(\pi)$ sur \mathcal{R}_E , il suit de la définition de F_α (cf. (31) et (37)) qu'il existe $m \gg 0$, $r \gg 0$ et un (φ, Γ) -module généralisé $D_\alpha(\pi)_r$ sur \mathcal{R}_E^r tels que $\mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_\alpha(\pi)_r \xrightarrow{\sim} D_\alpha(\pi)$ et tels que l'on a un morphisme continu non nul de $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -modules commutant à ψ, Γ :

$$(115) \quad f : M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \longrightarrow D_\alpha(\pi)_r \otimes_E E_m$$

s'envoyant (à scalaire près dans E_∞^\times) vers le morphisme identité $D_\alpha(\pi) \rightarrow D_\alpha(\pi)$ dans $F_\alpha(\pi)(D_\alpha(\pi))$.

On fixe $\pi'' \simeq L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty$ avec π^∞ lisse irréductible ainsi qu'une suite exacte courte $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi' \rightarrow 0$ comme dans la Conjecture 4.1.3.

Étape 1

Il est clair que $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'')$ est séparé puisque muni de la topologie localement convexe la plus fine. Par le Lemme 4.1.8 on a donc un complexe de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$ comme dans *loc.cit.* :

$$(116) \quad M_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \otimes_E E_m) \xrightarrow{h} M_\alpha(\pi' \otimes_E E_m) \xrightarrow{g} M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \\ \longrightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \longrightarrow 0.$$

Montrons d'abord que le morphisme composé (où f est comme en (115)) :

$$M_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \otimes_E E_m) \xrightarrow{h} M_\alpha(\pi' \otimes_E E_m) \xrightarrow{f} D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m$$

devient nul si l'on augmente suffisamment m et r . On a $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') = \bigoplus_{\beta \in S \setminus \{\alpha\}} L(-s_\beta \cdot \lambda)_{P_\alpha} \otimes_E \pi^\infty$ par [64, Th. 4.10], de sorte que l'on peut considérer le foncteur $F_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi''))$. La même preuve que celle du Théorème 3.3.1 donne $F_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'')) \simeq \bigoplus_{\beta \in S \setminus \{\alpha\}} (E_\infty(\chi_{-s_\beta \cdot \lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\beta, -))$ pour D_β convenable. Comme par hypothèse $F_\alpha(\pi') \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi'), -)$, le Lemme 4.1.1 implique alors que le morphisme $F_\alpha(\pi') \rightarrow F_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi''))$ est nul dans $F(\varphi, \Gamma)_\infty$, d'où on déduit la nullité ci-dessus. Comme l'image de h en (116) est dense dans $\ker(g)$, le morphisme (continu) f est nul sur $\ker(g)$. Notant :

$$\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \stackrel{\text{déf}}{=} (D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m) \oplus_{f, M_\alpha(\pi' \otimes_E E_m)} M_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$$

(un (ψ, Γ) -module de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$ par la Remarque 3.2.3), le “push-out” de la suite exacte $0 \rightarrow M_\alpha(\pi' \otimes_E E_m) / \ker(g) \xrightarrow{g} M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \rightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \rightarrow 0$ le long de f donne donc une suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$:

$$(117) \quad 0 \longrightarrow D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m \longrightarrow \widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \longrightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \longrightarrow 0.$$

Étape 2

Un examen de la preuve du Théorème 3.3.1 (cf. en particulier l'Étape 5 et la preuve du Lemme 3.3.5) montre que le morphisme f pour π'' en (115) existe pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et se factorise en un morphisme $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire qui commute à ψ et Γ et devient surjectif en tensorisant à gauche par $\mathcal{R}_{E_m}^+[1/X]$:

$$(118) \quad f : M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \longrightarrow D_\alpha(\pi'')_+[1/X] \otimes_E E_m$$

où $D_\alpha(\pi'')_+ \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_E^+(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee}) / (t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle})$ si π^∞ est une représentation générique de $G(\mathbb{Q}_p)$ et $D_\alpha(\pi'')_+ \stackrel{\text{déf}}{=} 0$ sinon. Ce même examen montre aussi que si $r \in \mathbb{Q}_{> p-1}$ et T_r est un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r , tout morphisme dans $\text{Hom}_{\psi, \Gamma}(\ker(f), T_r \otimes_E E_m)$ devient nul quitte à augmenter r et m . Par ailleurs, comme $D_\alpha(\pi')_r$ est sans torsion, la multiplication par $t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}$ sur la suite exacte (117) donne une suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$ (où $(-)(\delta) \stackrel{\text{déf}}{=} (-) \otimes_{\mathcal{R}_E^+} \mathcal{R}_E^+(\delta)$ si $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow E^\times$) :

$$0 \rightarrow \widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)[t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}] \rightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \xrightarrow{h} D_\alpha(\pi')_r(\varepsilon^{\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle - 1}) / (t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}) \otimes_E E_m.$$

Par ce qui précède appliqué à $T_r = D_\alpha(\pi')_r(\varepsilon^{\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle - 1})/(t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle})$ et la composée $\ker(f) \hookrightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \xrightarrow{h} T_r \otimes_E E_m$, quitte à augmenter m et r on en déduit $\ker(f) \hookrightarrow \ker(h) \xrightarrow{\sim} \widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)[t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}]$, et en particulier une suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$(119) \quad 0 \longrightarrow D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m \longrightarrow \widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)/\ker(f) \longrightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m)/\ker(f) \longrightarrow 0.$$

On en déduit aussi pour tout (φ, Γ) -module généralisé T sur \mathcal{R}_E un isomorphisme :

$$(120) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{(s, f_s, T_s) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)/\ker(f), T_s \otimes_E E_m) \\ \xrightarrow{\sim} \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{(s, f_s, T_s) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m), T_s \otimes_E E_m).$$

Par ailleurs, tout morphisme dans $\text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M_\alpha(\pi' \otimes_E E_m), T_s \otimes_E E_m)$ se factorise par $D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m$ quitte à augmenter s et m , d'où on déduit un isomorphisme :

$$(121) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{(s, f_s, T_s) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m), T_s \otimes_E E_m) \\ \xrightarrow{\sim} \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{(s, f_s, T_s) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(M_\alpha(\pi \otimes_E E_m), T_s \otimes_E E_m).$$

Étape 3

Notons $W \stackrel{\text{déf}}{=} \widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)/\ker(f)$, on déduit de (119) et (118) (en se souvenant que X est inversible dans $\mathcal{R}_{E_m}^r$) une suite exacte de $\mathcal{R}_{E_m}^r$ -modules dont les morphismes commutent à ψ et Γ :

$$(122) \quad 0 \rightarrow \mathcal{R}_{E_m}^r \otimes_{\mathcal{R}_{E_m}^+} (D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m) \rightarrow \mathcal{R}_{E_m}^r \otimes_{\mathcal{R}_{E_m}^+} W \rightarrow \mathcal{R}_{E_m}^r \otimes_{\mathcal{R}_{E_m}^+} (D_\alpha(\pi'')_r \otimes_E E_m) \rightarrow 0$$

(on montre qu'il y a bien encore un endomorphisme ψ sur chaque terme en tensorisant (148) pour $j = 1$ par $\mathcal{R}_{E_m}^{pr}$ au-dessus de $\mathcal{R}_{E_m}^+$). Considérons le "push-out" de (122) le long de la surjection canonique $\mathcal{R}_{E_m}^r \otimes_{\mathcal{R}_{E_m}^+} (D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m) \twoheadrightarrow D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m$ (dont on vérifie facilement qu'elle commute à ψ et Γ). C'est une suite exacte :

$$(123) \quad 0 \longrightarrow D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m \longrightarrow V \longrightarrow D_\alpha(\pi'')_r \otimes_E E_m \longrightarrow 0$$

de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$ telle que tout morphisme continu $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire $W \rightarrow T_s \otimes_E E_m$ (pour $s \geq r$) se factorise en un morphisme (continu) $\mathcal{R}_{E_m}^r$ -linéaire $V \rightarrow T_s \otimes_E E_m$ (utiliser le (iii) de la Remarque 2.3.1 pour montrer que $\mathcal{R}_{E_m}^r \otimes_{\mathcal{R}_{E_m}^+} (D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m) \rightarrow T_s \otimes_E E_m$ se factorise par $D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m \rightarrow T_s \otimes_E E_m$). On en déduit pour $s \geq r$:

$$(124) \quad \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(V, T_s \otimes_E E_m) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(W, T_s \otimes_E E_m).$$

Comme $D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m$ et $D_\alpha(\pi'')_r \otimes_E E_m$ sont des (φ, Γ) -modules généralisés sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$, le même argument qu'à la fin de la preuve du Lemme 4.1.7 montre que V

est aussi un (φ, Γ) -module généralisé sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$. Par (124), (120) et (121) (sans se préoccuper de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ pour le moment), on voit que l'on a :

$$(125) \quad F_\alpha(\pi)(-) \simeq E_\infty \otimes_{E_m} \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(V, (-) \otimes_E E_m)$$

avec V qui s'insère dans la suite exacte (123). En utilisant $F_\alpha(\pi'')(-) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi''), -)$ (Théorème 3.3.1) et l'hypothèse $F_\alpha(\pi')(-) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi'), -)$, on vérifie que l'action semi-linéaire de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ sur $M_\alpha((-) \otimes_E E_m)$ pour $(-) \in \{\pi', \pi, \pi''\}$ définie dans la preuve du (i) du Lemme 2.3.2 induit une action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ sur toutes les suites exactes de la preuve ci-dessus, où l'action sur $D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m$, $D_\alpha(\pi'')_+ \otimes_E E_m$ et $D_\alpha(\pi'')_r \otimes_E E_m$ est comme dans le Lemme 4.1.7. On déduit alors de *loc.cit.* que l'on a $V \simeq E_m \otimes_E D_\alpha(\pi)_r$ pour un unique (φ, Γ) -module $D_\alpha(\pi)_r$ sur \mathcal{R}_E^r qui s'insère dans une suite exacte $0 \rightarrow D_\alpha(\pi')_r \rightarrow D_\alpha(\pi)_r \rightarrow D_\alpha(\pi'')_r \rightarrow 0$ et tel que $F_\alpha(\pi)(-) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi), (-))$ par (125) (où $D_\alpha(\pi) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_\alpha(\pi)_r$). Cela achève la preuve du Théorème 4.1.5.

Remarque 4.2.1. — Un examen de la preuve ci-dessus du Théorème 4.1.5 montre qu'elle reste valable *verbatim* en supposant que π'' est de longueur finie avec un unique constituant irréductible générique qui est en sous-objet.

4.3. Premiers dévissages pour $G = \text{GL}_3$. — On commence la preuve du Théorème 4.1.6 pour GL_3 . Après un bref survol des étapes de la preuve (pour la commodité du lecteur), on montre comment se débarrasser des $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, -)$.

On conserve les notations du § 4.1 et on suppose donc maintenant $G = \text{GL}_3$ et $B =$ Borel supérieur. On rappelle que l'on a fixé une racine simple α , et on note β l'unique autre racine simple. On a les deux sous-groupes paraboliques maximaux associés P_α et P_β .

La preuve du Théorème 4.1.6 pour GL_3 étant longue, donnons-en d'abord les grandes étapes (le cas de GL_2 est analogue en beaucoup plus simple, cf. la fin du § 4.6). On part donc d'une suite exacte $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi' \rightarrow 0$ vérifiant les conditions de la Conjecture 4.1.3, et par le Théorème 4.1.5 on peut supposer la représentation irréductible π'' non localement algébrique. La représentation π'' peut toujours s'écrire $\pi'' \simeq \mathcal{F}_{P^-}^G(M, \pi_P^\infty)$ avec $P \in \{P_\alpha, P_\beta\}$.

(i) Il suffit de démontrer le Théorème 4.1.6 en remplaçant π'' par une induite parabolique localement analytique de $P^-(\mathbb{Q}_p)$ à $G(\mathbb{Q}_p)$ contenant π'' en sous-objet, cf. le Lemme 4.6.3.

(ii) Par la Proposition 4.3.1 ci-dessous, on se met en position d'appliquer le Lemme 4.1.8 en montrant que l'espace localement convexe $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'')$ est séparé. Cette étape et la suivante utilise de manière cruciale plusieurs résultats relativement techniques de Schraen ([64]).

(iii) On montre que, quitte à prendre m et r suffisamment grands, le morphisme composé :

$$M_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \otimes_E E_m) \longrightarrow M_\alpha(\pi' \otimes_E E_m) \longrightarrow D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m$$

est nul, cf. la Proposition 4.3.3. Par la propriété universelle de $D_\alpha(\pi')$, tout morphisme $M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \longrightarrow T_r \otimes_E E_m$ se factorise alors par la somme amalgamée $\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$ de la Proposition 4.3.3. Cette étape est l'Étape 1 du § 4.2.

Après (i)-(iii), on est ramené à une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m \longrightarrow \widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \longrightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \longrightarrow 0.$$

Plus rien ne se passera désormais du “côté gauche” de cette suite exacte. Toute la suite de la preuve va consister à montrer que l'on peut remplacer $M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m)$ du “côté droit” par $D_\alpha(\pi'')_r \otimes_E E_m$. Comme dans l'Étape 2 du § 4.2, il faut donc (essentiellement) montrer que le noyau de l'application $M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \longrightarrow D_\alpha(\pi'')_r \otimes_E E_m$ peut se relever dans $\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$ (toujours quitte à augmenter m et r), autrement dit que le “pull-back” de la suite exacte courte ci-dessus avec ce noyau en quotient est *scindé* comme suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. Mais π'' n'est plus localement algébrique, et les problèmes topologiques rencontrés sont beaucoup plus délicats qu'au § 4.2. Le mot clé dans la suite de la preuve est donc *scindage*.

(iv) On peut dévisser $M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m)$ sous la forme (voir (186)) :

$$0 \rightarrow M_\alpha(\text{cellule fermée}) \rightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \rightarrow M_\alpha(\text{cellule ouverte}) \rightarrow 0$$

et dans un premier temps, on montre qu'il existe une section $M_\alpha(\text{cellule fermée}) \hookrightarrow \widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$, cf. la Proposition 4.5.6. Cela nécessite plusieurs lemmes topologiques préliminaires (Lemme 4.5.2, Lemme 4.5.4) ainsi qu'un lemme de “passage à la limite” sur un système compatible de scindages (Lemme 4.5.7). On peut maintenant remplacer $\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$ par $\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)/M_\alpha(\text{cellule fermée})$ et $M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m)$ par $M_\alpha(\text{cellule ouverte})$.

(v) Dans un deuxième temps, on montre qu'il existe une section :

$$\ker(M_\alpha(\text{cellule ouverte}) \rightarrow D_\alpha(\pi'')_r \otimes_E E_m) \hookrightarrow (\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)/M_\alpha(\text{cellule fermée}))$$

(en fait il faut d'abord remplacer $D_\alpha(\pi'')_r$ par un module libre (de rang 1) sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$, mais ce point technique est mineur). C'est l'objet de la Proposition 4.6.1, qui utilise comme ingrédient essentiel la Proposition 4.4.3, elle-même utilisant le Lemme 4.4.1 (tous donnant des scindages sous des conditions variées). On peut donc tout quotienter par $\ker(M_\alpha(\text{cellule ouverte}) \rightarrow D_\alpha(\pi'')_r \otimes_E E_m)$ et obtenir une suite exacte $0 \rightarrow D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m \rightarrow * \rightarrow D_\alpha(\pi'')_r \otimes_E E_m \rightarrow 0$, ce qui (essentiellement) termine la preuve du Théorème 4.1.6 pour GL_3 .

Dans la plupart des preuves des §§ 4.3, 4.5 et 4.6, on est amené à distinguer les deux cas $P = P_\alpha$ et $P = P_\beta$, le cas $P = P_\beta$ étant techniquement plus compliqué.

Passons maintenant au début de la preuve du Théorème 4.1.6 (pour GL_3).

On note \mathfrak{n}_β la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p) = N(\mathbb{Q}_p) \cap L_{P_\beta}(\mathbb{Q}_p) = N_\beta(\mathbb{Q}_p)$, \mathfrak{l}_{P_α} la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ et \mathfrak{p}_β la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de $P_\beta(\mathbb{Q}_p)$. Comme mentionné ci-dessus, on montre d'abord un résultat de séparation pour $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, -)$. Pour G quelconque et π dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$, la séparation des espaces localement convexes $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi)$ semble un problème très délicat en général. Nous nous contenterons de la proposition qui suit pour GL_3 (et que nous ne savons pas montrer pour G plus général). Elle utilise de manière essentielle plusieurs résultats (parfois techniques) de [64, § 4.5] qu'il aurait été trop fastidieux de rappeler ici, mais auxquels nous essayons de renvoyer de manière la plus précise possible.

Proposition 4.3.1. — Soit $\pi = (\text{Ind}_{P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L(-\mu)_P \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}$ où $P \in \{P_\alpha, P_\beta\}$, $L(-\mu)_P$ est une représentation algébrique de $L_P(\mathbb{Q}_p)$ ($\mu \in X(T)$) et π_P^∞ est une représentation lisse de longueur finie de $L_P(\mathbb{Q}_p)$. Alors $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi)$ est séparé.

Démonstration. — On note $\pi_P \stackrel{\text{déf}}{=} L(-\mu)_P \otimes_E \pi_P^\infty$.

Cas 1 : $P = P_\alpha$.

Par (106) on a $\pi \simeq (\text{Ind}_{P_\beta(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_\beta)^{\text{an}}$ où $\pi_\beta \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_{P_\alpha}^{w_0}$ (avec une notation évidente). On a une décomposition $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p) = P_\beta(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p) \amalg P_\beta(\mathbb{Q}_p)P_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ où $P_\beta(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ est ouvert dans $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. On pose $C \stackrel{\text{déf}}{=} P_\beta(\mathbb{Q}_p)P_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ et on définit π_C comme en (76). On a une suite exacte dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ (cf. le début du § 3.5) :

$$(126) \quad 0 \longrightarrow (\text{c-Ind}_{P_\beta(\mathbb{Q}_p)}^{P_\beta(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\beta)^{\text{an}} \longrightarrow \pi \longrightarrow \pi_C \longrightarrow 0.$$

On va montrer que $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi)$ est séparé en appliquant le Lemme 4.1.9 (pour $i = 1$) à la suite exacte (126). Il faut donc vérifier les deux hypothèses de ce Lemme 4.1.9.

Comme $P_\alpha \cap w_0P_\beta w_0 = L_{P_\alpha}$, on a :

$$\begin{aligned} (\text{c-Ind}_{P_\beta(\mathbb{Q}_p)}^{P_\beta(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\beta)^{\text{an}} &\xrightarrow{\sim} (\text{c-Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\beta^{w_0})^{\text{an}} \simeq (\text{c-Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_{P_\alpha})^{\text{an}} \\ &\simeq C_c^{\text{an}}(N_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\alpha}) \simeq C_c^{\text{an}}(N^\alpha(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_{E, \iota} \pi_{P_\alpha} \end{aligned}$$

où le troisième (resp. dernier) isomorphisme se montre comme (64) (resp. (70)) et où l'action de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ est par translation à droite sur $C_c^{\text{an}}(N^\alpha(\mathbb{Q}_p), E)$ (et triviale sur π_{P_α}). Il suit alors de la preuve de [61, Prop. 3.1] que l'on a pour tout $i > 0$:

$$(127) \quad H^i(\mathfrak{n}^\alpha, (\text{c-Ind}_{P_\beta(\mathbb{Q}_p)}^{P_\beta(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\beta)^{\text{an}}) = 0.$$

En particulier on a $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, (\text{c-Ind}_{P_\beta(\mathbb{Q}_p)}^{P_\beta(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\beta)^{\text{an}}) = 0$.

Une preuve analogue à celle de [64, (4.101)], mais en remplaçant $H^q(\mathfrak{n}_2, -)$ dans *loc.cit.* par l'homologie de Lie $H_q(\mathfrak{n}_2, -)$ ([61, § 3]) ce qui ne change pas les arguments⁽²⁾, donne que pour $i \in \mathbb{Z}$ les espaces $H_i(\mathfrak{n}^\alpha, (\pi_C)^\vee)$ sont séparés et que l'on a

⁽²⁾En effet, les preuves de [46, Lem. 8.4] et [46, Th. 7.4] restent valables avec l'homologie de Lie plutôt que la cohomologie, et les autres ingrédients n'ont rien à voir avec ce choix.

des isomorphismes topologiques de $D(P_\alpha(\mathbb{Q}_p), E)$ -modules à droite (avec les notations de *loc.cit.* adaptées à nos conventions) :

$$(128) \quad H_i(\mathfrak{n}^\alpha, (\pi_C)^\vee) \simeq H_i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_\beta^\vee \widehat{\otimes}_{D(P_\beta(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}} D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}) \widehat{\otimes}_{D(P_\alpha(\mathbb{Q}_p), E)_{B(\mathbb{Q}_p), \iota}} D(P_\alpha(\mathbb{Q}_p), E).$$

Noter que l'on a utilisé $P_\beta(\mathbb{Q}_p) \cap P_\alpha(\mathbb{Q}_p) = B(\mathbb{Q}_p)$ et que la structure de $D(P_\alpha(\mathbb{Q}_p), E)_{B(\mathbb{Q}_p)}$ -module sur $H_i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_\beta^\vee \widehat{\otimes}_{D(P_\beta(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}} D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}})$ se fait en utilisant l'isomorphisme (dédduit de (78) et du Lemme 3.2.1) :

$$\pi_\beta^\vee \widehat{\otimes}_{D(P_\beta(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}} D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \simeq \pi_\beta^\vee \widehat{\otimes}_{D(P_\beta(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p), E)_{P_\beta(\mathbb{Q}_p)}.$$

Par un raisonnement analogue à la discussion suivant [64, Cor. 3.18] mais en échangeant espaces de type compacts et espaces de Fréchet (ce raisonnement ne concerne que les groupes $H_i(\mathfrak{n}^\alpha, -)$ et $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, -)$), pour tout $i \in \mathbb{Z}$ les espaces $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C)$ sont aussi séparés et on a un isomorphisme d'espaces de Fréchet réflexifs :

$$(129) \quad H_i(\mathfrak{n}^\alpha, (\pi_C)^\vee) \simeq H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C)^\vee.$$

Le Lemme 4.1.9 appliqué à (126) et $i = 1$ donne alors que $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi)$ est séparé.

Cas 2 : $P = P_\beta$.

Par (106) on a $\pi \simeq (\mathrm{Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\mathrm{an}}$ où $\pi_\alpha \stackrel{\mathrm{déf}}{=} \pi_{P_\beta}^{w_0}$ ainsi qu'une suite exacte analogue à (126) où $C = P_\alpha(\mathbb{Q}_p)$:

$$(130) \quad 0 \longrightarrow (\mathrm{c}\text{-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\mathrm{an}} \longrightarrow \pi \longrightarrow \pi_C \longrightarrow 0.$$

On va aussi appliquer le Lemme 4.1.9 à (130) et $i = 1$.

On pose dans la suite :

$$\pi_{N^\alpha} \stackrel{\mathrm{déf}}{=} (\mathrm{c}\text{-Ind}_{N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{N^\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_{P_\beta})^{\mathrm{an}}.$$

Rappelons qu'il s'agit du E -espace vectoriel de type compact des fonctions localement analytiques $f : N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \pi_{P_\beta}$ satisfaisant l'équation fonctionnelle usuelle et dont le support est compact dans $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)/N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_p$. On munit π_{N^α} de l'action usuelle de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ par translation à droite et de l'action de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p) = L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)$:

$$(131) \quad (l_\alpha f)(n^\alpha) \stackrel{\mathrm{déf}}{=} l_\alpha(f(l_\alpha^{-1}n^\alpha l_\alpha))$$

pour $l_\alpha \in L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)$, $n^\alpha \in N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ (où l_α agit via l'action de $P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)$ sur π_{P_β} qui se factorise par hypothèse par $L_{P_\beta}(\mathbb{Q}_p)$). On pose également :

$$(132) \quad \pi_{N^\alpha}^\infty \stackrel{\mathrm{déf}}{=} (\mathrm{c}\text{-Ind}_{N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{N^\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_{P_\beta}^\infty)^\infty$$

(en remplaçant "fonctions localement analytiques" par "fonctions localement constantes") que l'on munit de la topologie localement convexe la plus fine et des mêmes actions (lisses) de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ et $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)$.

Par [64, Lem. 4.15] on a des isomorphismes $P_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants :

$$(133) \quad \begin{aligned} (\mathrm{c}\text{-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\mathrm{an}} &\xrightarrow{\sim} (\mathrm{c}\text{-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_{P_\beta})^{\mathrm{an}} \\ &\xrightarrow{\sim} (\mathrm{Ind}_{L_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}} \pi_{N^\alpha})^{\mathrm{an}} \end{aligned}$$

où le deuxième isomorphisme est donné par $f \mapsto (l_\alpha \mapsto (n^\alpha \mapsto f(n^\alpha l_\alpha)))$, où l'action de $L_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}$ en bas à droite est l'action usuelle par translation à droite et l'action de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ y est :

$$(134) \quad (n^\alpha F)(l_\alpha) = (l_\alpha n^\alpha l_\alpha^{-1})(F(l_\alpha)),$$

l'action de $l_\alpha n^\alpha l_\alpha^{-1} \in N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur $F(l_\alpha)$ étant celle de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur π_{N^α} . L'argument de la preuve de [64, Prop. 4.16] (en plus simple car on peut directement argumenter sur le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\bigwedge \mathfrak{n}^\alpha, -)$ basé sur [64, Cor. 4.14] montre que *si* les $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_{N^\alpha})$ sont séparés (donc des espaces de type compact), alors on a des isomorphismes topologiques $P_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants pour tout $i \in \mathbb{Z}$ (avec même action de $P_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ à droite) :

$$(135) \quad H^i(\mathfrak{n}^\alpha, (\mathrm{c}\text{-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Ind}_{L_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}} H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_{N^\alpha}))^{\mathrm{an}}$$

et en particulier les $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, (\mathrm{c}\text{-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\mathrm{an}})$ sont alors aussi séparés. Comme N^α est ici commutatif (on est avec GL_3), une preuve analogue à celle de [64, (4.63)] donne des isomorphismes d'espaces de type compact :

$$H^i(\mathfrak{n}_\beta, \pi_{N^\alpha}) \simeq C_c^{\mathrm{an}}(N^\alpha(\mathbb{Q}_p)/N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_{E, \iota} H^i(\mathfrak{n}_\beta, \pi_{P_\beta})$$

où $H^i(\mathfrak{n}_\beta, \pi_{P_\beta}) \simeq H^i(\mathfrak{n}_\beta, L(-\mu)_{P_\beta}) \otimes \pi_{P_\beta}^\infty$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine. En utilisant $\mathfrak{n}^\alpha = (\mathfrak{n}^\alpha/\mathfrak{n}_\beta) \oplus \mathfrak{n}_\beta$, une application de la suite spectrale de Hochschild-Serre ([65, § 7.5]) donne alors un isomorphisme continu pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$(136) \quad \begin{aligned} H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_{N^\alpha}) \\ \xrightarrow{\sim} H^0\left(\mathfrak{n}^\alpha/\mathfrak{n}_\beta, C_c^{\mathrm{an}}(N^\alpha(\mathbb{Q}_p)/N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_{E, \iota} H^i(\mathfrak{n}_\beta, \pi_{P_\beta})\right) \\ \simeq C_c^\infty(N^\alpha(\mathbb{Q}_p)/N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_{E, \iota} H^i(\mathfrak{n}_\beta, \pi_{P_\beta}) \end{aligned}$$

qui est forcément un isomorphisme topologique puisque le terme de droite est muni de la topologie localement convexe la plus fine. En particulier les espaces $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_{N^\alpha})$ sont séparés, donc aussi les espaces $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, (\mathrm{c}\text{-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\mathrm{an}})$ par (135). De plus on déduit facilement de (136) (avec $\pi_{P_\beta} = L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E \pi_{P_\beta}^\infty$) que l'on a un isomorphisme de représentations localement algébriques de $L_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p) = L_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \cap B^-(\mathbb{Q}_p)$:

$$(137) \quad H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_{N^\alpha}) \simeq H^i(\mathfrak{n}_\beta, L(-\mu)_{P_\beta}) \otimes_E \pi_{N^\alpha}^\infty$$

où $H^i(\mathfrak{n}_\beta, L(-\mu)_{P_\beta})$ est nul si $i \notin \{0, 1\}$ et a dimension 1 si $i \in \{0, 1\}$ (l'action de $L_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \cap B^-(\mathbb{Q}_p)$ sur $H^i(\mathfrak{n}_\beta, L(-\mu)_{P_\beta})$ se factorise par $L_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \cap B^-(\mathbb{Q}_p) \rightarrow T(\mathbb{Q}_p)$).

Une preuve analogue à celle de [64, (4.76)] (basée sur les trois premières lignes de la preuve de [46, Th. 7.4] et sur celles de [46, Lem. 8.4] et [46, Th. 8.5]) montre que

les groupes d'homologie $H_i(\mathfrak{n}^\alpha, (\pi_C)^\vee)$ pour $i \in \mathbb{Z}$ sont de la forme $V_i^\vee \otimes_E ((\pi_{P_\beta}^\infty)^{w_0})^\vee$ où V_i est une représentation algébrique de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ de dimension finie, donc sont tous séparés. L'argument à la fin de la preuve de [64, Th. 3.15] donne alors des isomorphismes topologiques $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C) \simeq H_i(\mathfrak{n}^\alpha, (\pi_C)^\vee)^\vee \simeq V_i \otimes_E (\pi_{P_\beta}^\infty)^{w_0}$. En particulier les $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C)$ pour $i \in \mathbb{Z}$ sont munis de la topologie localement convexe la plus fine (donc séparée) et sont des représentations localement algébriques de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$.

Pour appliquer le Lemme 4.1.9 à (130) et $i = 1$, il reste à vérifier que l'image du morphisme :

$$H^0(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C) \rightarrow H^1(\mathfrak{n}^\alpha, (\mathfrak{c}\text{-Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0 P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\text{an}}) \simeq (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_{N^\alpha}))^{\text{an}}$$

est fermée. Comme $H^0(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C) \simeq V_0 \otimes_E (\pi_{P_\beta}^\infty)^{w_0}$, l'image tombe dans les vecteurs V_0 -localement algébriques pour $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ de l'induite à droite. Notons $W \stackrel{\text{déf}}{=} H^1(\mathfrak{n}_\beta, L(-\mu))$ (qui a dimension 1), il suffit de vérifier que, si V est une représentation algébrique de dimension finie de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ sur E , les vecteurs V -localement algébriques de :

$$(\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_{N^\alpha}))^{\text{an}} \stackrel{(137)}{\simeq} (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} W \otimes \pi_{N^\alpha}^\infty)^{\text{an}}$$

forment un sous-espace fermé muni de la topologie localement convexe la plus fine (dont tout sous-espace restera donc fermé). En raisonnant comme dans la preuve de [54, Prop. 4.5] on a un isomorphisme topologique \mathfrak{l}_{P_α} -équivariant :

$$(138) \quad (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} W \otimes \pi_{N^\alpha}^\infty)^{\text{an}} \simeq (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} W)^{\text{an}} \otimes_{E, \iota} \pi_{N^\alpha}^\infty$$

où l'action de \mathfrak{l}_{P_α} est triviale sur $\pi_{N^\alpha}^\infty$. Par [31, Prop. 4.2.10] les vecteurs V -localement algébriques de (138) sont :

$$\left(\text{Hom}_{\mathfrak{l}_{P_\alpha}}(V, (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} W)^{\text{an}}) \otimes_E V \right) \otimes_{E, \iota} \pi_{N^\alpha}^\infty$$

où $\text{Hom}_{\mathfrak{l}_{P_\alpha}}(V, (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} W)^{\text{an}}) \otimes_E V$ est muni de la topologie induite par $(\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} W)^{\text{an}}$ via l'application d'évaluation (qui est injective). Mais en se souvenant que $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \simeq \text{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathbb{Q}_p^\times$ et que W est un caractère algébrique du tore $T(\mathbb{Q}_p)$, la structure de $(\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} W)^{\text{an}}$ est la même que celle des séries principales localement analytiques de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, où il est bien connu que les vecteurs localement algébriques forment un sous-espace fermé avec la topologie localement convexe la plus fine ([62, § 4]). \square

La Proposition 4.3.1 et le Lemme 4.1.8 impliquent le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.2. — Soit $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ et $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi' \rightarrow 0$ une suite exacte dans $\text{Rep}_{E_m}^{\text{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ avec $\pi'' \simeq (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L(-\mu)_P \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}$ où $P \in \{P_\alpha, P_\beta\}$, $\mu \in X(T)$ et

π_P^∞ est de longueur finie. On a un complexe de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$M_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'')) \xrightarrow{h} M_\alpha(\pi') \xrightarrow{g} M_\alpha(\pi) \longrightarrow M_\alpha(\pi'') \longrightarrow 0$$

qui est exact en $M_\alpha(\pi'')$ et $M_\alpha(\pi)$ et tel que l'image de h est dense dans $\ker(g)$.

On note $\det : L_{P_\alpha} \rightarrow \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ le morphisme de groupes algébriques induit par le déterminant de GL_2 . Pour $i \in \mathbb{Z}$ on note :

$$\pi_{N^\alpha}^i \stackrel{\text{déf}}{=} H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_{N^\alpha}) \stackrel{(137)}{\simeq} H^i(\mathfrak{n}_\beta, L(-\mu)_{P_\beta}) \otimes_E \pi_{N^\alpha}^\infty$$

dont on a vu dans la preuve de la Proposition 4.3.1 que c'est une représentation localement algébrique de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)$ nulle pour $i \notin \{0, 1\}$, et la tordue de $\pi_{N^\alpha}^\infty$ par un caractère algébrique de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)$ se factorisant par $T(\mathbb{Q}_p)$ si $i \in \{0, 1\}$ (avec topologie localement convexe la plus fine).

La proposition suivante permet de se débarrasser des $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, -)$ en se ramenant à une suite exacte comme en (117).

Proposition 4.3.3. — Soit $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi' \rightarrow 0$ une suite exacte dans $\mathrm{Rep}_E^{\mathrm{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ avec π'' comme dans le Corollaire 4.3.2 et $F_\alpha(\pi')(-) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi'), -)$ pour un (φ, Γ) -module généralisé $D_\alpha(\pi')$ sur \mathcal{R}_E (rappelons que $\lambda \in X(T)$ est dominant par rapport à B^-). On fait les hypothèses additionnelles suivantes :

- (i) si $P = P_\alpha$ l'action de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ sur $\pi_{P_\alpha}^\infty$ se factorise par $\det : L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$;
- (ii) si $P = P_\beta$ on a $\mu = w \cdot \lambda$ pour un $w \in W$.

Alors il existe $m \gg 0$, $r \gg 0$ tels que le “push-out” de la suite exacte $M_\alpha(\pi' \otimes_E E_m) \rightarrow M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \rightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \rightarrow 0$ (cf. Proposition 2.1.6) le long du morphisme $f : M_\alpha(\pi' \otimes_E E_m) \rightarrow D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m$ (cf. (115)) donne une suite exacte courte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$0 \longrightarrow D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m \longrightarrow \widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \longrightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \longrightarrow 0$$

où $\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \stackrel{\text{déf}}{=} (D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m) \oplus_{f, M_\alpha(\pi' \otimes_E E_m)} M_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$.

Démonstration. — Par le Corollaire 4.3.2, il suffit comme dans l'Étape 1 au § 4.2 de montrer que, quitte à augmenter m et r , la composée $M_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \otimes_E E_m) \rightarrow M_\alpha(\pi' \otimes_E E_m) \xrightarrow{f} D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m$ est nulle. Comme dans la preuve de la Proposition 4.3.1, on distingue les deux cas $P = P_\alpha$ et $P = P_\beta$.

Cas 1 : $P = P_\alpha$.

La suite exacte longue des $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, -)$ déduite de la suite exacte courte (126) appliquée à $\pi = \pi''$ avec (127) impliquent $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \xrightarrow{\sim} H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C)$, et donc :

$$(139) \quad M_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C) \otimes_E E_m) \xrightarrow{\sim} M_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \otimes_E E_m).$$

Rappelons que l'algèbre de groupe $E_m[P_\alpha(\mathbb{Q}_p)]$ est un sous-espace dense de $D(P_\alpha(\mathbb{Q}_p), E_m)$ ([59, Lem. 3.1]). Avec la preuve de [46, Th. 7.4] (voir la note de bas de page dans la preuve de la Proposition 4.3.1) et le Lemme 3.2.4, on a que pour tout $i \geq 0$ le morphisme canonique :

$$\begin{aligned} & H_i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_\beta^\vee \otimes_{U(\mathfrak{p}_\beta, E)} U(\mathfrak{gl}_3, E_m)) \otimes_{E_m[B(\mathbb{Q}_p)]} E_m[P_\alpha(\mathbb{Q}_p)] \\ \longrightarrow & H_i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_\beta^\vee \widehat{\otimes}_{D(P_\beta(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}} D(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p), E_m)_{\{1\}}) \widehat{\otimes}_{D(P_\alpha(\mathbb{Q}_p), E_m)_{B(\mathbb{Q}_p), \iota}} D(P_\alpha(\mathbb{Q}_p), E_m) \end{aligned}$$

est d'image dense. Il découle alors de (128) et (129) avec (18) que l'on a un morphisme d'image dense :

$$(140) \quad \left(H_i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_\beta^\vee \otimes_{U(\mathfrak{p}_\beta, E)} U(\mathfrak{gl}_3, E_m)) \otimes_{E_m[B(\mathbb{Q}_p)]} E_m[P_\alpha(\mathbb{Q}_p)] \right) (\eta)_{N_m^\alpha} \longrightarrow M_\alpha(H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C) \otimes_E E_m).$$

En se souvenant que $\pi_\beta \simeq (L(-\mu)_{P_\alpha})^{w_0} \otimes_E (\pi_{P_\alpha}^\infty)^{w_0}$ on a pour $i \geq 0$:

$$\begin{aligned} & H_i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_\beta^\vee \otimes_{U(\mathfrak{p}_\beta, E)} U(\mathfrak{gl}_3, E_m)) \\ & \simeq H_i(\mathfrak{n}^\alpha, (L^-(\mu)_{P_\alpha})^{w_0} \otimes_{U(\mathfrak{p}_\beta, E)} U(\mathfrak{gl}_3, E_m)) \otimes_E (\pi_{P_\alpha}^\infty)^{w_0} \end{aligned}$$

d'où on déduit que l'action de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ est triviale sur $H_i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_\beta^\vee \otimes_{U(\mathfrak{p}_\beta, E)} U(\mathfrak{gl}_3, E_m))$ car elle est triviale sur chaque facteur du produit tensoriel de droite (on utilise ici l'hypothèse (i) sur $\pi_{P_\alpha}^\infty$). Comme $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ est un sous-groupe normal de $P_\alpha(\mathbb{Q}_p)$, on voit que l'action de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$, et *a fortiori* de N_m^α , est aussi triviale sur $H_i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_\beta^\vee \otimes_{U(\mathfrak{p}_\beta, E)} U(\mathfrak{gl}_3, E_m)) \otimes_{E_m[B(\mathbb{Q}_p)]} E_m[P_\alpha(\mathbb{Q}_p)]$. Cela implique que le terme de gauche en (140) est nul (pour m tel que $\eta|_{N_m^\alpha} \neq 1$), et donc :

$$(141) \quad M_\alpha(H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C) \otimes_E E_m) = 0 \text{ pour tout } i \geq 0.$$

On a donc $M_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \otimes_E E_m) = 0$ par (139).

Cas 2 : $P = P_\beta$.

Par le Cas 2 de la preuve de la Proposition 4.3.1 et par la suite exacte (130) appliquée à $\pi = \pi''$, on a une suite exacte d'espaces de type compact munis d'une action lisse de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$:

$$H^0(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C) \longrightarrow H^1(\mathfrak{n}^\alpha, (\mathrm{c}\text{-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\mathrm{an}}) \longrightarrow H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \longrightarrow H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C).$$

L'action de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ étant triviale sur $H^i(\mathfrak{n}^\alpha, \pi_C) \simeq V_i^\vee \otimes_E ((\pi_{P_\beta}^\infty)^{w_0})^\vee$ pour tout i (cf. l'avant-dernier paragraphe de la preuve de la Proposition 4.3.1), on en déduit un isomorphisme d'espaces de type compact (pour $m \gg 0$) :

$$(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, (\mathrm{c}\text{-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\mathrm{an}}) \otimes_E E_m) (\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \xrightarrow{\sim} (H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \otimes_E E_m) (\eta^{-1})_{N_m^\alpha}$$

et donc un isomorphisme :

$$(142) \quad M_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, \pi'') \otimes_E E_m) \xrightarrow{\sim} M_\alpha(H^1(\mathfrak{n}^\alpha, (\mathrm{c}\text{-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\mathrm{an}}) \otimes_E E_m).$$

Avec (135), il suffit donc de montrer que le morphisme dans $F(\varphi, \Gamma)_\infty$:

$$F_\alpha(\pi') \longrightarrow F_\alpha\left(\left(\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha}^1\right)^{\text{an}}\right)$$

est nul. Par le Lemme 4.1.1 et l'hypothèse sur π' , il suffit (comme dans l'Étape 1 au § 4.2) de montrer que le terme de droite est de la forme $E_\infty(\chi_{-w' \cdot \lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D, -)$ pour un certain (φ, Γ) -module D et un caractère $w' \cdot \lambda \in X(T)$ *distinct* de λ et $s_\alpha \cdot \lambda$.

En décomposant :

$$L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) = (L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p))(L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B(\mathbb{Q}_p)) \\ \amalg (L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p))s_\alpha(L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B(\mathbb{Q}_p)),$$

on peut dévisser $(\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha}^i)^{\text{an}}$ pour $i \geq 0$ comme aux §§ 3.4 et 3.6.

La contribution de la cellule ouverte $(L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p))(L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B(\mathbb{Q}_p))$ est $C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N^\alpha}^i)$, il faut donc calculer $F_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N^\alpha}^i))$ comme au § 3.4. Mais on doit ici faire attention à l'action (134) de N_m^α . Si $\delta \in \{\alpha, \beta\}$ notons $N_{\delta, m} \stackrel{\text{déf}}{=} N_\delta(\mathbb{Q}_p) \cap N_m$. Par un argument comme pour le Lemme 3.4.3, on se ramène à calculer $\lim_{m \rightarrow +\infty} F_{\alpha, m}(C^{\text{an}}(N_{\alpha, m}, \pi_{N^\alpha}^i))$. Soit $\gamma \stackrel{\text{déf}}{=} \alpha + \beta = e_1 - e_3$ (cf. Exemple 2.1.1), le caractère η étant trivial sur $N_\gamma(\mathbb{Q}_p)$ et l'action de $N_\gamma(\mathbb{Q}_p)$ commutant à celle de $N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ on a :

$$C^{\text{an}}(N_{\alpha, m}, \pi_{N^\alpha}^i \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_{\gamma, m}} \simeq C^{\text{an}}(N_{\alpha, m}, (\pi_{N^\alpha}^i \otimes_E E_m)_{N_{\gamma, m}})$$

et l'action de $N_\beta(\mathbb{Q}_p)$ commutant à celle de $N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ dans le quotient $N(\mathbb{Q}_p)/N_\gamma(\mathbb{Q}_p)$, on déduit :

$$C^{\text{an}}(N_{\alpha, m}, \pi_{N^\alpha}^i \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \simeq C^{\text{an}}(N_{\alpha, m}, E_m) \otimes_{E_m} ((\pi_{N^\alpha}^i \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha}).$$

Par [64, Th. 4.10] on a $H^1(\mathfrak{n}_\beta, L(-\mu)_{P_\beta}) \simeq E(-s_\beta \cdot \mu)$, d'où (cf. (132) pour $\pi_{N^\alpha}^\infty$) :

$$(\pi_{N^\alpha}^1 \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha} \simeq E(-s_\beta \cdot \mu) \otimes_E (\pi_{N^\alpha}^\infty \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha}.$$

De plus, on vérifie facilement (en utilisant $\eta|_{N_\gamma(\mathbb{Q}_p)} = 1$) que l'on a un isomorphisme :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (\pi_{N^\alpha}^\infty \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha} = (\pi_{N^\alpha}^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N^\alpha(\mathbb{Q}_p)} \\ \xrightarrow{\sim} (\pi_{P_\beta}^\infty \otimes_E E_\infty)(\eta^{-1})_{N_{L_{P_\beta}(\mathbb{Q}_p)}}$$

induit par $f \in \pi_{N^\alpha}^\infty \mapsto f(1) \in \pi_{P_\beta}^\infty$. Un argument comme dans la preuve de la Proposition 3.4.4 donne alors pour un D convenable :

$$(143) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} F_{\alpha, m}(C^{\text{an}}(N_{\alpha, m}, \pi_{N^\alpha}^1)) \simeq E_\infty(\chi_{-s_\beta \cdot \mu}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D, -).$$

Pour la cellule fermée, regardons d'abord sa contribution lorsque $i = 0$. Il suit de (133) que l'on a un isomorphisme $(\text{c-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N^\alpha})$ d'où on déduit avec (134) :

$$(144) \quad (\text{c-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha)^{\text{an}}[\mathfrak{n}^\alpha] \xrightarrow{\sim} C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N^\alpha}^0).$$

Par l'exactitude à gauche de F_α et la Proposition 3.6.2 on sait que :

$$\begin{aligned} F_\alpha\left(\left(\text{c-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0P_\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha\right)^{\text{an}}[\mathfrak{n}^\alpha] / \left(\text{c-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha\right)^{\text{an}}[\mathfrak{n}^\alpha]\right) \\ \hookrightarrow F_\alpha\left(\left(\text{Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha\right)^{\text{an}} / \left(\text{c-Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)w_0B(\mathbb{Q}_p)} \pi_\alpha\right)^{\text{an}}\right) = 0 \end{aligned}$$

d'où par (135) pour $i = 0$ et (144) :

$$(145) \quad F_\alpha\left(\left(\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N_\alpha}^0\right)^{\text{an}} / C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N_\alpha}^0)\right) = 0.$$

Donc la contribution de la cellule fermée est nulle pour $i = 0$.

Maintenant, les représentations $\pi_{N_\alpha}^i$ sont toutes de la forme : (caractère algébrique du tore) $\otimes_E \pi_{N_\alpha}^\infty$, et seul le caractère algébrique change entre $i = 0$ et $i > 0$. Mais il est clair sur la définition de F_α que la nullité en (145) n'a rien à voir avec le caractère algébrique particulier apparaissant dans $\pi_{N_\alpha}^0$. Autrement dit on a pour tout $i \geq 0$:

$$(146) \quad F_\alpha\left(\left(\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N_\alpha}^i\right)^{\text{an}} / C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N_\alpha}^i)\right) = 0.$$

Par (143) et (146) pour $i = 1$ on obtient donc :

$$\begin{aligned} E_\infty(\chi_{-s_\beta \cdot \mu}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D, -) \simeq F_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N_\alpha}^1)) \\ \xrightarrow{\sim} F_\alpha\left(\left(\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N_\alpha}^1\right)^{\text{an}}\right). \end{aligned}$$

Par l'hypothèse (ii), on a $s_\beta \cdot \mu = (s_\beta w) \cdot \lambda$. Comme μ est par hypothèse dominant par rapport à $B^- \cap L_{P_\beta}$, $s_\beta \cdot \mu$ ne peut plus l'être, et est donc toujours distinct de λ et $s_\alpha \cdot \lambda$ qui eux le sont. Cela achève la preuve du Cas 2. \square

Remarque 4.3.4. — (i) La Proposition 4.3.3 reste en fait valable sans supposer que l'action de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ sur $\pi_{P_\alpha}^\infty$ se factorise par det. Il faut pour cela décomposer $P_\alpha(\mathbb{Q}_p) = B(\mathbb{Q}_p)s_\alpha B(\mathbb{Q}_p) \amalg B(\mathbb{Q}_p)$ dans le Cas 1 et faire un dévissage comme dans le Cas 2 en procédant comme dans la preuve de la Proposition 3.6.2. Comme nous nous limiterons à la catégorie $C_{\lambda, \alpha}$, nous n'aurons besoin que du cas de l'énoncé, qui a l'avantage d'être plus court à montrer.

(ii) Par ailleurs (146) peut aussi se montrer directement (mais avec une preuve plus longue) par des considérations analogues à celles de la preuve de la Proposition 3.6.2 (noter que, du point de vue du groupe $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$, on est sur la cellule $P_\alpha(\mathbb{Q}_p)s_\beta B(\mathbb{Q}_p)$).

4.4. Un scindage technique. — On démontre un résultat technique de scindage sur des (ψ, Γ) -module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ (Proposition 4.4.3 ci-dessous).

Lemme 4.4.1. — Soit B un module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ qui est un espace de Banach, M_m pour $m \geq 1$ des modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ et $\prod_{m \geq 1} M_m$ le module de Fréchet

sur \mathcal{R}_E^+ obtenu en prenant la topologie produit.

(i) Toute suite exacte (stricte) :

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow V \longrightarrow \prod_{m \geq 1} M_m \longrightarrow 0$$

de modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ où la topologie de V peut être définie par des semi-normes q telles qu'il existe $C_q \in \mathbb{R}_{>0}$ vérifiant $q(Xv) \leq C_q q(v)$ pour tout $v \in V$ est scindée après "pull-back" le long de $\prod_{m \geq N} M_m \hookrightarrow \prod_{m \geq 1} M_m$ pour un $N \gg 0$.

(ii) Supposons de plus que les \mathcal{R}_E^+ -modules M_m sont tous libres de rang fini, alors la suite exacte en (i) est scindée.

Démonstration. — (i) La topologie de B est définie par une norme $\|-\|_B$ et celle de V par des semi-normes q_k (pour k dans un ensemble dénombrable) telles que $q_k(Xv) \leq C_{q_k} q_k(v)$ pour tout k et tout $v \in V$. Comme la topologie de B est aussi définie par les restrictions $(q_k|_B)_k$, par [57, Cor. 6.2] il existe $C_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et k_1, \dots, k_t tels que $\|b\|_B \leq C_1 \max(q_{k_1}(b), \dots, q_{k_t}(b))$ pour tout $b \in B$. Par ailleurs, pour toute semi-norme continue q sur V , par [57, Cor. 6.2] (encore) il existe $C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $q(b) \leq C_2 \|b\|_B$ pour tout $b \in B$. En appliquant cela à $q \stackrel{\text{déf}}{=} \max(q_{k_1}, \dots, q_{k_t})$, on voit que q induit une semi-norme sur B qui est équivalente à la norme $\|-\|_B$ (et donc est une norme sur B). Notons que l'on a encore $q(Xv) \leq C_q q(v)$ (pour un $C_q \in \mathbb{R}_{>0}$) pour tout $v \in V$. Notons $M \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{m \geq 1} M_m$, la semi-norme quotient \bar{q} sur M est continue, donc (toujours par [57, Cor. 6.2]) il existe $C_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et des semi-normes p_1, \dots, p_s sur M (dans une famille dénombrable de semi-normes définissant sa topologie) tels que $\bar{q}(x) \leq C_3 \max(p_1(x), \dots, p_s(x))$ pour tout $x \in M$. Mais par définition de la topologie produit ([57, § 5.D]), il existe un entier $N \gg 0$ tel que $p_j|_{\prod_{m \geq N} M_m} = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$, donc on a aussi $\bar{q}|_{\prod_{m \geq N} M_m} = 0$.

Notons $V_N \subseteq V$ l'image inverse de $\prod_{m \geq N} M_m \hookrightarrow M$, on a une suite exacte (stricte) $0 \rightarrow B \rightarrow V_N \rightarrow \prod_{m \geq N} M_m \rightarrow 0$ de modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ . Il suit facilement de $q(X-) \leq C_q q(-)$ que le noyau $\ker(q|_{V_N})$ de la semi-norme $q|_{V_N}$ est un sous- \mathcal{R}_E^+ -module (fermé) de V_N , donc un module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ . Pour montrer (i), il suffit de montrer que le morphisme continu de modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ obtenu comme composé de $\ker(q|_{V_N}) \hookrightarrow V_N \twoheadrightarrow \prod_{m \geq N} M_m$ est un isomorphisme (forcément topologique puisque ce sont des espaces de Fréchet), son inverse fournissant alors une section continue de $V_N \twoheadrightarrow \prod_{m \geq N} M_m$. Il est injectif, car si $v \in B$ est tel que $q(v) = 0$, alors $v = 0$ puisque $q|_B$ est une norme. Montrons la surjectivité. Soit $x \in \prod_{m \geq N} M_m$, comme $\bar{q}(x) = 0$, par définition de la semi-norme quotient \bar{q} ([57, § 5.B]) il existe une suite $(v_n)_{n \geq 0}$ de relevés de x dans V_N telle que $q(v_n) \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini. En particulier $q(v_n - v_{n-1}) \rightarrow 0$, et comme $v_n - v_{n-1} \in B$, on a aussi $\|v_n - v_{n-1}\|_B \rightarrow 0$. On a vu que pour toute semi-norme continue q' sur V_N il existe $C'_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $q'(b) \leq C'_2 \|b\|_B$ pour tout $b \in B$, donc $q'(v_n - v_{n-1}) \rightarrow 0$ pour toute semi-norme continue q' . Donc la suite $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy dans le sous-espace fermé $\ker(q|_{V_N})$ de V_N , et en conséquence a une limite $v \in \ker(q|_{V_N})$ puisque $\ker(q|_{V_N})$ est

complet. Par continuité de $\ker(q|_{V_N}) \rightarrow \prod_{m \geq N} M_m$, v est aussi un relevé de x dans $\ker(q|_{V_N})$, d'où la surjectivité.

(ii) Notons s la section \mathcal{R}_E^+ -linéaire continue $\prod_{m \geq N} M_m \hookrightarrow V$ construite en (i), il suffit de montrer que la suite exacte courte (stricte) $0 \rightarrow B \rightarrow V/s(\prod_{m \geq N} M_m) \rightarrow \prod_{N > m \geq 1} M_m \rightarrow 0$ de modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ est aussi scindée, car on obtient alors un scindage de la suite exacte de l'énoncé en considérant $V \rightarrow V/s(\prod_{m \geq N} M_m) \simeq B \oplus \prod_{N > m \geq 1} M_m \twoheadrightarrow B$. Mais cela découle facilement du fait que $\prod_{N > m \geq 1} M_m$ est libre de rang fini sur \mathcal{R}_E^+ (il suffit de relever une base sur \mathcal{R}_E^+ et d'utiliser [57, Cor. 8.7]). \square

Remarque 4.4.2. — On peut montrer que le Lemme 4.4.1 est faux si l'on suppose seulement que B est un module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ .

La suite du paragraphe est consacrée à la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 4.4.3. — Soit $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$, D_r un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r sans torsion, M_m pour $m \geq 1$ des \mathcal{R}_E^+ -modules libres de rang fini et $\prod_{m \geq 1} M_m$ le module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ obtenu en prenant la topologie produit. On suppose que $M \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{m \geq 1} M_m$ est muni d'une structure de (ψ, Γ) -module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ telle que, pour tout $m \geq 1$, Γ préserve M_m et ψ induit un morphisme de E -espaces vectoriels $M_m \rightarrow M_{m+1}$. Alors toute suite exacte (stricte) :

$$(147) \quad 0 \longrightarrow D_r \longrightarrow V \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ où la topologie de V peut être définie par des semi-normes q telles qu'il existe $C_q \in \mathbb{R}_{>0}$ vérifiant $q(Xv) \leq C_q q(v)$ pour tout $v \in V$ devient scindée après “push-out” le long de $D_r \rightarrow D_{r'}$ pour $r' \gg r$.

Notons que le (ii) du Lemme 3.2.2 avec la Remarque 3.2.3 montrent que la suite exacte obtenue après “push-out” le long de $D_r \rightarrow D_{r'}$ est encore une suite exacte (stricte) de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ .

Si C est un (ψ, Γ) -module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ , pour tout $j \geq 1$ on a une application \mathcal{R}_E^+ -linéaire qui commute à Γ (cf. (30) pour $j = 1$) :

$$(148) \quad \begin{aligned} \tilde{\psi}_j : C &\longrightarrow \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi^j, \mathcal{R}_E^+} C \simeq \bigoplus_{i=0}^{p^j-1} (1+X)^i \otimes C \\ v &\longmapsto \sum_{i=0}^{p^j-1} (1+X)^i \otimes \frac{\psi^j((1+X)^{p^j-i}v)}{(1+X)}. \end{aligned}$$

Si C est un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r , l'application $\tilde{\psi}_j$ se factorise comme suit (cf. (25), (26) et (29) pour $j = 1$) :

$$(149) \quad C \xrightarrow{1 \otimes \text{Id}} \mathcal{R}_E^{p^j r} \otimes_{\mathcal{R}_E^r} C \xrightarrow{(\text{Id} \otimes \tilde{\varphi}^j)^{-1}} \mathcal{R}_E^{p^j r} \otimes_{\varphi^j, \mathcal{R}_E^r} C \xleftarrow{\sim} \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi^j, \mathcal{R}_E^+} C.$$

Lemme 4.4.4. — Avec les notations et hypothèses de la Proposition 4.4.3, il suffit de montrer l'existence d'un scindage de (147) pour les modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ sous-jacents, i.e. en oubliant ψ , Γ .

Démonstration. — On suppose que l'on a un scindage $V \simeq D_r \oplus M$ de modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ , et il faut montrer que, quitte à modifier ce scindage de \mathcal{R}_E^+ -modules (en augmentant éventuellement r), on peut se ramener à une situation où il est de plus compatible aux actions de ψ et de Γ . On note γ un générateur topologique de Γ , par continuité de l'action de Γ , il suffit de considérer les actions de ψ et γ .

Le morphisme $\psi : D_r \oplus M \rightarrow D_r \oplus M$ (resp. avec γ au lieu de ψ) induit le morphisme E -linéaire (composé) $\delta\psi : M \hookrightarrow D_r \oplus M \xrightarrow{\psi} D_r \oplus M \twoheadrightarrow D_r$ (resp. avec $\delta\gamma$ au lieu de $\delta\psi$). Par le (i) de la Remarque 3.2.8 appliqué avec $X_N = \prod_{N \geq m \geq 1} M_m$ (qui utilise que D_r est sans torsion), on obtient $N \gg 0$ tel que $\delta\psi|_{\prod_{m \geq N} M_m} = \delta\gamma|_{\prod_{m \geq N} M_m} = 0$, autrement dit le “pull-back” de (147) le long de $\prod_{m \geq N} M_m \hookrightarrow \prod_{m \geq 1} M_m$ est scindé comme suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ .

Considérons alors la suite exacte (stricte) de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ :

$$0 \longrightarrow D_r \longrightarrow W \longrightarrow \prod_{N > m \geq 1} M_m \longrightarrow 0$$

où $W \stackrel{\text{déf}}{=} V / \prod_{m \geq N} M_m$ et $\prod_{N > m \geq 1} M_m \simeq \prod_{m \geq 1} M_m / \prod_{m \geq N} M_m$, donc par hypothèse $\psi^N = 0$ sur $\prod_{N > m \geq 1} M_m$. Le morphisme $\tilde{\Psi}_N$ en (148) induit alors avec (149) une suite exacte où tous les morphismes sont \mathcal{R}_E^+ -linéaires et commutent à Γ :

$$(150) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D_{p^N r} & \longrightarrow & D_{p^N r} \oplus_{D_r} W & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \tilde{\Psi}_N & & \downarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi^N, \mathcal{R}_E^+} D_r & \longrightarrow & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi^N, \mathcal{R}_E^+} W & \longrightarrow & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi^N, \mathcal{R}_E^+} M \longrightarrow 0. \end{array}$$

Avec le lemme des serpents on en déduit facilement un isomorphisme $\ker(\tilde{\Psi}_N) \xrightarrow{\sim} M$. C'est un exercice de vérifier que $\ker(\tilde{\Psi}_N)$ est stable par ψ (manipuler les égalités $\psi^N((1+X)^{p^N-i}v) = 0$ pour tout i en (148)) et il est clairement stable par Γ . Comme $D_{p^N r} \oplus_{D_r} W \rightarrow M$ commute à ψ , on en déduit finalement une injection \mathcal{R}_E^+ -linéaire continue $M \hookrightarrow D_{p^N r} \oplus_{D_r} W$ qui commute à ψ et Γ . En argumentant comme dans la preuve du (ii) du Lemme 4.4.1, on obtient le scindage cherché en remplaçant r par $p^N r$. \square

On démontre maintenant l'existence d'un scindage de (147) pour les modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ sous-jacents.

Pour tout $n \geq 1$ soit $I_n \stackrel{\text{déf}}{=} [r, p^n r]$ et D_{I_n} comme en (27), par le (ii) du Lemme 3.2.2 et la Remarque 3.2.3 on a des suites exactes strictes $0 \rightarrow D_{I_n} \rightarrow D_{I_n} \oplus_{D_r} V \rightarrow M \rightarrow 0$

de modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ et deux séries de diagrammes commutatifs de \mathcal{R}_E^+ -modules pour $n \geq 2$ (la première induite par les restrictions et la deuxième par (29) et (148)) :

$$(151) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D_{I_n} & \longrightarrow & D_{I_n} \oplus_{D_r} V & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & D_{I_{n-1}} & \longrightarrow & D_{I_{n-1}} \oplus_{D_r} V & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ \\ 0 & \longrightarrow & D_{I_n} & \longrightarrow & D_{I_n} \oplus_{D_r} V & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tilde{\psi} & & \downarrow \tilde{\psi} & & \downarrow \tilde{\psi} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_{n-1}} & \longrightarrow & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} (D_{I_{n-1}} \oplus_{D_r} V) & \longrightarrow & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} M \longrightarrow 0. \end{array}$$

De plus une chasse au diagramme évidente sur (151) donne :

$$V \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \rightarrow +\infty} D_{I_n} \oplus_{D_r} V.$$

Par le Lemme 4.4.1 (que l'on peut appliquer car D_{I_n} est un espace de Banach), on a pour $n \geq 1$ des scindages de \mathcal{R}_E^+ -modules $D_{I_n} \oplus_{D_r} V \simeq D_{I_n} \oplus M$ et pour $n \geq 2$ on définit $\delta_n \text{res} : M \hookrightarrow D_{I_n} \oplus M \rightarrow D_{I_{n-1}} \oplus M \rightarrow D_{I_{n-1}}$. L'application continue $\delta_n \text{res} : M = \prod_{m \geq 1} M_m \rightarrow D_{I_{n-1}}$ est toujours nulle en restriction à tous les M_m sauf un nombre fini par le Lemme 3.2.6 appliqué avec $X_N = \prod_{N \geq m \geq 1} M_m$. On voit avec (151) qu'il suffit de montrer que l'on peut modifier ces scindages à chaque cran n pour n suffisamment grand de sorte que $\delta_n \text{res} = 0$.

Pour $n \geq 2$ on définit $m_n \stackrel{\text{déf}}{=} \max\{m \geq 1, \delta_n \text{res}|_{M_m} \neq 0\}$. Si la suite m_n est bornée quand $n \rightarrow +\infty$, alors il existe $N \gg 0$ tel que $\delta_n \text{res}|_{\prod_{m \geq N} M_m} = 0$ pour tout $n \geq 2$, i.e. le "pull-back" de (147) le long de $\prod_{m \geq N} M_m \hookrightarrow M$ est scindé comme suite exacte de modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ , et le même argument que dans la preuve du (ii) du Lemme 4.4.1 donne alors un scindage de (147) (pour les structures de modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+). On suppose donc que la suite m_n n'est pas bornée.

Le même argument de support que pour $\delta_n \text{res}$ donne que pour $n \geq 2$ la composée :

$$\delta_n \tilde{\psi} : M \hookrightarrow D_{I_n} \oplus M \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_{n-1}} \oplus \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} M \rightarrow \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_{n-1}}$$

est nulle sur tous les M_m sauf un nombre fini. On définit $j_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \max\{m \geq 1, \delta_2 \tilde{\psi}|_{M_m} \neq 0\}$ (seule valeur dont on aura besoin). On note n_2 le plus petit entier ≥ 3 tel que $m_{n_2} > \max\{j_2, m_2\}$ (comme la suite $(m_n)_{n \geq 2}$ n'est pas bornée un tel entier existe bien). On a en particulier $m_n \leq \max\{j_2, m_2\} \leq m_{n_2} - 1$ pour tout $2 \leq n < n_2$. On va montrer que l'on peut modifier le scindage $D_{I_{n_2}} \oplus_{D_r} V \simeq D_{I_{n_2}} \oplus M$ au cran n_2 de façon à diminuer strictement la valeur de m_{n_2} . Pour cela, il suffit de montrer que $(\delta_{n_2} \text{res})(M_{m_{n_2}}) \subseteq D_{I_{n_2}} \subseteq D_{I_{n_2-1}}$ (rappelons qu'*a priori* on a seulement $(\delta_{n_2} \text{res})(M_{m_{n_2}}) \subseteq D_{I_{n_2-1}}$). En effet, on peut alors modifier une base sur \mathcal{R}_E^+ de $M_{m_{n_2}}$ dans $D_{I_{n_2}} \oplus M$ par des éléments de $D_{I_{n_2}}$ de sorte que le nouveau scindage au cran n_2 vérifie $(\delta_{n_2} \text{res})|_{M_{m_{n_2}}} = 0$.

Pour cela, considérons le diagramme commutatif :

$$(152) \quad \begin{array}{ccc} D_{I_{n_2}} \oplus M_{m_{n_2}} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_{n_2-1}} \oplus \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} M_{m_{n_2}+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{I_2} \oplus M_{m_{n_2}} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_1} \oplus \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} M_{m_{n_2}+1} \end{array}$$

où la flèche verticale à gauche (resp. à droite) est la restriction du cran n_2 au cran 2 (resp. du cran n_2-1 au cran 1). Comme $m_{n_2} > j_2$, par définition de j_2 l'application $\tilde{\psi}$ du bas respecte les sommes directes à gauche et à droite. Comme $m_{n_2} > m_n$, et donc *a fortiori* $m_{n_2}+1 > m_n$, pour $2 \leq n \leq n_2-1$, la flèche verticale de droite respecte aussi les sommes directes en haut et en bas. On en déduit un diagramme commutatif de \mathcal{R}_E^+ -modules (où δ_{res} est la composée $M_{m_{n_2}} \subseteq D_{I_{n_2}} \oplus M_{m_{n_2}} \rightarrow D_{I_2} \oplus M_{m_{n_2}} \twoheadrightarrow D_{I_2}$) :

$$\begin{array}{ccc} M_{m_{n_2}} & \xrightarrow{\delta_{n_2} \tilde{\psi}} & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_{n_2-1}} \\ \downarrow \delta_{\text{res}} & & \downarrow \\ D_{I_2} & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_1} \end{array}$$

qui montre que $(\delta_{\text{res}})(M_{m_{n_2}}) \subseteq \tilde{\psi}^{-1}(\mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_{n_2-1}}) \subseteq D_{I_2}$ (en voyant $\mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_{n_2-1}}$ comme sous- \mathcal{R}_E^+ -module de $\mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_1}$). Le diagramme commutatif de \mathcal{R}_E^+ -modules (cartésien puisque les applications verticales sont injectives) :

$$\begin{array}{ccc} D_{pI_{n_2-1}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_{n_2-1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{pI_1} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_1} \end{array}$$

où $pI_n \stackrel{\text{déf}}{=} [pr, p^{n+1}r]$ implique $\tilde{\psi}^{-1}(\mathcal{R}_E^+ \otimes_{\varphi, \mathcal{R}_E^+} D_{I_{n_2-1}}) = D_{I_2} \cap D_{pI_{n_2-1}}$ où l'intersection est dans D_{pI_1} . Comme $\{p^{-1/r} \leq |\cdot| \leq p^{-1/p^{2r}}\} \cup \{p^{-1/pr} \leq |\cdot| \leq p^{-1/p^{n_2r}}\}$ est un recouvrement affinoïde de $\{p^{-1/r} \leq |\cdot| \leq p^{-1/p^{n_2r}}\}$, on a $D_{I_2} \cap D_{pI_{n_2-1}} = D_{I_{n_2}} \subseteq D_{pI_1}$. On en déduit $(\delta_{\text{res}})(M_{m_{n_2}}) \subseteq D_{I_{n_2}} \subseteq D_{I_2}$. Comme $m_{n_2} > m_n$ pour $2 \leq n \leq n_2-1$, cela implique bien $(\delta_{n_2} \text{res})(M_{m_{n_2}}) \subseteq D_{I_{n_2}}$ dans $D_{I_{n_2-1}}$.

On peut alors recommencer tout le raisonnement précédent avec ce nouveau scindage $D_{I_{n_2}} \oplus_{D_r} V \simeq D_{I_{n_2}} \oplus M$ au cran n_2 . On obtient une nouvelle suite m'_n , qui est égale à m_n pour $n < n_2$ et $n > n_2+1$, et une nouvelle valeur n'_2 , et on voit que l'on est dans l'une des deux situations suivantes : soit $n'_2 = n_2$ et $\max\{j_2, m_2\} < m'_{n_2} < m_{n_2}$, soit $n'_2 > n_2$ et $m'_{n_2} \leq \max\{j_2, m_2\}$. Puis on recommence encore etc. Par récurrence, on voit que l'on obtient au bout du compte un scindage $D_{I_n} \oplus_{D_r} V \simeq D_{I_n} \oplus M$ pour tout $n \geq 1$ tel que $m_n \leq \max\{j_2, m_2\}$ pour tout $n \geq 2$.

Autrement dit on est ramené à la situation où la suite m_n est bornée quand $n \rightarrow +\infty$, qui a été traitée au début du cas D_r libre.

Remarque 4.4.5. — (i) L'argument ci-dessus du scindage de (147) pour les \mathcal{R}_E^+ -modules sous-jacents reste valable si l'on a un entier $C \geq 0$ tel que $\psi : M_m \rightarrow M_m \oplus M_{m+1} \oplus \cdots \oplus M_{m+C}$ pour tout $m \geq 1$ (au lieu de $\psi : M_m \rightarrow M_{m+1}$) en remplaçant $M_{m_{n_2}+1}$ par $M_{m_{n_2}} \oplus \cdots \oplus M_{m_{n_2}+C}$ dans (152).

(ii) On peut montrer que la Proposition 4.4.3 et le Lemme 4.4.4 restent vrais sans supposer que D_r est libre, mais cela nécessite d'autres arguments (en particulier pour la preuve du Lemme 4.4.4).

4.5. Un deuxième scindage technique. — On démontre un autre résultat technique de scindage dans le cas $G = \mathrm{GL}_3$ (Proposition 4.5.6 ci-dessous).

On conserve les notations des §§ 4.1 et 4.3, en particulier $G = \mathrm{GL}_3$ et $B = \text{Borel supérieur}$. Soit $\pi = (\mathrm{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_P)^{\mathrm{an}}$ avec $P \in \{P_\alpha, P_\beta\}$ et $\pi_P = L(-\mu)_P \otimes_E \pi_P^\infty$ comme dans la Proposition 4.3.1 et sa preuve. On rappelle que, si $P = P_\alpha$, on a la suite exacte (126) dans $\mathrm{Rep}_E^{\mathrm{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$:

$$0 \longrightarrow C_c^{\mathrm{an}}(N^\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\alpha}) \longrightarrow \pi \longrightarrow \pi_C \longrightarrow 0,$$

et si $P = P_\beta$, on a la suite exacte (130) (avec (133)) :

$$0 \longrightarrow \left(\mathrm{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha} \right)^{\mathrm{an}} \longrightarrow \pi \longrightarrow \pi_C \longrightarrow 0$$

où $\pi_{N^\alpha} = (\mathrm{c}\text{-Ind}_{N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{N^\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_{P_\beta})^{\mathrm{an}}$. Si $P = P_\alpha$, on suppose de plus comme dans la Proposition 4.3.3 que l'action de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ sur $\pi_{P_\alpha}^\infty$ se factorise par $\det : L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{Q}_p^\times \times \mathbb{Q}_p^\times$.

Lemme 4.5.1. — Soit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

(i) Si $P = P_\alpha$, on a $M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \xrightarrow{\sim} M_\alpha(C_c^{\mathrm{an}}(N^\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\alpha}) \otimes_E E_m)$.

(ii) Si $P = P_\beta$ et $\eta|_{N_m^\alpha} \neq 1$, on a $M_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \xrightarrow{\sim} M_\alpha((\mathrm{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha})^{\mathrm{an}} \otimes_E E_m)$.

Démonstration. — (i) Cela découle de la Proposition 2.1.6, de (141) pour $i = 0$ et de $M_\alpha(-) = M_\alpha(H^0(\mathfrak{n}^\alpha, -))$ (cf. (15)). (ii) C'est la même preuve que (142) mais avec $H^0(\mathfrak{n}^\alpha, -)$ au lieu de $H^1(\mathfrak{n}^\alpha, -)$. Noter que (142) n'utilise pas l'hypothèse (ii) de la Proposition 4.3.3. \square

On suppose maintenant $P = P_\beta$ jusqu'à la fin de ce paragraphe. Rappelons que l'on a un diagramme commutatif dans $\mathrm{Rep}_E^{\mathrm{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ où toutes les injections sont

strictes :

$$\begin{array}{ccc} C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N^\alpha}) & \hookrightarrow & (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha})^{\text{an}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N^\alpha}^0) & \hookrightarrow & (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha}^0)^{\text{an}} \end{array}$$

et où $\pi_{N^\alpha}^0 = H^0(\mathfrak{n}_\beta, L(-\mu)_{P_\beta}) \otimes_E \pi_{N^\alpha}^\infty = E(-\mu) \otimes_E (\text{c-Ind}_{N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{N^\alpha(\mathbb{Q}_p)} \pi_{P_\beta}^\infty)^\infty$ (cf. (133) et ce qui suit pour l'action de $B(\mathbb{Q}_p) \subseteq P_\alpha(\mathbb{Q}_p)$). Rappelons de plus que $\pi_{N^\alpha}^0$ est muni d'une action lisse de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ par translation à droite sur les fonctions sur $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ et action triviale sur $E(-\mu)$. Par (135) pour $i = 0$ et (144), avec (15) et la Proposition 2.1.6, on en déduit un diagramme commutatif de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$(153) \quad \begin{array}{ccc} M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N^\alpha}) \otimes_E E_m) & \longleftarrow & M_\alpha((\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha})^{\text{an}} \otimes_E E_m) \\ \parallel & & \parallel \\ M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N^\alpha}^0) \otimes_E E_m) & \longleftarrow & M_\alpha((\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha}^0)^{\text{an}} \otimes_E E_m). \end{array}$$

Comme l'action du groupe compact N_m^α sur $H^0(\mathfrak{n}^\alpha, (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha})^{\text{an}}) \simeq (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha}^0)^{\text{an}}$ est lisse, le noyau de la surjection du bas en (153) est exactement $M_\alpha(\pi_C^0 \otimes_E E_m)$ où :

$$\pi_C^0 \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha}^0)^{\text{an}} / C_c^{\text{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N^\alpha}^0).$$

On utilisera l'isomorphisme :

$$(154) \quad (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha}^0)^{\text{an}} \xrightarrow{\sim} (\text{Ind}_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)} \pi_{N^\alpha}^{0, s_\alpha})^{\text{an}}, \quad F \mapsto (l_\alpha \mapsto F(s_\alpha l_\alpha))$$

où $l_\alpha \in L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B(\mathbb{Q}_p)$ agit sur $\pi_{N^\alpha}^{0, s_\alpha}$ par l'action (131) de $s_\alpha l_\alpha s_\alpha \in L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B^-(\mathbb{Q}_p)$ sur $\pi_{N^\alpha}^0$. L'isomorphisme (154) commute aux actions de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ (par translation à droite des deux côtés) et aux actions de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ en définissant cette dernière sur le membre de droite comme suit (cf. (134)) :

$$(155) \quad (n^\alpha F)(l_\alpha) = (s_\alpha (l_\alpha n^\alpha l_\alpha^{-1}) s_\alpha)(F(l_\alpha)), \quad n^\alpha \in N^\alpha(\mathbb{Q}_p), \quad l_\alpha \in L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$$

et en remarquant que $s_\alpha N^\alpha(\mathbb{Q}_p) s_\alpha = N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$.

Lemme 4.5.2. — *On a un isomorphisme d'espaces de Fréchet $M_\alpha(\pi_C^0 \otimes_E E_m) \simeq M_\alpha(\pi_{N^\alpha}^{0, s_\alpha} \otimes_E E_m) \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ où $N_\alpha^- \stackrel{\text{déf}}{=} L_{P_\alpha} \cap N^-$.*

Démonstration. — Par (154), le (i) du Lemme 3.5.1 puis le Lemme 3.5.2 appliqués avec $G = L_{P_\alpha}$ et $P = L_{P_\alpha} \cap B$, on a des isomorphismes d'espaces de Fréchet :

$$(156) \quad (\pi_C^0)^\vee \simeq (\pi_{N^\alpha}^{0, s_\alpha})^\vee \widehat{\otimes}_{D(L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B(\mathbb{Q}_p), E), \iota} D(L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p), E)_{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B(\mathbb{Q}_p)} \\ \simeq (\pi_{N^\alpha}^{0, s_\alpha})^\vee \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}.$$

Explicitons d'abord l'action de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur $(\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$. Le plongement fermé de variétés localement \mathbb{Q}_p -analytiques $N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \times N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \times L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \simeq P_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ induit par [45, Prop. 1.1.2] et [61, Prop. A.3] une immersion fermée d'espaces localement convexes :

$$D(N^\alpha(\mathbb{Q}_p), E) \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E) \hookrightarrow D(N^\alpha(\mathbb{Q}_p), E) \widehat{\otimes}_E D(L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p), E) \simeq D(P_\alpha(\mathbb{Q}_p), E)$$

et l'égalité $n^\alpha l_\alpha (n^\alpha)^{-1} = (n^\alpha (l_\alpha (n^\alpha)^{-1} l_\alpha^{-1})) l_\alpha \in N^\alpha(\mathbb{Q}_p) l_\alpha$ pour $(n^\alpha, l_\alpha) \in N^\alpha(\mathbb{Q}_p) \times L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ montre que la conjugaison par δ_{n^α} dans $D(P_\alpha(\mathbb{Q}_p), E)$ préserve le sous-espace $D(N^\alpha(\mathbb{Q}_p), E) \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)$, et donc aussi (via le Lemme 3.2.12) le sous-espace $D(N^\alpha(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$. En voyant $(\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee$ comme $D(N^\alpha(\mathbb{Q}_p), E)$ -module séparément continu via l'action de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur $\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha}$ comme dans le terme de droite de (155), on vérifie facilement que l'action (à gauche) de $n^\alpha \in N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur $(\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ par multiplication à droite par $\delta_{n^\alpha}^{-1}$ s'obtient (de manière similaire à (83)) en envoyant $v \otimes \mu$ vers (via le Lemme 3.2.1) :

$$(157) \quad n^\alpha(v) \otimes \delta_{n^\alpha} \mu \delta_{n^\alpha}^{-1} \\ \in (\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee \widehat{\otimes}_{D(N^\alpha(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}} (D(N^\alpha(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}) \\ \simeq (\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$$

(pour $n^\alpha(v) = v \delta_{n^\alpha}^{-1}$, voir les conventions juste avant (83)). Soit $\mathfrak{r} \in \mathfrak{n}_\alpha^- (= \text{la } \mathbb{Q}_p\text{-algèbre de Lie de } N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p))$ et $n^\alpha \in N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$, on vérifie que $n^\alpha \mathfrak{r} (n^\alpha)^{-1} - \mathfrak{r} \in \mathfrak{n}^\alpha$ dans $\mathfrak{p}_\alpha (= \text{la } \mathbb{Q}_p\text{-algèbre de Lie de } P_\alpha(\mathbb{Q}_p))$. En combinant cela avec $[\mathfrak{n}^\alpha, \mathfrak{n}_\alpha^-] \subseteq \mathfrak{n}^\alpha$ dans \mathfrak{p}_α et le fait que \mathfrak{n}^α agit par 0 sur $(\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee$, on en déduit (via l'isomorphisme en (157)) que si $\mu \in U(\mathfrak{n}_\alpha^-, E) \subseteq D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$, on a $w \otimes \delta_{n^\alpha} \mu \delta_{n^\alpha}^{-1} = w \otimes \mu$ dans $(\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ pour tout $w \in (\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee$. Comme $(\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee \otimes_E U(\mathfrak{n}_\alpha^-, E)$ est dense dans $(\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ par [45, Prop. 1.2.8] et le Lemme 3.2.4, on en déduit finalement que l'action (157) de $N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$ sur $(\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ est juste donnée par l'action sur le "facteur" $(\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee$.

Si $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V''$ est une suite exacte stricte de E -espaces vectoriels de Fréchet (i.e. $V \rightarrow V''$ est d'image fermée), alors par [64, Lem. 4.13] pour tout E -espace vectoriel de Fréchet W on a encore une suite exacte stricte $0 \rightarrow V' \widehat{\otimes}_E W \rightarrow V \widehat{\otimes}_E W \rightarrow V'' \widehat{\otimes}_E W$ d'espaces de Fréchet. En utilisant que $\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha}$ est muni de la topologie localement convexe la plus fine puis en dualisant, on vérifie aisément que l'on a une suite exacte *stricte* d'espaces de Fréchet pour tout $x \in N_m^\alpha$:

$$0 \longrightarrow (\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha} \otimes_E E_m)^\vee(\eta)^{x=1} \longrightarrow (\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha} \otimes_E E_m)^\vee(\eta) \xrightarrow{x-\text{Id}} (\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha} \otimes_E E_m)^\vee(\eta)$$

qui reste donc exacte après $\widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$. Si y est un autre élément de N_m^α , on a une suite exacte stricte analogue en appliquant $y - \text{Id}$ à $(\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha} \otimes_E E_m)^\vee(\eta)^{x=1}$, qui reste encore exacte après $\widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$. Par une récurrence sur des générateurs

du groupe commutatif N_m^α , on déduit alors de tout ce qui précède :

$$\begin{aligned} & (\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha} \otimes_E E_m)^\vee (\eta)^{N_m^\alpha} \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \\ & \quad \xrightarrow{\sim} ((\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha} \otimes_E E_m)^\vee \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}) (\eta)^{N_m^\alpha}, \end{aligned}$$

d'où le résultat avec (156). \square

Soit $\mathfrak{h}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (vu dans \mathfrak{gl}_3) une base du E -espace vectoriel $\mathfrak{n}_\alpha^- \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, de sorte que $U(\mathfrak{n}_\alpha^-, E) = \bigoplus_{n \geq 0} E \mathfrak{h}_\alpha^n = E[\mathfrak{h}_\alpha]$. Par [45, Prop. 1.2.8] on a :

$$D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \simeq \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n \mathfrak{h}_\alpha^n, a_n \in E, \forall r \in \mathbb{Q}_{>0} |a_n| r^{-n} \rightarrow 0 \text{ qd } n \rightarrow +\infty \right\}.$$

De manière équivalente, $D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ est le complété de $U(\mathfrak{n}_\alpha^-, E)$ pour les semi-normes $q_r(\sum_{n=0}^N a_n \mathfrak{h}_\alpha^n) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_n |a_n| r^{-n}$ où $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, ou de manière équivalente pour les q_{r_m} avec $(r_m)_m$ une suite dénombrable (quelconque) tendant vers 0 dans $\mathbb{Q}_{>0}$. Si W est un E -espace vectoriel de Fréchet, on note :

$$W\{\{\mathfrak{h}_\alpha\}\} \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{n \geq 0} w_n \otimes \mathfrak{h}_\alpha^n, w_n \in W, \forall q, \forall r \in \mathbb{Q}_{>0} q(w_n) r^{-n} \rightarrow 0 \text{ qd } n \rightarrow +\infty \right\}$$

où q parcourt les semi-normes continues sur W . C'est aussi un E -espace vectoriel de Fréchet pour les semi-normes $\sup_{n \geq 0} q(w_n) r^{-n}$.

Lemme 4.5.3. — *On a un isomorphisme de E -espaces vectoriels de Fréchet :*

$$W \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}} \simeq W\{\{\mathfrak{h}_\alpha\}\}.$$

Démonstration. — Munissons $U(\mathfrak{n}_\alpha^-, E)$ de la topologie induite par $D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$, alors il résulte de [57, Cor. 17.5(ii)], de [57, Lem. 7.3] avec le Lemme 3.2.4, et de la propriété universelle du séparé-complété ([57, Prop. 7.5]) que $W \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ s'identifie au complété de $W \otimes_{E,\pi} U(\mathfrak{n}_\alpha^-, E)$, c'est-à-dire par [57, Lem. 17.2] au complété de $W \otimes_E U(\mathfrak{n}_\alpha^-, E)$ pour les semi-normes produit tensoriel $q \otimes q_r$ pour $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ et q semi-norme continue sur W . Mais en appliquant [57, Lem. 17.3] avec $V \stackrel{\text{déf}}{=} U(\mathfrak{n}_\alpha^-, E)$, $v_i \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{h}_\alpha^i$ (et $W \stackrel{\text{déf}}{=} W$!), et par l'argument de la preuve de [57, Prop. 17.4(i)], on a pour tout $N \geq 0$ et tout $w_n \in W$, $0 \leq n \leq N$:

$$q \otimes q_r \left(\sum_{n=0}^N w_n \otimes \mathfrak{h}_\alpha^n \right) = \sup_n q(w_n) q_r(\mathfrak{h}_\alpha^n) = \sup_n q(v_n) r^{-n}$$

d'où on déduit que le complété de $W \otimes_{E,\pi} U(\mathfrak{n}_\alpha^-, E)$ s'identifie à $W\{\{\mathfrak{h}_\alpha\}\}$. \square

Pour alléger les notations, on pose dans la suite :

$$(158) \quad M \stackrel{\text{déf}}{=} M_\alpha(\pi_C^0 \otimes_E E_m) \quad \text{et} \quad M^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} M_\alpha(\pi_{N^\alpha}^{0,s_\alpha} \otimes_E E_m),$$

de sorte que, par le Lemme 4.5.2 et le Lemme 4.5.3, on a $M \simeq M^\alpha\{\{\mathfrak{h}_\alpha\}\}$. On rappelle que $t = \log(1 + X) \in \mathcal{R}_E^+$ (§ 2.2).

Lemme 4.5.4. — Pour $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, le E -espace vectoriel $M^\alpha \otimes_E (E \oplus E\mathfrak{h}_\alpha \oplus \cdots \oplus E\mathfrak{h}_\alpha^N)$ est un sous- \mathcal{R}_E^+ -module de $M^\alpha \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ stable par ψ et Γ tel que $t^{N+1}(M^\alpha \otimes_E (E \oplus E\mathfrak{h}_\alpha \oplus \cdots \oplus E\mathfrak{h}_\alpha^N)) = 0$.

Démonstration. — L'action de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p) \cap B(\mathbb{Q}_p)$ sur $(\pi_{N_\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ est analogue à (157) en utilisant le second isomorphisme en (156) (et rappelons que l'action de \mathfrak{n}_α sur $(\pi_{N_\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee$ est nulle et celle de l'algèbre de Lie de $T(\mathbb{Q}_p)$ y est la multiplication par un caractère algébrique). Par ailleurs un calcul donne dans la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie \mathfrak{l}_{P_α} de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ en notant $n_\alpha(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ et $\mathfrak{h}_\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{l}_{P_\alpha}$ (où l'on n'a écrit que ce qui concerne le facteur GL_2) :

$$(159) \quad n_\alpha(x)\mathfrak{h}_\alpha n_\alpha(-x) - (\mathfrak{h}_\alpha + x\mathfrak{h}_\alpha) \in \mathfrak{n}_\alpha.$$

On en déduit facilement la première assertion. Pour la deuxième, il suffit de montrer $t(w \otimes_E \mathfrak{h}_\alpha^N) \in M^\alpha \otimes_E (E \oplus E\mathfrak{h}_\alpha \oplus \cdots \oplus E\mathfrak{h}_\alpha^{N-1})$ pour tout $w \in M^\alpha$ puisque $tM^\alpha = 0$ (car $t(\pi_{N_\alpha}^{0,s_\alpha})^\vee = 0$). Comme la suite $p^{-n}\varphi^n(X) = p^{-n}((1+X)^{p^n} - 1)$ converge dans \mathcal{R}_E^+ vers t quand n tend vers $+\infty$, il suffit de montrer que la limite de $p^{-n}\varphi^n(X)(w \otimes_E \mathfrak{h}_\alpha^N)$ quand $n \rightarrow +\infty$ dans le \mathcal{R}_E^+ -module continu $M^\alpha \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ tombe dans le sous-espace $M^\alpha \otimes_E (E \oplus E\mathfrak{h}_\alpha \oplus \cdots \oplus E\mathfrak{h}_\alpha^{N-1})$. En utilisant les crochets de Lie habituels dans \mathfrak{l}_{P_α} , on déduit facilement de (159) :

$$\begin{aligned} p^{-n}(1+X)^{p^n}(w \otimes_E \mathfrak{h}_\alpha^N) &= p^{-n}((1+X)^{p^n}w \otimes_E n_\alpha(p^n)\mathfrak{h}_\alpha^N n_\alpha(-p^n)) \\ &\in (p^{-n}(1+X)^{p^n}w) \otimes_E \mathfrak{h}_\alpha^N + M^\alpha \otimes_E (E \oplus E\mathfrak{h}_\alpha \oplus \cdots \oplus E\mathfrak{h}_\alpha^{N-1}) \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque :

$$(160) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} ((p^{-n}(1+X)^{p^n}w) \otimes_E \mathfrak{h}_\alpha^N - p^{-n}w \otimes_E \mathfrak{h}_\alpha^N) = (tw) \otimes_E \mathfrak{h}_\alpha^N = 0$$

et $M^\alpha \otimes_E (E \oplus E\mathfrak{h}_\alpha \oplus \cdots \oplus E\mathfrak{h}_\alpha^{N-1})$ est fermé dans $M^\alpha \widehat{\otimes}_E D(N_\alpha^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ (par exemple par le Lemme 4.5.3). \square

Remarque 4.5.5. — (i) Si M'^α est un sous- (ψ, Γ) -module de Fréchet fermé de M^α (avec topologie induite), la preuve du Lemme 4.5.4 montre que ce dernier reste valable en remplaçant M^α par M'^α . De même, si M''^α est un (ψ, Γ) -module de Fréchet qui est un quotient de M^α (avec topologie induite), le Lemme 4.5.4 reste valable en remplaçant M^α par M''^α .

(ii) Si le quotient M''^α de M^α en (i) est de plus annulé par $\varphi^n(X)$ pour un $n \gg 0$ (ce qui est plus fort que d'être annulé par t), alors on a en fait :

$$\varphi^n(X)^{N+1}(M''^\alpha \otimes_E (E \oplus E\mathfrak{h}_\alpha \oplus \cdots \oplus E\mathfrak{h}_\alpha^N)) = 0.$$

La preuve est la même que ci-dessus, en plus facile puisqu'il n'est plus nécessaire de passer à la limite dans (160).

Le but de la suite du paragraphe est de montrer la proposition suivante.

Proposition 4.5.6. — Soit $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$ et D_r un (ψ, Γ) -module sans torsion sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$. Alors toute suite exacte (avec M comme en (158)) :

$$(161) \quad 0 \longrightarrow D_r \longrightarrow V \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$, où la topologie de V peut être définie par des semi-normes q telles que $\forall S \in \mathcal{R}_{E_m}^+$ il existe $C_{q,S} \in \mathbb{R}_{>0}$ vérifiant $q(Sv) \leq C_{q,S}q(v)$ pour tout $v \in V$, devient scindée après “push-out” le long de $D_r \rightarrow D_{r'}$ pour $r' \gg r$.

On commence par un cas particulier utile de la Proposition 4.5.6.

Lemme 4.5.7. — Avec les notations et hypothèses de la Proposition 4.5.6, supposons de plus que pour tout $N \geq 0$ le “pull-back” V_N de (161) le long de $M_N \stackrel{\text{déf}}{=} M^\alpha \otimes_E (E \oplus E\mathfrak{h}_\alpha \oplus \cdots \oplus E\mathfrak{h}_\alpha^N) \hookrightarrow M$ est une suite exacte scindée de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. Alors la suite exacte (161) est aussi scindée.

Démonstration. — **Étape 1**

Pour $N \geq 0$, on a donc par hypothèse un isomorphisme $V_N \simeq D_r \oplus M_N$ de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. De plus comme $t^{N+1}M_N = 0$ par le Lemme 4.5.4 alors que D_r est sans torsion par hypothèse, un tel scindage est nécessairement unique (tout morphisme $M_N \rightarrow D_r$ de \mathcal{R}_E^+ -module étant nul). Quand N grandit, ces scindages sont donc automatiquement compatibles et définissent une application \mathcal{R}_E^+ -linéaire $s : M^\alpha[\mathfrak{h}_\alpha] \rightarrow V$ qui commute à ψ et Γ , où $M^\alpha[\mathfrak{h}_\alpha] \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{N \geq 0} M_N \subseteq M$. En fait, une formule explicite pour s est :

$$(162) \quad s(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \widehat{x} - \frac{1}{t^{N+1}}(t^{N+1}\widehat{x}) \in V_N \subseteq V$$

où $x \in M_N$, \widehat{x} est un relevé quelconque de x dans V (ou de manière équivalente V_N) et $\frac{1}{t^{N+1}}(t^{N+1}\widehat{x}) \in D_r$. Nous allons montrer que s s’étend par continuité (de manière nécessairement unique) à $M = M^\alpha\{\{\mathfrak{h}_\alpha\}\}$ et que l’application $s : M \rightarrow V$ obtenue est continue (automatiquement \mathcal{R}_E^+ -linéaire et commutant à ψ et Γ).

Soit $s > r$ dans $\mathbb{Q}_{>0}$ et rappelons que $D_{[r,s]} = D_r \otimes_{\mathcal{R}_{E_m}^r} \mathcal{R}_{E_m}^{[r,s]}$ (cf. (27)). On note p_s une norme sur $\mathcal{R}_{E_m}^{[r,s]}$ et on note encore p_s la norme “somme directe” induite sur le Banach $D_{[r,s]}$. Par le (ii) du Lemme 3.2.2 et la Remarque 3.2.3 on a des suites exactes strictes $0 \rightarrow D_{[r,s]} \rightarrow D_{[r,s]} \oplus_{D_r} V \rightarrow M \rightarrow 0$ de modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ , et comme pour (151) on a un isomorphisme topologique $V \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{s \rightarrow +\infty} D_{[r,s]} \oplus_{D_r} V$, de sorte qu’il suffit de montrer que la composée $M^\alpha[\mathfrak{h}_\alpha] \rightarrow V \rightarrow D_{[r,s]} \oplus_{D_r} V$ se prolonge par continuité à $M^\alpha\{\{\mathfrak{h}_\alpha\}\}$ et que l’application obtenue est continue. Changeant de notations, on note V l’espace de Fréchet $D_{[r,s]} \oplus_{D_r} V$, $s : M^\alpha[\mathfrak{h}_\alpha] \rightarrow V$ la composée ci-dessus (ne pas confondre $s \in \mathbb{Q}_{>0}$ et la section s !) et V_N le “pull-back” de V le long de $M_N \hookrightarrow M$.

Par hypothèse la topologie de V peut être définie par des semi-normes q_k (pour k dans un ensemble dénombrable) telles que $q_k(tv) \leq C_{q_k,t}q_k(v)$ pour tout k et tout $v \in V$ (où $C_{q_k,t} \in \mathbb{R}_{>0}$). Nous allons montrer que si $\sum_{n \geq 0} w_n \otimes \eta_\alpha^n \in M$ alors $q_k(s(w_n \otimes \eta_\alpha^n)) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Étape 2

L'idéal $t\mathcal{R}_{E_m}^{[r,s]}$ est fermé dans $\mathcal{R}_{E_m}^{[r,s]}$ et on le munit de la topologie induite. La multiplication par $1/t : t\mathcal{R}_{E_m}^{[r,s]} \rightarrow \mathcal{R}_{E_m}^{[r,s]}$ étant continue (utiliser par exemple [60, Prop. 2.1(iii)]), si p_s est une norme sur $\mathcal{R}_{E_m}^{[r,s]}$ définissant sa topologie il existe $c_s \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $p_s(\frac{1}{t}x) \leq c_s p_s(x)$ pour tout $x \in t\mathcal{R}_{E_m}^{[r,s]}$. Comme la topologie de $D_{[r,s]}$ est aussi définie par les restrictions $(q_k|_{D_{[r,s]}})_k$ (car l'injection $D_{[r,s]} \hookrightarrow V$ est stricte), par [57, Cor. 6.2] (encore) appliqué avec $V = D_{[r,s]}$ et $q = p_s$, il existe $D_s \in \mathbb{R}_{>0}$, $t \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ et k_1, \dots, k_t tels que pour tout $d \in D_{[r,s]}$ on a :

$$(163) \quad p_s(d) \leq D_s \max(q_{k_1}(d), \dots, q_{k_t}(d)).$$

Fixons q_k une semi-norme comme à la fin de l'Étape 1, par [57, Cor. 6.2] appliqué avec $V = D_{[r,s]}$ et $q = q_k|_{D_{[r,s]}}$, il existe enfin $C_k \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $q_k(d) \leq C_k p_s(d)$ pour tout $d \in D_{[r,s]}$.

Considérons la semi-norme continue $q \stackrel{\text{déf}}{=} \max(q_k, q_{k_i}, i \in \{1, \dots, t\})$ sur V et soit \bar{q} la semi-norme sur M quotient de q , comme $V \rightarrow M$ est une surjection topologique, \bar{q} est une semi-norme continue sur M (cf. [57, § 5.B]). Par [57, Cor. 6.2] appliqué avec $V = M$ et $q = \bar{q}$, il existe $B_k \in \mathbb{R}_{>0}$, $u \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, χ_1, \dots, χ_u des semi-normes continues sur M^α et $r_1, \dots, r_u \in \mathbb{Q}_{>0}$ tels que pour tout $x = \sum_{n \geq 0} w_n \otimes \eta_\alpha^n \in M = M^\alpha \{\{\eta_\alpha\}\}$:

$$\bar{q}(x) \leq B_k \max\left(\sup_n \chi_1(w_n) r_1^{-n}, \dots, \sup_n \chi_u(w_n) r_u^{-n}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si $\bar{q}(w_n \otimes \eta_\alpha^n) \neq 0$, alors par définition de \bar{q} il existe $\widehat{w_n \otimes \eta_\alpha^n} \in V$ relevant $w_n \otimes \eta_\alpha^n \in M$ tel que :

$$(164) \quad q(\widehat{w_n \otimes \eta_\alpha^n}) \leq B_k \max(\chi_1(w_n) r_1^{-n}, \dots, \chi_u(w_n) r_u^{-n}) \leq B_k \max(\chi_1(w_n), \dots, \chi_u(w_n)) r_k^{-n}$$

où $r_k \stackrel{\text{déf}}{=} \min(r_1, \dots, r_u)$. Si $\chi_i(w_n) = 0$ pour $i \in \{1, \dots, u\}$, ce qui implique $\bar{q}(w_n \otimes \eta_\alpha^n) = 0$, en écrivant $V_n \simeq D_{[r,s]} \oplus M_n$, il existe une suite $(d_m)_m$ dans $D_{[r,s]}$ telle que $q(d_m + w_n \otimes \eta_\alpha^n) \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow +\infty$, donc *a fortiori* $q_{k_i}(d_m + w_n \otimes \eta_\alpha^n) \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow +\infty$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$. Avec (163) on en déduit facilement que $(d_m)_m$ est une suite de Cauchy dans le Banach $D_{[r,s]}$, donc converge vers un élément $d \in D_{[r,s]}$.

Posant $\widehat{w_n \otimes \eta_\alpha^n} \stackrel{\text{déf}}{=} d + w_n \otimes \eta_\alpha^n \in D_{[r,s]} \oplus M_n$, par continuité de q on a $q(\widehat{w_n \otimes \eta_\alpha^n}) = 0$. On en déduit finalement dans tous les cas et pour tout $n \geq 0$:

$$(165) \quad q(\widehat{w_n \otimes \eta_\alpha^n}) \leq q(\widehat{w_n \otimes \eta_\alpha^n}) \leq B_k \max(\chi_1(w_n), \dots, \chi_u(w_n)) r_k^{-n}.$$

Étape 3

Posons $C \stackrel{\text{déf}}{=} \max(C_{q_{k_i,t}}, i \in \{1, \dots, t\})$, on a pour tout $n \geq 0$ en utilisant tout ce qui

précède :

$$\begin{aligned}
q_k\left(\frac{1}{t^{n+1}}(t^{n+1}\widehat{w_n \otimes \eta_\alpha^n})\right) &\leq C_k p_s\left(\frac{1}{t^{n+1}}(t^{n+1}\widehat{w_n \otimes \eta_\alpha^n})\right) \\
&\leq C_k c_s^{n+1} p_s(t^{n+1}\widehat{w_n \otimes \eta_\alpha^n}) \\
&\leq C_k c_s^{n+1} D_s \max_i (q_{k_i}(t^{n+1}\widehat{w_n \otimes \eta_\alpha^n})) \\
&\leq C_k c_s^{n+1} D_s C^{n+1} \max_i (q_{k_i}(\widehat{w_n \otimes \eta_\alpha^n})) \\
(166) \qquad \qquad \qquad &\leq C_k c_s D_s C B_k \max_j (\chi_j(w_n)) ((c_s C)^{-1} r_k)^{-n}.
\end{aligned}$$

Il suit donc de (165), (166) et (162) que, pour toute semi-norme q_k sur V comme précédemment, il existe $H_k, h_k \in \mathbb{R}_{>0}$ et des semi-normes continues χ_1, \dots, χ_u sur M^α tels que pour tout $n \geq 0$ et tout $w_n \in M^\alpha$ on a :

$$(167) \qquad q_k(s(w_n \otimes \eta_\alpha^n)) \leq H_k \max_j (\chi_j(w_n)) h_k^{-n}.$$

On en déduit en particulier $q_k(s(w_n \otimes \eta_\alpha^n)) \rightarrow 0$ pour tout q_k , donc la suite $(s(\sum_{n=0}^N w_n \otimes \eta_\alpha^n))_N$ est une suite de Cauchy dans V (cf. [57, § 7]). Comme V est complet, elle converge vers un élément que l'on note $s(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \otimes \eta_\alpha^n) \in V$.

Étape 4

On montre finalement que l'application $s : M \rightarrow V$ est continue. Pour $\sum_{n \geq 0} w_n \otimes \eta_\alpha^n \in M$, posons pour $N \geq 0$:

$$s_N\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \otimes \eta_\alpha^n\right) \stackrel{\text{déf}}{=} s\left(\sum_{n=0}^N w_n \otimes \eta_\alpha^n\right)$$

où le terme de droite est la section continue en (162). Les applications s_N sont en particulier toutes dans le E_m -espace vectoriel $\text{Hom}_{E_m}(M, V)$ des applications E_m -linéaires continues de M vers V , et convergent point par point vers $s : M \rightarrow V$. Comme M est un espace de Fréchet, il est tonnelé (voir la fin de [57, § 6]), et le Théorème de Banach-Steinhaus s'applique à $H = \{s_N, N \geq 0\} \subseteq \text{Hom}_{E_m}(M, V)$ ([57, Prop. 6.15]). En particulier l'application s est continue. (L'idée d'utiliser directement le Théorème de Banach-Steinhaus est due au rapporteur, notre preuve initiale était directe mais plus longue.) \square

Remarque 4.5.8. — Comme pour le (i) de la Remarque 4.5.5, l'énoncé du Lemme 4.5.7 est valable avec exactement la même preuve en remplaçant $M = M^\alpha \{\{\eta_\alpha\}\}$ dans la suite exacte $0 \rightarrow D_r \rightarrow V \rightarrow M \rightarrow 0$ par $M'^\alpha \{\{\eta_\alpha\}\}$ (resp. par $M''^\alpha \{\{\eta_\alpha\}\}$) où $M'^\alpha \hookrightarrow M^\alpha$ (resp. $M^\alpha \twoheadrightarrow M''^\alpha$) est comme dans le (i) de la Remarque 4.5.5.

On démontre maintenant la Proposition 4.5.6. On rappelle que $\gamma = \alpha + \beta$.

Étape 1

On a $\pi_{N_\alpha}^{0, s_\alpha} \simeq C^\infty(N_{\gamma, m}, \pi_{P_\beta}^\infty) \oplus \left(\bigoplus_{m' \geq m+1} C^\infty(N_{\gamma, m'} \setminus N_{\gamma, m'-1}, \pi_{P_\beta}^\infty) \right)$ où $N_{\gamma, m'} \stackrel{\text{déf}}{=} \dots$

$N_\gamma(\mathbb{Q}_p) \cap N_{m'}$ et où l'action de N_m^α préserve chaque facteur direct. Comme en (69), on en déduit un isomorphisme de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$(168) \quad M^\alpha \simeq \prod_{m' \geq m} M_{m'}^\alpha$$

où $M_{m'}^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} M_\alpha(E_m(-\mu) \otimes_E C^\infty(N_{\gamma, m'} \setminus N_{\gamma, m'-1}, \pi_{P_\beta}^\infty))$ si $m' \geq m+1$, $M_m^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} M_\alpha(E_m(-\mu) \otimes_E C^\infty(N_{\gamma, m}, \pi_{P_\beta}^\infty))$ (avec $M_\alpha(-)$ comme en (15)) et où l'on vérifie avec l'action (131) (conjuguée par s_α) que les $M_{m'}^\alpha$ pour $m' \geq m$ sont des (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. De plus, on vérifie facilement que (168) induit un isomorphisme de E -espaces vectoriels de Fréchet $M \simeq \prod_{m' \geq m} (M_{m'}^\alpha \{\{\eta_\alpha\}\})$ où chaque facteur direct à droite est stable par \mathcal{R}_E^+ , ψ et Γ dans M , i.e. est un (ψ, Γ) -module de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ . Noter que ψ et Γ respectent chaque sous-espace $M_{m'}^\alpha \otimes_E E\eta_\alpha^n$.

Pour $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $m' \in \mathbb{Z}_{\geq m}$ on note $M_{m', N} \stackrel{\text{déf}}{=} M_{m'}^\alpha \otimes_E (E \oplus E\eta_\alpha \oplus \cdots \oplus E\eta_\alpha^N)$. Il suit de (159) que $M_{m', N}$ est aussi un (ψ, Γ) -module de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$ et de (168) que l'on a $M_N \simeq \prod_{m' \geq m} M_{m', N}$. Comme D_r est libre, la multiplication par t^{N+1} sur V_N donne par le Lemme 4.5.4 une suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$(169) \quad 0 \longrightarrow V_N[t^{N+1}] \longrightarrow M_N \xrightarrow{f_{N+1}} D_r(\varepsilon^{-N-1})/(t^{N+1}).$$

Le Lemme 3.2.7 montre que $f_{N+1}|_{\prod_{m' \geq D} M_{m', N}} = 0$ pour $D \gg 0$. On définit par récurrence une suite croissante d'entiers $(m_N)_{N \geq 0}$ comme suit : m_0 est le plus petit entier $\geq m-1$ tel que $f_1|_{\prod_{m' \geq m_0+1} M_{m', 0}} = 0$ et m_N pour $N > 0$ est le plus petit entier $\geq m_{N-1}$ tel que $f_{N+1}|_{\prod_{m' \geq m_{N+1}} M_{m', N}} = 0$.

Étape 2

On suppose que la suite $(m_N)_{N \geq 0}$ est majorée par un entier D et on note $M_{>D}^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{m' \geq D+1} M_{m'}^\alpha \subseteq M^\alpha$, $M_{>D} \stackrel{\text{déf}}{=} M_{>D}^\alpha \{\{\eta_\alpha\}\} \subseteq M$ et $V_{>D}$ le "pull-back" de V le long de $M_{>D} \hookrightarrow M$. Pour $N \geq 0$ on définit $M_{>D, N} \stackrel{\text{déf}}{=} M_{>D}^\alpha \otimes_E (E \oplus E\eta_\alpha \oplus \cdots \oplus E\eta_\alpha^N)$ et $V_{>D, N}$ le "pull-back" de $V_{>D}$ le long de $M_{>D, N} \hookrightarrow M_{>D}$. Par définition de D et par (169), on a pour tout N une section $M_{>D, N} \simeq V_{>D, N}[t^{N+1}] \subseteq V_{>D, N}$ qui donne un isomorphisme $V_{>D, N} \simeq D_r \oplus M_{>D, N}$ de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. Par la Remarque 4.5.8 appliqué à $M^{\prime\alpha} = M_{>D}^\alpha$, on en déduit un isomorphisme $V_{>D} \simeq D_r \oplus M_{>D}$ et une suite exacte $0 \rightarrow D_r \rightarrow V_{\leq D} \rightarrow M_{\leq D} \rightarrow 0$ de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$ où $V_{\leq D} \stackrel{\text{déf}}{=} V/M_{>D}$ et $M_{\leq D} \stackrel{\text{déf}}{=} M/M_{>D} \simeq M_{\leq D}^\alpha \{\{\eta_\alpha\}\}$ avec $M_{\leq D}^\alpha \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{D \geq m' \geq m} M_{m'}^\alpha$.

Un calcul montre que, si $n_\alpha \in N_\beta(\mathbb{Q}_p)N_{\gamma, D} \subseteq N^\alpha(\mathbb{Q}_p)$, alors il existe un sous-groupe ouvert (suffisamment petit dépendant de D) de $N_\alpha(\mathbb{Q}_p)$ tel que, pour tout n_α dans ce sous-groupe ouvert, on a $(s_\alpha n_\alpha s_\alpha) n_\alpha (s_\alpha n_\alpha^{-1} s_\alpha) = n_\alpha n_\beta$ avec $n_\beta \in N_\beta(\mathbb{Q}_p) \cap N_m^\alpha$ tel que $\eta(n_\beta) = 1$. On en déduit que l'action (131) (conjuguée par s_α) de ce sous-groupe ouvert sur :

$$(E_m(-\mu) \otimes_E C^\infty(N_{\gamma, D}, \pi_{P_\beta}^\infty))(\eta^{-1})^{N_m^\alpha} \simeq E_m(-\mu) \otimes_E ((c\text{-Ind}_{N_\beta(\mathbb{Q}_p)}^{N_\beta(\mathbb{Q}_p)N_{\gamma, D}} \pi_{P_\beta}^\infty)^\infty(\eta^{-1})^{N_m^\alpha})$$

est triviale. Avec la Remarque 2.1.4, on voit qu'il existe $n_0 \gg 0$ tel que $\varphi^{n_0}(X)$ annule $M_{\leq D}^\alpha$. Quitte à augmenter r , on peut supposer que $\varphi^{n_0}(X)$ est inversible dans $\mathcal{R}_{E_m}^r$.

En utilisant le (ii) de la Remarque 4.5.5 appliqué à $M''^\alpha = M_{\leq D}^\alpha$ et avec $\varphi^{n_0}(X)$, on peut vérifier que la formule (162) avec $\varphi^{n_0}(X)$ au lieu de t définit une section $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -linéaire continue $s : M_{\leq D, N}^\alpha \rightarrow V_{\leq D, N}$ (avec des notations similaires à celles du Lemme 4.5.7) qui commute à ψ et Γ , de sorte que pour tout $N \geq 0$ on a des scindages compatibles $V_{\leq D, N} \simeq D_r \oplus M_{\leq D, N}^\alpha$ de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. Le seul point non trivial est la commutation à ψ (pour $x \in M_{\leq D, N}^\alpha = M_{\leq D}^\alpha \otimes_E (E \oplus E\mathfrak{h}_\alpha \oplus \dots \oplus E\mathfrak{h}_\alpha^N)$) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi^{n_0}(X)^{N+1}}(\varphi^{n_0}(X)^{N+1}\psi(\hat{x})) &= \frac{1}{\varphi^{n_0}(X)^{N+1}}\psi(\varphi^{n_0+1}(X)^{N+1}\hat{x}) \\ &= \frac{1}{\varphi^{n_0}(X)^{N+1}}\psi\left(\varphi^{n_0+1}(X)^{N+1}\frac{1}{\varphi^{n_0}(X)^{N+1}}(\varphi^{n_0}(X)^{N+1}\hat{x})\right) \\ &= \psi\left(\frac{1}{\varphi^{n_0}(X)^{N+1}}(\varphi^{n_0}(X)^{N+1}\hat{x})\right). \end{aligned}$$

Un raisonnement strictement analogue à celui de la preuve du Lemme 4.5.7 avec $M_{\leq D}^\alpha$ au lieu de M^α et $\varphi^{n_0}(X)$ au lieu de t donne alors que la suite $0 \rightarrow D_r \rightarrow V_{\leq D} \rightarrow M_{\leq D} \rightarrow 0$ est scindée. De la surjection composée $V \rightarrow V/M_{> D} = V_{\leq D} \rightarrow \bar{D}_r$ on déduit aisément que (161) est aussi scindée.

Étape 3

On montre finalement que la suite $(m_N)_{N \geq 0}$ est nécessairement majorée. Supposons le contraire. Il existe alors une sous-suite $(m_{i(N)})_N$ de $(m_N)_N$ tendant vers $+\infty$ telle que l'application $f_{i(N)+1}$ en (169) est *non nulle* en restriction à $M_{m_{i(N)}}^\alpha \otimes \mathfrak{h}_\alpha^{i(N)} \subseteq M_{i(N)}$. Posons par ailleurs :

$$M^0 \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \sum_{n \geq 0} w_n \otimes \mathfrak{h}_\alpha^n \in M, w_n \in \prod_{m' \geq m_n + 1} M_{m'}^\alpha \right\},$$

on vérifie que M^0 est fermé dans M et stable par toutes les structures (pour la stabilité par $\mathcal{R}_{E_m}^+$, on utilise que la suite $(m_n)_n$ est croissante), en particulier M^0 est un (ψ, Γ) -module de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. De plus, par définition de $(m_n)_n$ on a pour tout $N \geq 0$ une section $M^0 \cap M_N \hookrightarrow V_N[t^{N+1}] \subseteq V_N$ (cf. (169)). Soit V^0 (resp. V_N^0) le "pull-back" de V le long de $M^0 \hookrightarrow M$ (resp. le long de $M^0 \cap M_N \hookrightarrow M^0 \hookrightarrow M$), on a donc pour $N \geq 0$ des scindages compatibles $V_N^0 \simeq D_r \oplus (M^0 \cap M_N)$ de (ψ, Γ) -module de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. On peut alors dérouler la preuve du Lemme 4.5.7 en remplaçant M par M^0 , M_N par $M^0 \cap M_N$, V par V^0 et V_N par V_N^0 , ce qui donne un isomorphisme $V^0 \simeq D_r \oplus M^0$ et une suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$(170) \quad 0 \longrightarrow D_r \longrightarrow V/M^0 \longrightarrow M/M^0 \longrightarrow 0.$$

En utilisant que toute semi-norme continue sur M^α est nulle sur $\prod_{m' \geq D+1} M_{m'}^\alpha$ pour $D \gg 0$ (par définition de la topologie produit), on vérifie facilement sur la définition de $M = M^\alpha \{\{\mathfrak{h}_\alpha\}\}$ que l'on a une immersion fermée d'espaces de Fréchet :

$$(171) \quad \widetilde{M} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{n \geq 0} \left(\left(\prod_{m_n \geq m' \geq m_{n-1}+1} M_{m'}^\alpha \right) \otimes_E E\mathfrak{h}_\alpha^n \right) \hookrightarrow M/M^0$$

où $m_{-1} \stackrel{\text{déf}}{=} m - 1$ et le sous-espace \widetilde{M} de gauche est muni de la topologie produit (le facteur au cran n étant nul si $m_n = m_{n-1}$). On vérifie de plus que \widetilde{M} est stable par $\mathcal{R}_{E_m}^+$, ψ et Γ dans M/M^0 , et même que l'on a $\widetilde{M} \subseteq (M/M^0)[t]$. La multiplication par t sur (170) donne donc comme en (169) une application de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$\widetilde{M} \hookrightarrow (M/M^0)[t] \xrightarrow{f_1} D_r(\varepsilon^{-1})/(t).$$

Il suit alors de la définition de M^0 et du fait que D_r est libre de rang fini sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$ que, pour tout $N \geq 0$, on a des diagrammes commutatifs de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$(172) \quad \begin{array}{ccc} M_N & \xrightarrow{f_{N+1}} & D_r(\varepsilon^{-N-1})/(t^{N+1}) \\ \downarrow & & \parallel \\ M_N/(M^0 \cap M_N) & \xrightarrow{f_{N+1}} & D_r(\varepsilon^{-N-1})/(t^{N+1}) \\ \uparrow & & \uparrow t^N \\ \widetilde{M}_N & \xrightarrow{f_1} & D_r(\varepsilon^{-1})/(t) \end{array}$$

où $\widetilde{M}_N \stackrel{\text{déf}}{=} \widetilde{M} \cap (M_N/(M^0 \cap M_N))$ et f_{N+1} est comme en (169). Comme l'action de ψ sur \widetilde{M} respecte chaque facteur dans le produit $\prod_{n \geq 0} (-)$ en (171), le Lemme 3.2.7 montre que $f_1 : \widetilde{M} \rightarrow D_r(\varepsilon^{-1})/(t)$ est *nul* sur tous ces facteurs sauf un nombre fini. Le diagramme (172) avec $i(N)$ au lieu de N montre alors clairement (en regardant $f_1|_{M_{m_{i(N)}}^\alpha \otimes \mathfrak{h}_\alpha^{i(N)}}$) qu'une suite $i(N)$ tendant vers $+\infty$ comme au début ne peut exister. Cela termine la preuve de la Proposition 4.5.6.

Remarque 4.5.9. — Un argument similaire, en plus simple, montre que pour tout $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et tout (φ, Γ) -module généralisé T sur \mathcal{R}_E , on a $F_{\alpha, m}(M)(T) = 0$: pour $r \in \mathbb{Q}_{> p-1}$ et $f : M \rightarrow T_r$, on considère la suite croissante $(m_N)_{N \geq 0}$ où m_0 est le plus petit entier $\geq m - 1$ tel que $f|_{\prod_{m' \geq m_0+1} M_{m', 0}} = 0$ et m_N pour $N > 0$ le plus petit entier $\geq m_{N-1}$ tel que $f|_{\prod_{m' \geq m_{N+1}} M_{m', N}} = 0$ et on montre comme dans l'Étape 3 ci-dessus qu'elle est majorée.

4.6. Un résultat d'exactitude pour GL_3 et GL_2 . — On montre le Théorème 4.1.6.

On commence avec GL_3 . On conserve les notations et hypothèses du § 4.5 et on commence par une proposition préliminaire. On suppose $P = P_\beta$, i.e. $\pi = (\mathrm{Ind}_{P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \pi_{P_\beta})^{\mathrm{an}}$ (et $\pi_{P_\beta} = L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E \pi_{P_\beta}^\infty$). Le deuxième isomorphisme en (133) induit un isomorphisme $C_c^{\mathrm{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}) \simeq (\mathrm{c}\text{-Ind}_{B(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{B(\mathbb{Q}_p)} \pi_{P_\beta})^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\sim} C_c^{\mathrm{an}}(N_\alpha(\mathbb{Q}_p), \pi_{N^\alpha})$ dans $\mathrm{Rep}_E^{\mathrm{an}}(B(\mathbb{Q}_p))$ où l'action de $N^\beta(\mathbb{Q}_p)$ à gauche est la translation à droite et celle de $B(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)$ donnée par $(l_\beta f)(n^\beta) \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} l_\beta(f(l_\beta^{-1} n^\beta l_\beta))$ pour $l_\beta \in B(\mathbb{Q}_p) \cap P_\beta^-(\mathbb{Q}_p) = B(\mathbb{Q}_p) \cap L_{P_\beta}(\mathbb{Q}_p)$ et $n^\beta \in N^\beta(\mathbb{Q}_p)$. De plus les preuves du Lemme 3.4.3 et de la Proposition 3.4.4 donnent pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ un morphisme surjectif de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$(173) \quad f : M_\alpha(C_c^{\mathrm{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}) \otimes_E E_m) \rightarrow D_\alpha(C_c^{\mathrm{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}))_+ \otimes_E E_m$$

où $D_\alpha(C_c^{\mathrm{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}))_+ \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} \mathcal{R}_{E_m}^+(((-\mu) \circ \lambda_{\alpha^\vee}^{-1})(\chi_{\pi_{P_\beta}^\infty} \circ \lambda_{\alpha^\vee}^{-1}))$ si $\pi_{P_\beta}^\infty$ est une représentation générique de $L_{P_\beta}(\mathbb{Q}_p)$ et $D_\alpha(C_c^{\mathrm{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}))_+ \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} 0$ sinon.

Proposition 4.6.1. — *Soit $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$ et D_r un (φ, Γ) -module sans torsion sur $\mathcal{R}_{E_m}^r$. Alors, quitte à augmenter m (par “pull-back”) et r (par “push-out”), toute suite exacte (stricte) de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:*

$$(174) \quad 0 \longrightarrow D_r \longrightarrow V \longrightarrow M_\alpha(C_c^{\mathrm{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}) \otimes_E E_m) \longrightarrow 0$$

où la topologie de V peut être définie par des semi-normes q telles qu’il existe $C_q \in \mathbb{R}_{>0}$ vérifiant $q(Xv) \leq C_q q(v)$ pour tout $v \in V$, s’insère dans un diagramme commutatif de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D_r & \longrightarrow & V & \longrightarrow & M_\alpha(C_c^{\mathrm{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}) \otimes_E E_m) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & D_r & \longrightarrow & W & \longrightarrow & D_\alpha(C_c^{\mathrm{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}))_+ \otimes_E E_m \longrightarrow 0 \end{array}$$

où l’on a pour tout (φ, Γ) -module généralisé T sur \mathcal{R}_E :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{(s, f_s, T_s) \in I(T)} \mathrm{Hom}_{\psi, \Gamma}(W, T_s \otimes_E E_m) \xrightarrow{\sim} \lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{(s, f_s, T_s) \in I(T)} \mathrm{Hom}_{\psi, \Gamma}(V, T_s \otimes_E E_m).$$

Démonstration. — On ne traite que le cas où $D_\alpha(C_c^{\mathrm{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}))_+ \neq 0$, le cas $D_\alpha(C_c^{\mathrm{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}))_+ = 0$ étant analogue en plus facile (noter qu’alors l’énoncé implique que la suite (161) est scindée quitte à augmenter r et m). Par ailleurs, les preuves étant de même nature que celles des §§ 3.4, 3.6, 4.4 & 4.5, on se permet de donner moins de détails. Si N' est un sous-groupe de $N(\mathbb{Q}_p)$, on note $N'_m \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} N' \cap N_m$.

Étape 1

Il résulte d’abord facilement des preuves du Lemme 3.4.3 et de la Proposition 3.4.4 que

l'on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{(s, f_s, \overline{T_s}) \in I(T)} \text{Hom}_{\psi, \Gamma}(\ker(f), T_s \otimes_E E_m) = 0$, d'où le dernier isomorphisme si

l'on a $W \simeq V / \ker(f)$. Il suffit donc de montrer l'existence du diagramme commutatif. Par le début de la preuve du Lemme 3.3.2, on a une suite exacte $0 \rightarrow W_E^\infty \rightarrow \pi_{P_\beta}^\infty \rightarrow (\pi_{P_\beta}^\infty)_{N_\beta(\mathbb{Q}_p)} \rightarrow 0$ qui commute aux actions de $N_\beta(\mathbb{Q}_p)$ et $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Q}_p^\times)$ (ce dernier agissant partout par le caractère central de $\pi_{P_\beta}^\infty$). On en déduit une suite exacte qui commute aux actions de $N(\mathbb{Q}_p)$ et $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Q}_p^\times)$ (définies comme avant (173)) :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E W_E^\infty &\longrightarrow C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E \pi_{P_\beta}^\infty \\ &\longrightarrow C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E (\pi_{P_\beta}^\infty)_{N_\beta(\mathbb{Q}_p)} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme l'action de \mathfrak{n}^α ne touche pas les facteurs lisses, on a encore une suite exacte en remplaçant partout $C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta}$ par $(C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta})[\mathfrak{n}^\alpha]$, d'où on déduit une suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$\begin{aligned} (175) \quad 0 \longrightarrow M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E (\pi_{P_\beta}^\infty)_{N_\beta(\mathbb{Q}_p)} \otimes_E E_m) \\ \longrightarrow M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E \pi_{P_\beta}^\infty \otimes_E E_m) \\ \longrightarrow M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E W_E^\infty \otimes_E E_m) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Écrivant $C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \simeq C^{\text{an}}(N_m^\beta, E) \oplus (\bigoplus_{m' \geq m+1} C^{\text{an}}(N_{m'}^\beta \setminus N_{m'-1}^\beta, E))$, on en déduit avec les notations de (69) un isomorphisme de modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$ pour $(-) \in \{(\pi_{P_\beta}^\infty)_{N_\beta(\mathbb{Q}_p)}, \pi_{P_\beta}^\infty, W_E^\infty\}$:

$$(176) \quad M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E (-) \otimes_E E_m) \simeq \prod_{m' \geq m} M_{\alpha, m'}$$

où Γ préserve chaque facteur direct à droite, où ψ préserve $M_{\alpha, m}$ et envoie $M_{\alpha, m'}$ dans $M_{\alpha, m'+1}$ si $m' \geq m+1$ (bien sûr, $M_{\alpha, m'}$ dépend de $(-)$ même si on ne le figure pas dans la notation). Noter que pour $m' \geq m+1$:

$$\begin{aligned} (177) \quad M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_{m'}^\beta \setminus N_{m'-1}^\beta, E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E (-) \otimes_E E_m) \\ \simeq ((C_c^{\text{an}}(N_{m'}^\beta \setminus N_{m'-1}^\beta, E)[\mathfrak{n}_\gamma] \otimes_E E(-\mu) \otimes_E (-) \otimes_E E_m)(\eta^{-1})_{N_m^\alpha})^\vee \end{aligned}$$

et idem avec N_m^β (\mathfrak{n}_γ est la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de $N_\gamma(\mathbb{Q}_p)$). Soit $m' \geq m+1$, comme $(C_c^{\text{an}}(N_{m'}^\beta \setminus N_{m'-1}^\beta, E)[\mathfrak{n}_\gamma] \otimes_E E(-\mu) \otimes_E (-) \otimes_E E_m)^\vee$ est un $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -module pro-libre, on déduit que le sous- $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -module $M_{\alpha, m'}$ est sans torsion. Supposons maintenant $(-) = (\pi_{P_\beta}^\infty)_{N_\beta(\mathbb{Q}_p)}$, dont la dimension est finie. Comme $(C_c^{\text{an}}(N_{m'}^\beta \setminus N_{m'-1}^\beta, E)[\mathfrak{n}_\gamma]^{N_{\gamma, m}} \otimes_E E(-\mu) \otimes_E (-) \otimes_E E_m)^\vee$ est un $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -module de type fini, on déduit avec la Remarque 2.1.4 que le $\mathcal{R}_{E_m}^+$ -module $M_{\alpha, m'}$ est de type fini. Donc les $M_{\alpha, m'}$ sont libres de type fini. On peut alors appliquer la Proposition 4.4.3 au "pull-back" de (174) le long de $\prod_{m' \geq m+1} M_{\alpha, m'}$, qui est donc scindé quitte à augmenter r . Par ailleurs, un calcul montre que l'action de $N_{\beta, m}$ sur $(C_c^{\text{an}}(N_m^\beta, E)[\mathfrak{n}_\gamma]^{N_{\gamma, m}} \otimes_E E(-\mu) \otimes_E (-))^\vee$ est triviale, ce qui implique $M_{\alpha, m} = 0$ (quitte à augmenter m pour avoir $\eta|_{N_{\beta, m}} \neq 1$).

Quotientant V par $\prod_{m' \geq m+1} M_{\alpha, m'} = \prod_{m' \geq m} M_{\alpha, m'}$, on est alors ramené à démontrer l'énoncé pour une suite exacte :

$$(178) \quad 0 \longrightarrow D_r \longrightarrow V \longrightarrow M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E W_E^\infty \otimes_E E_m) \longrightarrow 0.$$

Étape 2

Par (51) on a une suite exacte $0 \rightarrow W_E^\infty \rightarrow C_c^\infty(N_\beta(\mathbb{Q}_p), E) \rightarrow E \rightarrow 0$ qui commute aux actions de $N_\beta(\mathbb{Q}_p)$ et de $\lambda_{\alpha^\vee}(\mathbb{Q}_p^\times)$ en faisant partout agir ce dernier par le caractère central de $\pi_{P_\beta}^\infty$, et qui donne une suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$ analogue à (175). On a aussi des décompositions analogues à (176). Par le même argument qu'à la fin de l'Étape 1, on a $M_{\alpha, m} = 0$ quand $(-) = E$. Avec le Lemme 3.2.7, on en déduit que tout morphisme de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$ de $M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E E_m)$ dans D_r ou $D_\alpha(C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}))_+ \otimes_E E_m$ devient nul en augmentant m . Quitte à prendre le "pull-back" de (178) et à augmenter m , on en déduit qu'il suffit de démontrer l'énoncé pour une suite exacte :

$$(179) \quad 0 \longrightarrow D_r \longrightarrow V \longrightarrow M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E E(-\mu) \otimes_E E_m) \longrightarrow 0$$

où l'on a utilisé (cf. par exemple (177)) :

$$(180) \quad M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E E(-\mu) \otimes_E E_m) \\ \simeq M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E C_c^\infty(N_\beta(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E E_m).$$

Écrivant $C_c^{\text{an}}(N(\mathbb{Q}_p), E) \simeq C^{\text{an}}(N_m, E) \oplus (\bigoplus_{m' \geq m+1} C^{\text{an}}(N_{m'} \setminus N_{m'-1}, E))$, on a comme en (176) :

$$(181) \quad M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E E(-\mu) \otimes_E E_m) \simeq \prod_{m' \geq m} M_{\alpha, m'}$$

où Γ respecte chaque $M_{\alpha, m'}$, ψ envoie $M_{\alpha, m'}$ dans $M_{\alpha, m'} \oplus M_{\alpha, m'+1}$ et où, comme dans l'Étape 1, on vérifie que chaque $M_{\alpha, m'}$ est libre de rang fini sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. L'argument de la deuxième partie de la preuve de la Proposition 4.4.3, i.e. le scindage pour les modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ sous-jacents (cf. le (i) de la Remarque 4.4.5) avec l'argument de la première partie de la preuve du Lemme 4.4.4 montrent qu'il existe $M \gg 0$ tel que le "pull-back" de (179) sur $\prod_{m' \geq M+1} M_{\alpha, m'}$ est scindé comme suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. Quotientant V par $\prod_{m' \geq M+1} M_{\alpha, m'}$, on est donc ramené à démontrer l'énoncé pour une suite exacte :

$$(182) \quad 0 \longrightarrow D_r \longrightarrow V \longrightarrow M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_M, E) \otimes_E E(-\mu) \otimes_E E_m) \longrightarrow 0.$$

Remarquant que, comme pour (180) :

$$M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_M, E) \otimes_E E(-\mu) \otimes_E E_m) \\ \simeq M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_M^\beta, E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E C_c^\infty(N_{\beta, M}, E) \otimes_E E_m)$$

on a une suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$(183) \quad 0 \longrightarrow M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_M^\beta \backslash N_m^\beta, E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E C_c^\infty(N_{\beta, M}, E) \otimes_E E_m) \\ \longrightarrow M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_M^\beta, E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E C_c^\infty(N_{\beta, M}, E) \otimes_E E_m) \\ \longrightarrow M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_m^\beta, E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E C_c^\infty(N_{\beta, M}, E) \otimes_E E_m) \longrightarrow 0.$$

Comme $\psi^{M-m} = 0$ sur le premier terme en (183), l'argument dans la dernière partie du Lemme 4.4.4 montre que, quitte à augmenter r , le "pull-back" de (182) sur $M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N_M^\beta \backslash N_m^\beta, E) \otimes_E L(-\mu)_{P_\beta} \otimes_E C_c^\infty(N_{\beta, M}, E) \otimes_E E_m)$ est scindé comme suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$. Quotientant V et explicitant le terme du bas en (183), on est donc ramené à démontrer l'énoncé pour une suite exacte :

$$(184) \quad 0 \rightarrow D_r \rightarrow V \rightarrow C_c^{\text{an}}(N_{\alpha, m}, E)^\vee \otimes_E (E(-\mu) \otimes_E C_c^\infty(N_{\beta, M}, E_m)(\eta^{-1})_{N_{\beta, m}})^\vee \rightarrow 0.$$

Le même argument encore permet de remplacer $C_c^{\text{an}}(N_{\alpha, m}, E)^\vee$ par $C_c^{\text{an}}(N_{\alpha, 0}, E)^\vee$ (cf. la preuve de la Proposition 3.4.4). Enfin, quitte à remplacer m par M , on est finalement ramené à $C_c^{\text{an}}(N_{\alpha, 0}, E)^\vee \otimes_E (E(-\mu) \otimes_E C_c^\infty(N_{\beta, m}, E_m)(\eta^{-1})_{N_{\beta, m}})^\vee \simeq D_\alpha(C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}))_+ \otimes_E E_m$, ce qui termine la preuve. \square

On démontre maintenant le Théorème 4.1.6. On commence par le lemme suivant, valable pour tout groupe G comme au § 2.1.

Lemme 4.6.2. — *Soit π une représentation localement analytique admissible de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E , $S \in \mathcal{R}_E^+$ et $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Alors la topologie de Fréchet de $M_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$ peut être définie par des semi-normes q vérifiant la condition : il existe $C_{q, S} \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $q(Sv) \leq C_{q, S} q(v)$ pour tout $v \in M_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$.*

Démonstration. — Puisque $\pi \otimes_E E_m$ est admissible, par [60, Prop. 6.5] on peut écrire $\pi^\vee \otimes_E E_m$ comme limite inductive de type compact $\pi \otimes_E E_m = \varinjlim_l B_l$ où l

parcourt un ensemble dénombrable d'indices et les B_l sont des représentations localement analytiques de N_0 sur des E_m -espaces de Banach. Choisissons une norme r_l sur chaque Banach dual B_l^\vee , de sorte que les semi-normes induites (encore notées) $r_l : \pi^\vee \otimes_E E_m \simeq \varinjlim_l B_l^\vee \rightarrow B_l^\vee \xrightarrow{r_l} \mathbb{R}_{\geq 0}$ sur $\pi^\vee \otimes_E E_m$ définissent sa topologie de

Fréchet. Comme chaque B_l^\vee est un $D(N_0, E_m)$ -module séparément continu par [59, Prop. 3.2], donc *a fortiori* un $D(N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_0, E_m)$ -module séparément continu, la multiplication par $S \in \mathcal{R}_E^+ \otimes_E E_m \simeq D(N_\alpha(\mathbb{Q}_p) \cap N_0, E_m)$ est continue sur B_l , i.e. il existe $D_{l, S} \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $r_l(Sv) \leq D_{l, S} r_l(v)$ pour tout $v \in \pi^\vee \otimes_E E_m$. Quitte à remplacer les semi-normes r_l (resp. les constantes $D_{l, S}$) par les semi-normes q (resp. les constantes $C_{q, S}$) définies comme $\max(r_l, l \in F)$ (resp. $\max(D_{l, S}, l \in F)$) pour F parcourant les sous-ensembles finis d'indices l (cf. [57, Rem. 4.7]), on en déduit le résultat en utilisant (15) et [57, § 5.B]. \square

Fixons maintenant une suite exacte $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi' \rightarrow 0$ dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(G(\mathbb{Q}_p))$ ($G(\mathbb{Q}_p) = \text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$) satisfaisant les hypothèses de la Conjecture 4.1.3 avec π'' non localement algébrique (cf. § 4.2 pour le cas localement algébrique). Par la définition de $C_{\lambda, \alpha}$ (cf. début du § 4.1), on a une injection $\pi'' \hookrightarrow I(\pi'') \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{Ind}_{P^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L(-w \cdot \lambda)_P \otimes_E \pi_P^\infty)^{\text{an}}$ avec $w \notin \{1, w_0\}$ et un conoyau soit nul, soit de la forme $\mathcal{F}_{P^-}^G(L^-(w' \cdot \lambda), \pi_P^\infty)$ pour $w' \notin \{1, s_\alpha\}$. Si π_P^∞ est non générique, on a $F_\alpha(\pi'') = F_\alpha(I(\pi'')) = 0$ par le Théorème 3.7.1, le Théorème 3.7.2 et le (i) de la Proposition 2.3.4, et si π_P^∞ est générique, on a $F_\alpha(\pi'') \xrightarrow{\sim} F_\alpha(I(\pi''))$ par le Théorème 3.7.7.

On suppose d'abord $P = P_\alpha$, ce qui force $w \neq s_\alpha$ (en plus de $w \neq 1$), et donc $\pi_{P_\alpha}^\infty$ non générique par les conditions définissant $C_{\lambda, \alpha}$. On a donc $F_\alpha(\pi'') = 0$. On a aussi $t^{1-\langle w \cdot \lambda, \alpha^\vee \rangle} M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) = 0$ pour $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ par le (i) du Lemme 4.5.1, ou directement du Théorème 3.7.2. Partant de la (seconde) suite exacte courte (185) de la Proposition 4.3.3, l'argument de la preuve du cas $\pi'' = L(-\lambda) \otimes \pi^\infty$ au § 4.2 lorsque $D_\alpha(\pi'')_+ = 0$ (i.e. pour π^∞ non générique) s'étend alors essentiellement tel quel et montre que $F_\alpha(\pi)(-) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi'), (-)) \simeq F_\alpha(\pi')$.

Le lemme ci-dessous, valable pour $P \in \{P_\alpha, P_\beta\}$, ne sera utilisé que pour $P = P_\beta$.

Lemme 4.6.3. — *Supposons que π'' ne soit pas localement algébrique, il suffit de démontrer le Théorème 4.1.6 avec $I(\pi'')$ au lieu de π'' .*

Démonstration. — On suppose que le conoyau $J(\pi'')$ de $\pi'' \hookrightarrow I(\pi'')$ est non nul, i.e. $J(\pi'') \simeq \mathcal{F}_{P^-}^G(L^-(w' \cdot \lambda), \pi_P^\infty)$, sinon il n'y a rien à montrer. Soit $\tilde{\pi} \stackrel{\text{déf}}{=} \pi \oplus_{\pi''} I(\pi'')$, par hypothèse on a $F_\alpha(\tilde{\pi})(-) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\tilde{\pi}), -)$ avec une suite exacte $0 \rightarrow D_\alpha(\pi') \rightarrow D_\alpha(\tilde{\pi}) \rightarrow D_\alpha(\pi'') \rightarrow 0$ (où l'on a utilisé $F_\alpha(\pi'') \xrightarrow{\sim} F_\alpha(I(\pi''))$). La suite exacte $0 \rightarrow \pi \rightarrow \tilde{\pi} \rightarrow J(\pi'') \rightarrow 0$ et le (i) de la Proposition 2.3.4 donnent une suite exacte $0 \rightarrow F_\alpha(\pi) \rightarrow F_\alpha(\tilde{\pi}) \rightarrow F_\alpha(J(\pi''))$. Mais par le Corollaire 3.7.8, le Lemme 4.1.1 et le fait que $w' \notin \{1, s_\alpha\}$, le morphisme $F_\alpha(\tilde{\pi}) \rightarrow F_\alpha(J(\pi''))$ est nul dans $F(\varphi, \Gamma)_\infty$, l'action de $\text{Gal}(E_\infty/E)$ n'étant pas la même des deux côtés. On a donc $F_\alpha(\pi) \xrightarrow{\sim} F_\alpha(\tilde{\pi})$ ce qui termine la preuve. \square

On suppose maintenant $P = P_\beta$ et, changeant de notations, $\pi'' = (\text{Ind}_{P_\beta^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} L(-w \cdot \lambda)_{P_\beta} \otimes_E \pi_{P_\beta}^\infty)^{\text{an}}$ (via le Lemme 4.6.3). La Proposition 4.3.3 donne alors (quitte à augmenter m et r) une suite exacte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$(185) \quad 0 \longrightarrow D_\alpha(\pi')_r \otimes_E E_m \longrightarrow \widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m) \longrightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \longrightarrow 0$$

avec un isomorphisme comme en (121) (par le même argument). Par le (ii) du Lemme 4.5.1 avec (153) et la phrase d'après, on a une suite exacte courte de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur $\mathcal{R}_{E_m}^+$:

$$(186) \quad 0 \longrightarrow M_\alpha(\pi_C^0 \otimes_E E_m) \longrightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m) \longrightarrow M_\alpha(C_c^{\text{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}) \otimes_E E_m) \longrightarrow 0.$$

De plus on déduit facilement du Lemme 4.6.2 appliqué à π'' et à π , et de l'assertion analogue pour D_r au lieu de $M_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$, que la topologie de Fréchet sur $\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$ peut être définie par des semi-normes q vérifiant $q(Sv) \leq C_{q,S}q(v)$ (utiliser que $\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$ est la somme amalgamée de la Proposition 4.3.3). On peut donc appliquer la Proposition 4.5.6 au "pull-back" de (185) le long de :

$$M = M_\alpha(\pi_C^0 \otimes_E E_m) \longrightarrow M_\alpha(\pi'' \otimes_E E_m).$$

Quitte à augmenter r , on en déduit une section $M_\alpha(\pi_C^0 \otimes_E E_m) \hookrightarrow \widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$ et, avec la Remarque 4.5.9, un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \varinjlim_{(s,f_s,T_s) \in I(T)} \operatorname{Hom}_{\psi,\Gamma}(\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)/M_\alpha(\pi_C^0 \otimes_E E_m), T_s \otimes_E E_m) \\ \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(s,f_s,T_s) \in I(T)} \operatorname{Hom}_{\psi,\Gamma}(\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m), T_s \otimes_E E_m). \end{aligned}$$

Remplaçant $\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)$ par $\widetilde{M}_\alpha(\pi \otimes_E E_m)/M_\alpha(\pi_C^0 \otimes_E E_m)$, on est ainsi ramené à une suite exacte comme dans la Proposition 4.6.1. Par cette Proposition 4.6.1, on peut alors argumenter comme dans l'Étape 3 du § 4.2. Cela achève la preuve du Théorème 4.1.6 pour $G = \mathrm{GL}_3$. Noter que l'hypothèse $\operatorname{Hom}_{(\varphi,\Gamma)}(D_\alpha(\pi''), D_\alpha(\pi')) = 0$ n'est utilisée que via le Lemme 4.1.7.

La preuve pour GL_2 est beaucoup plus simple que pour GL_3 (cf. Exemple 2.3.3 pour F_α dans le cas $G = \mathrm{GL}_2$). Les objets irréductibles dans $C_{\lambda,\alpha}$ sont soit des représentations localement algébriques $L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty$, soit des séries principales localement analytiques $(\operatorname{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2)^{\mathrm{an}}$ pour des caractères localement algébriques $\chi_i : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow E^\times$ tels que la dérivée de $\chi_1 \otimes \chi_2$ est $-s_\alpha \cdot \lambda$. Fixons une suite exacte $0 \rightarrow \pi'' \rightarrow \pi \rightarrow \pi' \rightarrow 0$ dans $\operatorname{Rep}_E^{\mathrm{an}}(G(\mathbb{Q}_p))$ ($G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) comme dans la Conjecture 4.1.3. Le cas π'' localement algébrique est traité au § 4.2. Pour l'autre cas, on décompose la série principale π'' de la manière usuelle :

$$0 \longrightarrow (\pi_C'')^\vee \longrightarrow (\pi'')^\vee \longrightarrow ((c\text{-Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{B^-(\mathbb{Q}_p)B(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2)^{\mathrm{an}})^\vee \longrightarrow 0.$$

La Proposition 4.5.6 prend dans ce cas la forme plus simple suivante.

Proposition 4.6.4. — *Soit $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$ et D_r un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E^r . Alors toute suite exacte :*

$$0 \longrightarrow D_r \longrightarrow V \longrightarrow (\pi_C'')^\vee \longrightarrow 0$$

de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ où la topologie de V peut être définie par des semi-normes q telles qu'il existe $C_q \in \mathbb{R}_{>0}$ vérifiant $q(Xv) \leq C_q q(v)$ pour tout $v \in V$ est scindée.

Démonstration. — En remarquant que $(\pi_C)^\vee \simeq (\chi_2 \otimes \chi_1)^\vee \otimes_E D(N^-(\mathbb{Q}_p), E)_{\{1\}}$ par le Lemme 3.5.2 et que X annule $(\chi_2 \otimes \chi_1)^\vee$, la preuve est la même, en beaucoup plus simple, que celle du Lemme 4.5.7 avec l'espace de dimension un $(\chi_2 \otimes \chi_1)^\vee$ au lieu de M^α , X au lieu de t , et en argumentant comme à la fin de l'Étape 2 dans la preuve de

la Proposition 4.5.6 pour avoir les scindages comme dans le Lemme 4.5.7. On laisse les détails au lecteur intéressé. Noter que l'on n'a pas besoin de l'hypothèse D_r sans torsion. \square

La Proposition 4.6.1 reste également valable pour $G = \mathrm{GL}_2$ en remplaçant $M_\alpha(C_c^{\mathrm{an}}(N^\beta(\mathbb{Q}_p), \pi_{P_\beta}) \otimes_E E_m)$ par $((c\text{-Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{B^-(\mathbb{Q}_p)B(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 \otimes \chi_2)^{\mathrm{an}})^\vee \otimes_E E_m$. On termine la preuve de la même manière (noter que l'on n'utilise pas $\mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi''), D_\alpha(\pi')) = 0$).

5. Foncteurs F_α , groupes Ext^1 et compatibilité local-global

On revisite la conjecture de compatibilité local-global [10, Conj. 6.1.1] lorsque $F^+ = \mathbb{Q}$, en particulier on la reformule de manière plus précise en termes de (φ, Γ) -modules en utilisant les foncteurs F_α . On donne plusieurs cas particuliers et résultats partiels sur cette reformulation.

5.1. Préliminaires de théorie de Hodge p -adique. — Les résultats de ce paragraphe, par exemple la Proposition 5.1.2 ci-dessous, sont entièrement “côté Galois” et ne sont (probablement) pas nouveaux, mais nous donnons une formulation adaptée pour être utilisée dans l'énoncé de la Conjecture 5.3.1 ci-dessous ainsi que dans la preuve de cas particuliers (§ 5.4).

Dans la suite, on appelle “morphisme naturel d'espaces vectoriels” tout morphisme (entre deux espaces vectoriels) qui est canonique à *multiplication près par un scalaire non nul* (le contexte rendra cette terminologie plus claire). Dans ce paragraphe, on note avec une majuscule \mathcal{D} les (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}_E afin de les distinguer des modules de Deligne-Fontaine D .

On fixe un système compatible de racines primitives p^n -ièmes de l'unité $(\zeta_{p^n})_{n \geq 1}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow B_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui permet de voir $t = \log(1 + X)$ comme un élément de B_{dR}^+ . Rappelons que, pour $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$ et $n \geq n(r)$ (où $n(r)$ est le plus petit entier n tel que $p^{n(r)-1}(p-1) \geq r$), on a un morphisme de \mathbb{Q}_p -algèbres :

$$\iota_n : \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}^r \longrightarrow \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]]$$

qui envoie $\sum a_i X^i$ vers $\sum a_i (\zeta_{p^n} \exp(t/p^n) - 1)^i$. Il est clair que ι_n est Γ -équivariant. On note encore ι_n la composée $\iota_n : \mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}^r \rightarrow \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]] \hookrightarrow B_{\mathrm{dR}}^+$, qui est alors $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ -équivariante (où l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}^r$ se factorise par Γ). Si \mathcal{D} est un (φ, Γ) -module sans torsion sur \mathcal{R}_E et $\mathcal{D}_r \subseteq \mathcal{D}$ un (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_E^r tel que $\mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^r} \mathcal{D}_r \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$, pour $n \geq n(r)$ on note $D_{\mathrm{diff}, n}^+(\mathcal{D}) \stackrel{\mathrm{d\acute{e}f}}{=} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]] \otimes_{\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}^r}^{\iota_n} \mathcal{D}_r$ (un $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]] \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module libre de rang fini muni de l'action diagonale de Γ) et $W_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{D}) \stackrel{\mathrm{d\acute{e}f}}{=} B_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}^r}^{\iota_n} \mathcal{D}_r \simeq B_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]]} D_{\mathrm{diff}, n}^+(\mathcal{D})$ (muni de l'action diagonale de

$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$) qui ne dépend pas de n suffisamment grand ([5, Prop. 2.2.6(2)]). On rappelle que $H_{(\varphi,\Gamma)}^i(\mathcal{D}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Ext}_{(\varphi,\Gamma)}^i(\mathcal{R}_E, \mathcal{D})$.

Lemme 5.1.1. — Soit $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$ deux (φ, Γ) -modules sans torsion sur \mathcal{R}_E de même rang, alors on a un isomorphisme canonique :

$$(187) \quad H_{(\varphi,\Gamma)}^0(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1) \xrightarrow{\sim} H^0(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_2)/W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_1)).$$

Démonstration. — Les deux E -espaces vectoriels en (187) sont de dimension finie : par [47, Th. 5.3(1)] pour celui de gauche et par [52, Cor. 5.7] (avec la suite exacte longue de cohomologie associée à $0 \rightarrow W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_1) \rightarrow W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_2) \rightarrow W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_2)/W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_1) \rightarrow 0$) pour celui de droite. Par définition de $W_{\text{dR}}^+(-)$ on a un isomorphisme $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ -équivariant pour $n \gg 0$:

$$(188) \quad W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_2)/W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_1) \simeq B_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]]} (D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_1)).$$

Étape 1

On montre que (188) induit un isomorphisme quitte à augmenter encore n :

$$(189) \quad H^0(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_2)/W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_1)) \xleftarrow{\sim} (D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_1))^\Gamma.$$

Notons $\mathbb{Q}_{p,\infty} \stackrel{\text{déf}}{=} \cup_n \mathbb{Q}_p(\zeta_n)$, $H \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_{p,\infty})$ et $L_{\text{dR}}^+ \stackrel{\text{déf}}{=} (B_{\text{dR}}^+)^H$ qui est un anneau de valuation discrète complet d'uniformisante t et de corps résiduel le complété p -adique de $\mathbb{Q}_{p,\infty}$ ([37, Prop. 3.3]). En particulier L_{dR}^+ contient $\mathbb{Q}_{p,\infty}[[t]]$. Soit $W \stackrel{\text{déf}}{=} W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_2)/W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_1)$, qui est un B_{dR}^+ -module de longueur finie. Il suit de [37, Th. 3.5] que l'on a un isomorphisme $B_{\text{dR}}^+ \otimes_{L_{\text{dR}}^+} W^H \xrightarrow{\sim} W$ (et donc que W^H est un L_{dR}^+ -module de longueur finie). De (188) on déduit facilement une injection Γ -équivariante de L_{dR}^+ -modules de longueur finie $L_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]]} (D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_1)) \hookrightarrow W^H$ (pour $n \gg 0$) qui, par extension des scalaires de L_{dR}^+ à B_{dR}^+ , devient donc un isomorphisme de B_{dR}^+ -modules par (188) et ce qui précède. On en déduit facilement que l'on a en fait un isomorphisme Γ -équivariant :

$$(190) \quad W^H \xleftarrow{\sim} L_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]]} (D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_1)).$$

De même, par (190) et [37, Th. 3.6] appliqué à $X = W^H$, on déduit une injection Γ -équivariante de $\mathbb{Q}_{p,\infty}[[t]]$ -modules de longueur finie $\mathbb{Q}_{p,\infty}[[t]] \otimes_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]]} (D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_1)) \hookrightarrow (W^H)_f$ (cf. [37, Th. 3.6] pour $(W^H)_f \subseteq W^H$) qui devient un isomorphisme après extension des scalaires de $\mathbb{Q}_{p,\infty}[[t]]$ à L_{dR}^+ , donc qui est en fait un isomorphisme Γ -équivariant (pour $n \gg 0$) :

$$(191) \quad (W^H)_f \xleftarrow{\sim} \mathbb{Q}_{p,\infty}[[t]] \otimes_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]]} (D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_1)).$$

Comme $(W^H)^\Gamma = H^0(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_2)/W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D}_1))$ est de dimension finie, on a $((W^H)_f)^\Gamma = (W^H)^\Gamma$ et il existe $m \gg n$ tel que tous les éléments de $((W^H)_f)^\Gamma$

proviennent via (191) d'éléments de $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^m})[[t]] \otimes_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]]} (D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_1))$. Par l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^m})[[t]] \otimes_{\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]]} (D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_1)) &\xrightarrow{\sim} D_{\text{diff},m}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff},m}^+(\mathcal{D}_1) \\ a \otimes (b \otimes d) &\longmapsto ab\varphi^{m-n}(d) \end{aligned}$$

($a \in \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^m})[[t]]$, $b \in \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]]$, $d \in \mathcal{D}_{2,r}/\mathcal{D}_{1,r}$), quitte à remplacer n par m , on en déduit (189).

Étape 2

On termine la preuve. Soit $r \in \mathbb{Q}_{>p-1}$ tel que l'injection $\mathcal{D}_1 \hookrightarrow \mathcal{D}_2$ est induite par une injection $\mathcal{D}_{1,r} \hookrightarrow \mathcal{D}_{2,r}$ de (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}_E^r ((iii) du Lemme 2.2.3). Par [47, Prop. 4.4(1)] et la preuve de [47, Th. 4.7] (en particulier la partie montrant que $H^0(S)$ est de dimension finie), le morphisme canonique surjectif :

$$\mathcal{D}_{2,r}/\mathcal{D}_{1,r} \longrightarrow D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_1) \simeq \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})[[t]] \otimes_{\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p}^n} (\mathcal{D}_{2,r}/\mathcal{D}_{1,r})$$

induit un isomorphisme canonique pour $n \gg 0$:

$$H_{(\varphi, \Gamma)}^0(\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1) \xrightarrow{\sim} (D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff},n}^+(\mathcal{D}_1))^\Gamma.$$

En le composant avec (189), on obtient un isomorphisme comme en (187), dont on vérifie facilement qu'il ne dépend pas du choix de $n \gg 0$. \square

Si L est une extension finie de \mathbb{Q}_p , on note L_0 sa sous-extension non ramifiée maximale, et l'on renvoie à [10, § 2.2] pour la définition des modules de Deligne-Fontaine $(D, \varphi, N, \text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p))$ sur $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ qui deviennent "non ramifiés sur L " (l'extension L est notée L' dans *loc.cit.*). Dans la suite, on note un module de Deligne-Fontaine juste par son $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module libre sous-jacent D (les opérateurs φ, N sur D et l'action de $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$ sur $D_L \stackrel{\text{déf}}{=} L \otimes_{L_0} D$ étant sous-entendus). Si D est un module de Deligne-Fontaine, on note \mathcal{D} le (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_E associé à D muni de la filtration décroissante triviale, i.e. $\text{Fil}^0(D_L) = D_L$ et $\text{Fil}^1(D_L) = 0$, par l'équivalence de catégories [4, Th. A] de Berger (\mathcal{D} est aussi appelé l'équation différentielle p -adique associée à D). Noter que si l'on remplace cette filtration par $\text{Fil}^{-h}(D_L) = D_L$ et $\text{Fil}^{-h+1}(D_L) = 0$ pour $h \in \mathbb{Z}$, alors on remplace \mathcal{D} par $\mathcal{D}(x^h) = \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(x^h)$. Rappelons par ailleurs que le Théorème de Hilbert 90 implique $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_L^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)} \xrightarrow{\sim} D_L$ et que se donner une filtration $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$ -équivariante sur D_L est équivalent via $L \otimes_{\mathbb{Q}_p} (-)$ à se donner une filtration sur le E -espace vectoriel $D_L^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}$.

Proposition 5.1.2. — (i) Soit $h_1 > h_2$ dans \mathbb{Z} et $F \subseteq D_L^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}$ un sous- E -espace vectoriel de dimension 1, alors le (φ, Γ) -module libre sur \mathcal{R}_E associé par [4, Th. A] à D muni de la filtration à deux crans $\text{Fil}^{-h_1}(D_L) = D_L$, $\text{Fil}^{-h}(D_L) = L \otimes_{\mathbb{Q}_p} F$ pour $h \in \{h_2, \dots, h_1 - 1\}$, $\text{Fil}^{-h_2+1}(D_L) = 0$ est une extension non scindée de $\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2})$ par $\mathcal{D}(x^{h_1})$. De plus toute extension non scindée de $\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2})$ par $\mathcal{D}(x^{h_1})$ provient comme cela d'un (unique) sous- E -espace vectoriel de dimension 1 de $D_L^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}$.

Montrons la deuxième assertion de (i). Notons $\mathcal{D}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{D}(x^{h_1})$ et soit \mathcal{D}_2 un (φ, Γ) -module généralisé sur \mathcal{R}_E qui est une extension non scindée de $\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2})$ par \mathcal{D}_1 . Montrons que \mathcal{D}_2 est sans torsion. Sinon, on voit facilement que $\mathcal{D}'_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{D}_2/(\mathcal{D}_2)_{\text{tor}}$ est une extension non scindée de $\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^h)$ par \mathcal{D}_1 pour un h tel que $0 < h < h_1 - h_2$. On a comme en (199) ci-dessous :

$$\dim_E \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^h), \mathcal{D}_1) = \dim_E H_{(\varphi, \Gamma)}^0(\mathcal{D}_1(x^{-h_2-h})/(t^h)).$$

Mais par le Lemme 5.1.1 et (193), on a $H_{(\varphi, \Gamma)}^0(\mathcal{D}_1(x^{-h_2-h})/(t^h)) = 0$ et donc $\text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^h), \mathcal{D}_1) = 0$, une contradiction. Comme \mathcal{D}_1 est de de Rham (i.e. la connexion associée est localement triviale, cf. [4, Th. A]), \mathcal{D}_2 l'est aussi (rappelons que $D_{\text{dR}}(\mathcal{D}_1) \simeq (D_{\text{diff}, n}^+(\mathcal{D}_1)[\frac{1}{t}])^\Gamma = (D_{\text{diff}, n}^+(\mathcal{D}_2)[\frac{1}{t}])^\Gamma$ pour $n \gg 0$). Soit (D, Fil_2) le module de Deligne-Fontaine *filtré* associé à \mathcal{D}_2 . Comme $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 \simeq \mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2})$, par [47, Th. 4.3 & Prop. 4.4] on a pour $n \gg 0$:

$$(197) \quad D_{\text{diff}, n}^+(\mathcal{D}_2)/D_{\text{diff}, n}^+(\mathcal{D}_1) \simeq (E \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}))[[t]]/(t^{h_1-h_2}).$$

En utilisant (193), on vérifie alors facilement que la filtration Fil_2 doit être comme dans le (i) de la proposition.

(ii) En appliquant $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(-, \mathcal{D}(x^{h_1}))$ à la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{R}_E(x^{h_1}) \rightarrow \mathcal{R}_E(x^{h_2}) \rightarrow \mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}) \rightarrow 0$, on obtient une suite exacte de E -espaces vectoriels :

$$(198) \quad 0 \rightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^0(\mathcal{D}(x^{h_1-h_2})) \rightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^0(\mathcal{D}) \rightarrow \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), \mathcal{D}(x^{h_1})) \\ \rightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{D}(x^{h_1-h_2})) \rightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{D}).$$

La suite exacte longue de cohomologie appliquée à $0 \rightarrow \mathcal{D}(x^{h_1-h_2}) \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/(t^{h_1-h_2}) \rightarrow 0$ donne aussi une suite exacte de E -espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^0(\mathcal{D}(x^{h_1-h_2})) \longrightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^0(\mathcal{D}) \longrightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^0(\mathcal{D}/(t^{h_1-h_2})) \\ \longrightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{D}(x^{h_1-h_2})) \longrightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{D})$$

d'où on déduit avec (198) l'égalité :

$$(199) \quad \dim_E \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), \mathcal{D}(x^{h_1})) = \dim_E H_{(\varphi, \Gamma)}^0(\mathcal{D}/(t^{h_1-h_2})).$$

En outre, en appliquant $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), -)$ à la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{D}(x^{h_1}) \rightarrow \mathcal{D}(x^{h_2}) \rightarrow \mathcal{D}(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}) \rightarrow 0$, on obtient une injection :

$$(200) \quad \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), \mathcal{D}(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2})) \hookrightarrow \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), \mathcal{D}(x^{h_1})).$$

Comme $\text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), \mathcal{D}(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2})) \xrightarrow{\sim} H_{(\varphi, \Gamma)}^0(\mathcal{D}/(t^{h_1-h_2}))$, on déduit de (200) et (199) un isomorphisme naturel :

$$(201) \quad H_{(\varphi, \Gamma)}^0(\mathcal{D}/(t^{h_1-h_2})) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), \mathcal{D}(x^{h_1})).$$

En combinant (201) avec le Lemme 5.1.1 appliqué à $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(x^{h_1-h_2})$, et en notant $W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D})$ le B_{dR}^+ -module associé à \mathcal{D} , on obtient un isomorphisme naturel :

$$H^0(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D})/(t^{h_1-h_2})) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), \mathcal{D}(x^{h_1})).$$

Utilisant les isomorphismes naturels :

$$(202) \quad D_L^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)} \simeq H^0(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D})) \xrightarrow{\sim} H^0(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\text{dR}}^+(\mathcal{D})/(t^{h_1-h_2}))$$

(procéder comme en (195) pour l'isomorphisme de droite), on obtient finalement un isomorphisme naturel :

$$(203) \quad \iota : \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), \mathcal{D}(x^{h_1})) \xrightarrow{\sim} D_L^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}.$$

Montrons qu'il satisfait la propriété du (ii) de la proposition. Soit $F \subseteq D_L^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}$ une E -droite et \mathcal{D}_2 le (φ, Γ) -module associé en (i), on doit donc montrer $\iota(E[\mathcal{D}_2]) = F$ (avec une notation évidente). On a un diagramme commutatif :

$$(204) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}(x^{h_1}) & \longrightarrow & \mathcal{D}_2 & \longrightarrow & \mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & j \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{D}(x^{h_1}) & \longrightarrow & \mathcal{D}(x^{h_2}) & \longrightarrow & \mathcal{D}(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui, combiné avec la suite exacte :

$$(205) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{R}_E(x^{h_1}) \longrightarrow \mathcal{R}_E(x^{h_2}) \longrightarrow \mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}) \longrightarrow 0$$

induit un diagramme commutatif (en notant \mathcal{R} au lieu de \mathcal{R}_E) :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}^1\left(\frac{\mathcal{R}(x^{h_2})}{(t^{h_1-h_2})}, \mathcal{D}(x^{h_1})\right) & \xlongequal{\quad} & \text{Ext}^1\left(\frac{\mathcal{R}(x^{h_2})}{(t^{h_1-h_2})}, \mathcal{D}(x^{h_1})\right) \\ \delta_1 \nearrow & & \delta_2 \nearrow \\ \text{Hom}\left(\frac{\mathcal{R}(x^{h_2})}{(t^{h_1-h_2})}, \frac{\mathcal{R}(x^{h_2})}{(t^{h_1-h_2})}\right) & \xrightarrow{j_2} & \text{Hom}\left(\frac{\mathcal{R}(x^{h_2})}{(t^{h_1-h_2})}, \frac{\mathcal{D}(x^{h_2})}{(t^{h_1-h_2})}\right) \\ \downarrow v_1 & & \downarrow v_2 \\ \text{Ext}^1(\mathcal{R}(x^{h_2}), \mathcal{D}(x^{h_1})) & \xlongequal{\quad} & \text{Ext}^1(\mathcal{R}(x^{h_2}), \mathcal{D}(x^{h_1})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}\left(\mathcal{R}(x^{h_2}), \frac{\mathcal{R}(x^{h_2})}{(t^{h_1-h_2})}\right) & \xrightarrow{j_1} & \text{Hom}\left(\mathcal{R}(x^{h_2}), \frac{\mathcal{D}(x^{h_2})}{(t^{h_1-h_2})}\right) \end{array}$$

(par exemple, la face tout à gauche est induite par la suite exacte en haut de (204) et la suite exacte (205)). Les morphismes v_1, v_2 sont clairement des isomorphismes. On a $\text{im}(\delta_1) = E[\mathcal{D}_2]$ donc $\text{im}(\delta_2 \circ j_2) = E[\mathcal{D}_2]$ et $\text{im}(\delta_2 \circ v_2^{-1} \circ j_1) = \text{im}(\delta_2 \circ v_2^{-1} \circ j_1 \circ v_1) = E[\mathcal{D}_2]$. Soit $W_{\text{dR}}^+(t^{-h_2}\mathcal{D}_2)$ le B_{dR}^+ -module associée à $t^{-h_2}\mathcal{D}_2$, par le Lemme 5.1.1 appliqué avec \mathcal{D}_2 et $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(x^{h_1})$, l'isomorphisme $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}(x^{h_1}) \simeq \mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2})$

(première suite exacte en (204)) et (187), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)} \left(\mathcal{R}_E(x^{h_2}), \frac{\mathcal{R}_E(x^{h_2})}{(t^{h_1-h_2})} \right) & \xrightarrow{j_1} & \mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)} \left(\mathcal{R}_E(x^{h_2}), \frac{\mathcal{D}(x^{h_2})}{(t^{h_1-h_2})} \right) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
H^0 \left(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), \frac{W_{\mathrm{dR}}^+(t^{-h_2}\mathcal{D}_2)}{t^{h_1-h_2}W_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{D})} \right) & \longrightarrow & H^0 \left(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), \frac{W_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{D})}{(t^{h_1-h_2})} \right) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
(\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(t^{-h_2}\mathcal{D}_2))^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)} & \longrightarrow & D_L^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}
\end{array}$$

où les applications horizontales sont induites par j , la commutativité du carré du haut vient de la functorialité de (187), où $D_{\mathrm{dR}}(t^{-h_2}\mathcal{D}_2)$ est le module filtré sur L associé au (φ, Γ) -module de de Rham $t^{-h_2}\mathcal{D}_2$, l'isomorphisme du bas à droite est celui en (202) et en remarquant que (202) induit des isomorphismes (en procédant comme pour (195)) :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Fil}^0 D_{\mathrm{dR}}(t^{-h_2}\mathcal{D}_2))^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)} &\simeq H^0(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\mathrm{dR}}^+(t^{-h_2}\mathcal{D}_2)) \\
&\xrightarrow{\sim} H^0\left(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), \frac{W_{\mathrm{dR}}^+(t^{-h_2}\mathcal{D}_2)}{t^{h_1-h_2}W_{\mathrm{dR}}^+(\mathcal{D})}\right).
\end{aligned}$$

L'image du morphisme horizontal en bas est $F \subseteq D_L^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}$. De plus la composée verticale à droite est égale à $\iota \circ \delta_2 \circ v_2^{-1}$ par la construction de ι . Comme $\mathrm{im}(\delta_2 \circ v_2^{-1} \circ j_1) = E[\mathcal{D}_2]$, on obtient bien $\iota(E[\mathcal{D}_2]) = F$, ce qui termine la preuve de (ii). \square

Remarque 5.1.3. — Soit $\delta : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow E^\times$ un caractère localement constant, il résulte facilement de [47, Th. 4.3 & Prop. 4.4] que $\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}) \simeq \mathcal{R}_E(x^{h_2}\delta)/(t^{h_1-h_2})$ (on laisse cela en exercice au lecteur). En tordant les extensions par $\mathcal{R}_E(\delta)$, on en déduit un isomorphisme $\mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), T) \simeq \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), T(\delta))$ pour tout (φ, Γ) -module T . Par (192) on obtient donc un isomorphisme naturel pour tout δ localement constant :

$$\mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{h_2})/(t^{h_1-h_2}), \mathcal{D}(x^{h_1})(\delta)) \xrightarrow{\sim} D_L^{\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}.$$

Si V est une représentation potentiellement semi-stable de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sur E qui devient semi-stable en restriction à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)$, rappelons qu'on lui associe le module de Deligne-Fontaine $D = (B_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)}$ muni des opérateurs φ, N agissant sur B_{st} et de l'action résiduelle de $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)$, et que $D_L \xrightarrow{\sim} (B_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)}$ est muni de la filtration $\mathrm{Fil} D_L$ (décroissante, exhaustive, séparée) induite par celle sur B_{dR} .

5.2. Nullité de certaines extensions. — On démontre la nullité d'un certain Ext_G^1 (Théorème 5.2.5), ce qui lorsque $G = \mathrm{GL}_n$ implique la Conjecture 3.3.1 de [10] pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$. Ce résultat sera utilisé dans le cas particulier cristallin de la Conjecture 5.3.1, cf. le (ii) du Théorème 5.4.4.

On conserve les notations des §§ 2.1, 3.1 et on rappelle que w_0 est l'élément de longueur maximale dans W . On fixe une racine simple $\alpha \in S$, un poids $\lambda \in X(T)$ dominant par rapport à B^- et un caractère lisse $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow E^\times$. On note W^α le groupe de Weyl de L_{Q_α} , c'est-à-dire le sous-groupe de W engendré par les réflexions simples différentes de s_α , et w_0^α l'élément de longueur maximale de W^α . Si π, π' sont deux représentations localement analytiques admissibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E , on note $\text{Ext}_G^i(\pi, \pi') \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Ext}_{D(G(\mathbb{Q}_p), E)}^i(\pi'^\vee, \pi^\vee)$ pour $i \geq 0$ où $\text{Ext}_{D(G(\mathbb{Q}_p), E)}^i$ est dans la catégorie des $D(G(\mathbb{Q}_p), E)$ -modules à gauche (abstrait). Lorsque $i = 1$ (resp. $i = 0$), cela coïncide avec le $\text{Ext}_G^1(\pi, \pi')$ comme à la fin du § 1 (resp. avec les homomorphismes continus $G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants de π dans π'), cf. [60, Th. 6.3] et [10, Lem. 2.1.1].

On commence par plusieurs résultats préliminaires. Par le Lemme 3.7.5, le $U(\mathfrak{g})$ -module $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda$ admet en quotient une unique extension non scindée $L^-(s_\alpha \cdot \lambda) - L^-(\lambda)$. Appliquant le foncteur exact contravariant $\mathcal{F}_{B^-}^G(-, \chi)$ et utilisant [12, Cor. 2.5 & Cor. 2.7], on en déduit que la série principale $(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(-\lambda) \otimes \chi)^{\text{an}} = \mathcal{F}_{B^-}^G(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda, \chi)$ admet en sous-représentation une unique extension non scindée :

$$(206) \quad \mathcal{F}_{B^-}^G(L^-(\lambda), \chi) - \mathcal{F}_{B^-}^G(L^-(s_\alpha \cdot \lambda), \chi)$$

où $\mathcal{F}_{B^-}^G(L^-(\lambda), \chi) = L(-\lambda) \otimes_E (\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi)^\infty$ est en sous-objet. Pour $w \in W$, on note pour alléger $C(w \cdot \lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{B^-}^G(L^-(w \cdot \lambda), \chi)$, $I(w \cdot \lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(-w \cdot \lambda) \otimes \chi)^{\text{an}} = \mathcal{F}_{B^-}^G(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} w \cdot \lambda, \chi)$ (oubliant dans la notation le caractère χ qui ne joue aucun rôle).

Proposition 5.2.1. — *Supposons $\text{lg}(w_0^\alpha) \geq 1$, on a une suite exacte de représentations localement analytiques admissibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E :*

$$(207) \quad 0 \longrightarrow X \longrightarrow I(\lambda) \xrightarrow{d^0} \bigoplus_{\substack{w \in W^\alpha \\ \text{lg}(w)=1}} I(w \cdot \lambda) \xrightarrow{d^1} \bigoplus_{\substack{w \in W^\alpha \\ \text{lg}(w)=2}} I(w \cdot \lambda) \\ \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^{\text{lg}(w_0^\alpha)-1}} I(w_0^\alpha \cdot \lambda) \longrightarrow 0$$

où la représentation X est de la forme $C(\lambda) - C(s_\alpha \cdot \lambda) - Y$ avec $C(\lambda) - C(s_\alpha \cdot \lambda)$ donné par (206) et Y admettant une filtration dont les gradués sont $C(w' \cdot \lambda)$ pour des $w' \in W$ tels que $\text{lg}(w') \geq 3$.

Démonstration. — Soit \mathfrak{q}_α^- (resp. \mathfrak{l}_{Q_α}) l'algèbre de Lie de $Q_\alpha^-(\mathbb{Q}_p)$ (resp. $L_{Q_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$). En appliquant le foncteur exact $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_\alpha^-)} (-)$ à la résolution BGG pour \mathfrak{l}_{Q_α} ([41,

§ 6.1]) :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow U(\mathfrak{l}_{Q_\alpha}) \otimes_{U(\mathfrak{l}_{Q_\alpha} \cap \mathfrak{b}^-)} w_0^\alpha \cdot \lambda \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{w \in W^\alpha \\ \lg(w)=1}} U(\mathfrak{l}_{Q_\alpha}) \otimes_{U(\mathfrak{l}_{Q_\alpha} \cap \mathfrak{b}^-)} w \cdot \lambda \\ \longrightarrow U(\mathfrak{l}_{Q_\alpha}) \otimes_{U(\mathfrak{l}_{Q_\alpha} \cap \mathfrak{b}^-)} \lambda \longrightarrow L^-(\lambda)_{Q_\alpha} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

on obtient la suite exacte de $U(\mathfrak{g})$ -modules :

$$(208) \quad 0 \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} w_0^\alpha \cdot \lambda \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{\substack{w \in W^\alpha \\ \lg(w)=1}} U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} w \cdot \lambda \\ \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda \longrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_\alpha^-)} L^-(\lambda)_{Q_\alpha} \longrightarrow 0,$$

puis en appliquant le foncteur exact contravariant $\mathcal{F}_{B^-}^G(-, \chi)$ à (208), on obtient (207) avec $X = \mathcal{F}_{B^-}^G(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_\alpha^-)} L^-(\lambda)_{Q_\alpha}, \chi)$.

Montrons l'assertion sur X . Comme le constituant $L^-(s_\alpha \cdot \lambda)$ de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda$ n'apparaît dans aucun $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} w \cdot \lambda$ lorsque $w \in W^\alpha$, $\lg(w) = 1$ (par exemple par [41, § 5.2]), on déduit du Lemme 3.7.5 que le quotient $L^-(s_\alpha \cdot \lambda) - L^-(\lambda)$ de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda$ est également quotient de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_\alpha^-)} L^-(\lambda)_{Q_\alpha}$. Comme $L(w \cdot \lambda)$ n'est pas dans la catégorie $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}_\alpha^-}$ lorsque $w \in W^\alpha$, $\lg(w) = 1$, on déduit que $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_\alpha^-)} L^-(\lambda)_{Q_\alpha} \in \mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}_\alpha^-}$ est de la forme $Z - L^-(s_\alpha \cdot \lambda) - L^-(\lambda)$ où les constituants de Z sont des $L^-(w' \cdot \lambda)$ pour $w' \in W$, $\lg(w') \geq 2$. Lorsque $w' \in W^\alpha$, le constituant $L^-(w' \cdot \lambda)$ n'est pas dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}_\alpha^-}$ (car $w' \cdot \lambda$ n'est pas dominant par rapport à $L_{Q_\alpha} \cap B^-$), et lorsque $w' = s_\beta s_\alpha \cdot \lambda$ pour $\beta \in S \setminus \{\alpha\}$, $L^-(w' \cdot \lambda) = L^-(s_\beta \cdot (s_\alpha \cdot \lambda))$ n'est pas non plus dans $\mathcal{O}_{\text{alg}}^{\mathfrak{q}_\alpha^-}$ (car $s_\alpha \cdot \lambda$ est dominant par rapport à $L_{Q_\alpha} \cap B^-$, donc $s_\beta \cdot (s_\alpha \cdot \lambda)$ ne peut plus l'être). Donc les seuls constituants $L^-(w' \cdot \lambda)$ pour $w' \in W$, $\lg(w') = 2$ qui peuvent apparaître dans Z sont les $L^-(s_\alpha s_\beta \cdot \lambda)$ pour $\beta \in S \setminus \{\alpha\}$. Mais par [41, 8.3(a)], le constituant $L^-(s_\alpha s_\beta \cdot \lambda)$ apparaît avec multiplicité 1 dans $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda$, donc est nécessairement dans l'image de l'injection $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} s_\beta \cdot \lambda \hookrightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda$ (rappelons qu'il apparaît aussi dans $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} s_\beta \cdot \lambda$), et par (208) ne peut donc plus apparaître dans le quotient $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_\alpha^-)} L^-(\lambda)_{Q_\alpha}$ de $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^-)} \lambda$. Appliquant $\mathcal{F}_{B^-}^G(-, \chi)$, on en déduit avec (206) que $X = \mathcal{F}_{B^-}^G(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{q}_\alpha^-)} L^-(\lambda)_{Q_\alpha}, \chi)$ a bien la forme voulue. \square

On fixe π une représentation localement algébrique admissible de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E , c'est-à-dire le produit tensoriel (sur E) d'une représentation algébrique de dimension finie de $G(\mathbb{Q}_p)$ par une représentation lisse admissible de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Lemme 5.2.2. — *Pour $w \in W$ et $i \in \{0, \dots, \lg(w_0) - 1\}$ on a $\text{Ext}_G^i(I(w \cdot \lambda), \pi) = 0$.*

Démonstration. — C'est un cas particulier de [64, (4.17) & Rem. 4.4] avec l'égalité $\dim(G(\mathbb{Q}_p)) - \dim(B^-(\mathbb{Q}_p)) = \lg(w_0)$. \square

Lemme 5.2.3. — Pour $w \in W$ et $i \in \{0, \dots, \lg(w) - 1\}$ on a $\text{Ext}_G^i(C(w \cdot \lambda), \pi) = 0$.

Démonstration. — Il n'y a rien à montrer si $\lg(w) = 0$. Pour $j \in \{1, \dots, \lg(w_0)\}$ considérons l'hypothèse (de récurrence) $\text{HR}(j)$: l'énoncé du lemme est vrai lorsque $\lg(w) \geq j$. Comme $C(w_0 \cdot \lambda) = I(w_0 \cdot \lambda)$, le Lemme 5.2.2 implique $\text{HR}(\lg(w_0))$. Soit $j \in \{2, \dots, \lg(w_0)\}$ et montrons que $\text{HR}(j)$ implique $\text{HR}(j - 1)$. Soit $w \in W$ tel que $\lg(w) = j - 1$ (il suffit de considérer ce cas), il résulte de [41, § 5.2] et de l'exactitude du foncteur $\mathcal{F}_{B^-}^G(-, \chi)$ que l'on a une suite exacte de représentations localement analytiques admissibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E :

$$0 \longrightarrow C(w \cdot \lambda) \longrightarrow I(w \cdot \lambda) \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

où X admet une filtration dont les gradués sont les $C(w' \cdot \lambda)$ pour $w' \in W$ tel que $\lg(w') > \lg(w) = j - 1$, i.e. $\lg(w') \geq j$. On en déduit une suite exacte de E -espaces vectoriels pour tout $i \geq 0$:

$$\text{Ext}_G^i(I(w \cdot \lambda), \pi) \longrightarrow \text{Ext}_G^i(C(w \cdot \lambda), \pi) \longrightarrow \text{Ext}_G^{i+1}(X, \pi).$$

Pour $i \in \{0, \dots, j - 2\}$, on a $\text{Ext}_G^i(I(w \cdot \lambda), \pi) = 0$ par le Lemme 5.2.2 et $\text{Ext}_G^{i+1}(X, \pi) = 0$ par $\text{HR}(j)$ et un dévissage évident. On en déduit $\text{Ext}_G^i(C(w \cdot \lambda), \pi) = 0$ ce qui montre $\text{HR}(j - 1)$ et achève la preuve. \square

Lemme 5.2.4. — Supposons $1 \leq \lg(w_0^\alpha) \leq \lg(w_0) - 2$. Pour $j \in \{0, \dots, \lg(w_0^\alpha) - 1\}$ et $i \in \{0, \dots, j + 2\}$ on a $\text{Ext}_G^i(\text{im}(d^j), \pi) = 0$ où d^j est le morphisme dans la Proposition 5.2.1.

Démonstration. — On fait une récurrence descendante sur j . Par le Lemme 5.2.2 l'énoncé est vrai lorsque $j = \lg(w_0^\alpha) - 1$ car $\text{im}(d^{\lg(w_0^\alpha)-1}) = I(w_0^\alpha \cdot \lambda)$ et $j + 2 = \lg(w_0^\alpha) + 1 < \lg(w_0)$. Supposons l'énoncé vrai pour $j \in \{1, \dots, \lg(w_0^\alpha) - 1\}$ (en supposant $2 \leq \lg(w_0^\alpha)$ sinon il ne reste rien à montrer) et considérons la suite exacte de représentations localement analytiques admissibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E issue de (207) :

$$0 \longrightarrow \text{im}(d^{j-1}) \longrightarrow \bigoplus_{\substack{w \in W^\alpha \\ \lg(w)=j}} I(w \cdot \lambda) \longrightarrow \text{im}(d^j) \longrightarrow 0.$$

On en déduit une suite exacte courte de E -espaces vectoriels pour tout $i \geq 0$:

$$\text{Ext}_G^i\left(\bigoplus_{\substack{w \in W^\alpha \\ \lg(w)=j}} I(w \cdot \lambda), \pi\right) \longrightarrow \text{Ext}_G^i(\text{im}(d^{j-1}), \pi) \longrightarrow \text{Ext}_G^{i+1}(\text{im}(d^j), \pi).$$

Pour $i \in \{0, \dots, j + 1\}$, le Ext_G^i de gauche est nul par le Lemme 5.2.2 (car $j + 1 \leq \lg(w_0^\alpha) < \lg(w_0)$) et $\text{Ext}_G^{i+1}(\text{im}(d^j), \pi) = 0$ par l'hypothèse de récurrence au cran j . On en déduit $\text{Ext}_G^i(\text{im}(d^{j-1}), \pi) = 0$ ce qui achève la preuve. \square

On peut maintenant montrer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 5.2.5. — Soit π une représentation localement algébrique admissible de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E , c'est-à-dire le produit tensoriel d'une représentation algébrique de dimension finie de $G(\mathbb{Q}_p)$ par une représentation lisse admissible de $G(\mathbb{Q}_p)$, et supposons $1 \leq \lg(w_0^\alpha) \leq \lg(w_0) - 2$. Alors on a :

$$\mathrm{Ext}_G^1(\mathcal{F}_{B^-}^G(L^-(\lambda), \chi) - \mathcal{F}_{B^-}^G(L^-(s_\alpha \cdot \lambda), \chi), \pi) = 0$$

où la représentation de gauche est celle en (206).

Démonstration. — Considérons la suite exacte de représentations localement analytiques admissibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E issue de (207) :

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow I(\lambda) \longrightarrow \mathrm{im}(d^0) \longrightarrow 0.$$

On en déduit une suite exacte de E -espaces vectoriels :

$$\mathrm{Ext}_G^1(I(\lambda), \pi) \longrightarrow \mathrm{Ext}_G^1(X, \pi) \longrightarrow \mathrm{Ext}_G^2(\mathrm{im}(d^0), \pi).$$

Par le Lemme 5.2.2 on a $\mathrm{Ext}_G^1(I(\lambda), \pi) = 0$ et par le Lemme 5.2.4 appliqué pour $j = 0$, $i = 2$ on a $\mathrm{Ext}_G^2(\mathrm{im}(d^0), \pi) = 0$. On en déduit $\mathrm{Ext}_G^1(X, \pi) = 0$. Vue la forme de X dans la Proposition 5.2.1, on a aussi une suite exacte de E -espaces vectoriels :

$$\mathrm{Ext}_G^1(X, \pi) \longrightarrow \mathrm{Ext}_G^1(C(\lambda) - C(s_\alpha \cdot \lambda), \pi) \longrightarrow \mathrm{Ext}_G^2(Y, \pi).$$

Vue la forme de Y (cf. Proposition 5.2.1), on a $\mathrm{Ext}_G^2(Y, \pi) = 0$ par le Lemme 5.2.3 et un dévissage évident. Comme $\mathrm{Ext}_G^1(X, \pi) = 0$, on en déduit le résultat. \square

Corollaire 5.2.6. — Supposons $1 \leq \lg(w_0^\alpha) \leq \lg(w_0) - 2$ et la représentation $\mathcal{F}_{B^-}^G(L^-(\lambda), \chi)$ irréductible, alors on a :

$$\dim_E \mathrm{Ext}_G^1(\mathcal{F}_{B^-}^G(L^-(s_\alpha \cdot \lambda), \chi), \mathcal{F}_{B^-}^G(L^-(\lambda), \chi)) = 1.$$

En particulier [10, Conj. 3.3.1] est vraie pour $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$.

Démonstration. — On a une suite exacte de E -espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(C(\lambda) - C(s_\alpha \cdot \lambda), C(\lambda)) &\rightarrow \mathrm{Hom}_G(C(\lambda), C(\lambda)) \rightarrow \mathrm{Ext}_G^1(C(s_\alpha \cdot \lambda), C(\lambda)) \\ &\rightarrow \mathrm{Ext}_G^1(C(\lambda) - C(s_\alpha \cdot \lambda), C(\lambda)) \end{aligned}$$

où le terme tout à gauche est nul car (206) est non scindé et $C(\lambda)$ est irréductible, et celui tout à droite est nul par le Théorème 5.2.5 appliqué avec $\pi = C(\lambda)$. On en déduit la première assertion. La deuxième suit lorsque $n \geq 3$ (pour avoir $1 \leq \lg(w_0^\alpha) \leq \lg(w_0) - 2$), mais lorsque $n = 2$ elle est montrée dans [10, Lem. 3.1.1]. \square

Remarque 5.2.7. — (i) Il est possible que l'hypothèse d'irréductibilité de $\mathcal{F}_{B^-}^G(L^-(\lambda), \chi)$ dans le Corollaire 5.2.6 soit en fait superflue.

(ii) Rappelons que la raison pour laquelle cette preuve de [10, Conj. 3.3.1] ne s'étend pas à $\mathrm{GL}_n(L)$ et des extensions localement σ -analytiques (pour $\sigma : L \hookrightarrow E$) est que les résultats de [61, § 6] (en particulier [61, Prop. 6.5(i)]) utilisés de manière

essentielle dans la preuve de [64, (4.17)], et donc dans celle du Lemme 5.2.2, ne sont montrés que dans le cadre localement \mathbb{Q}_p -analytique.

5.3. Foncteurs F_α et compatibilité local-global conjecturale. — Après un rappel du cadre global, on donne une version plus précise de la conjecture principale de [10] utilisant les foncteurs F_α .

On conserve les notations du § 5.1. On rappelle d'abord le cadre global de [14, § 6.1] (cf. aussi [10, § 6.1]) auquel on renvoie le lecteur pour plus de détails. On fixe une fois pour toutes des plongements $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ et $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ que l'on utilise de manière tacite. On fixe un corps de nombres totalement réel F^+ , une extension quadratique totalement imaginaire F de F^+ et un groupe unitaire G/F^+ attaché à F/F^+ comme dans [2, § 6.2.2] tel que $G \times_{F^+} F \simeq \mathrm{GL}_n$ ($n \geq 2$) et $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ est compact. Pour une place finie v de F^+ totalement décomposée dans F et \tilde{v} une place de F divisant v , on a des isomorphismes $i_{G,\tilde{v}} : G(F_v^+) \xrightarrow{\sim} G(F_{\tilde{v}}) \simeq \mathrm{GL}_n(F_{\tilde{v}})$. On note Σ_p les places de F^+ divisant p et on suppose que chaque place dans Σ_p est totalement décomposée dans F . Pour toute extension finie E de \mathbb{Q}_p et tout sous-groupe ouvert compact $U^p = \prod_{v \nmid p} U_v$ de $G(\mathbb{A}_{F^+}^{p,\infty})$ (où $\mathbb{A}_{F^+}^{p,\infty}$ désigne les adèles finis hors p de F^+) on pose :

$$(209) \quad \widehat{S}(U^p, E) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f : G(F^+) \backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty) / U^p \longrightarrow E, f \text{ continue} \right\}$$

qui est un espace de Banach p -adique sur E de boule unité :

$$\widehat{S}(U^p, \mathcal{O}_E) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f : G(F^+) \backslash G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty) / U^p \longrightarrow \mathcal{O}_E, f \text{ continue} \right\}.$$

On munit $\widehat{S}(U^p, E)$ de l'action continue de $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$ donnée par $(g'f)(g) = f(gg')$ (pour $f \in \widehat{S}(U^p, E)$, $g' \in G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$, $g \in G(\mathbb{A}_{F^+}^\infty)$), qui préserve la boule unité et fait de $\widehat{S}(U^p, E)$ un Banach unitaire admissible.

Soit $D(U^p)$ les places finies v de F^+ telles que $v \nmid p$, v est totalement décomposé dans F et U_v est un sous-groupe ouvert compact maximal de $G(F_v^+)$. On note $\mathbb{T}(U^p) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_E[T_{\tilde{v}}^{(j)}]$ la \mathcal{O}_E -algèbre polynomiale commutative engendrée par des variables formelles $T_{\tilde{v}}^{(j)}$ où $j \in \{1, \dots, n\}$ et \tilde{v} est une place de F au-dessus d'une place v de $D(U^p)$. La \mathcal{O}_E -algèbre $\mathbb{T}(U^p)$ agit sur $\widehat{S}(U^p, E)$ et $\widehat{S}(U^p, \mathcal{O}_E)$ en faisant agir $T_{\tilde{v}}^{(j)}$ par l'opérateur associé à la double classe :

$$(210) \quad T_{\tilde{v}}^{(j)} \stackrel{\text{déf}}{=} \left[U_v g_v i_{G,\tilde{v}}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n-j} & 0 \\ 0 & \varpi_{\tilde{v}} \mathbf{1}_j \end{pmatrix} \right) g_v^{-1} U_v \right]$$

où $\varpi_{\tilde{v}}$ est une uniformisante de $F_{\tilde{v}}$ et $g_v \in G(F_v^+)$ est tel que $i_{G,\tilde{v}}(g_v^{-1} U_v g_v) = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{F_{\tilde{v}}})$. Cette action commute avec celle de $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$. On note $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{alg}} \subset \widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}$ les sous-espaces de $\widehat{S}(U^p, E)$ des vecteurs respectivement localement algébriques et localement analytiques pour l'action de $(\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{Q}_p) = G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$. Ils sont stables par $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$ et $\mathbb{T}(U^p)$. Le sous-espace $\widehat{S}(U^p, E)^{\mathrm{an}}$

se décrit comme (209) en remplaçant “continue” par “localement analytique” et on a un isomorphisme $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p) \times \mathbb{T}(U^p)$ -équivariant (cf. [14, (6.2)]) :

$$(211) \quad \widehat{S}(U^p, E)^{\text{alg}} \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_p \simeq \bigoplus_{\pi} \left((\pi^{\infty, p})^{U^p} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} (\pi_p \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} W_p) \right)^{\oplus m(\pi)}$$

où $\pi \simeq \pi_{\infty} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \pi^{\infty}$ parcourt les représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_{F^+})$, W_p est une représentation algébrique irréductible de $(\text{Res}_{F^+/\mathbb{Q}} G)(\mathbb{Q}_p)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ déterminée par π_{∞} (voir [2, § 6.2.3] et [14, § 6.1]), $m(\pi) \geq 1$ est une multiplicité, et où $T_{\tilde{v}}^{(j)} \in \mathbb{T}(U^p)$ agit sur $(\pi^{\infty, p})^{U^p}$ par la double classe (210).

On fixe désormais une place \wp de F^+ au-dessus de p telle que $F_{\wp}^+ = \mathbb{Q}_p$ et une place $\tilde{\wp}$ de F divisant \wp (donc $\mathbb{Q}_p = F_{\wp}^+ \simeq F_{\tilde{\wp}}$ et on a un isomorphisme $i_{G, \tilde{\wp}} : G(F_{\tilde{\wp}}^+) \xrightarrow{\sim} \text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$). On fixe également une représentation \mathbb{Q}_p -algébrique irréductible W^{\wp} de $\prod_{v|p, v \neq \wp} G(F_v^+)$ sur E , que l'on voit comme représentation de $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p)$ via $G(F^+ \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p) \rightarrow \prod_{v|p, v \neq \wp} G(F_v^+)$, ainsi qu'un sous-groupe ouvert compact $U_p^{\wp} = \prod_{v|p, v \neq \wp} U_v$ de $\prod_{v|p, v \neq \wp} G(F_v^+)$. On pose $U^{\wp} \stackrel{\text{déf}}{=} U^p U_p^{\wp}$ et :

$$\widehat{S}(U^{\wp}, W^{\wp}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\widehat{S}(U^p, E) \otimes_E W^{\wp} \right)_{U_p^{\wp}}.$$

Muni de l'action naturelle de $G(F_{\wp}^+)$ induite par celle sur $\widehat{S}(U^p, E)$, l'espace $\widehat{S}(U^{\wp}, W^{\wp})$ est encore un Banach unitaire admissible. On le munit aussi de l'action de $\mathbb{T}(U^p)$ induite par celle sur $\widehat{S}(U^p, E)$, qui commute à $G(F_{\wp}^+)$, et on définit les sous-espaces $\widehat{S}(U^{\wp}, W^{\wp})^{\text{alg}} \subset \widehat{S}(U^{\wp}, W^{\wp})^{\text{an}}$ (avec des notations évidentes) qui sont stables par $G(F_{\wp}^+) \times \mathbb{T}(U^p)$. On peut vérifier que :

$$(212) \quad \widehat{S}(U^{\wp}, W^{\wp}) = \left\{ f : G(F^+) \setminus G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty})/U^p \longrightarrow W^{\wp}, \quad f \text{ continue et} \right. \\ \left. f(g g_p^{\wp}) = (g_p^{\wp})^{-1}(f(g)) \text{ pour tout } g \in G(\mathbb{A}_{F^+}^{\infty}) \text{ et tout } g_p^{\wp} \in U_p^{\wp} \right\}$$

où l'action de $G(F_{\wp}^+)$ est par translation à droite sur les fonctions et celle de $\mathbb{T}(U^p)$ comme en (210) ($\widehat{S}(U^{\wp}, W^{\wp})^{\text{an}}$ s'identifie alors au sous-espace de (212) des fonctions f localement analytiques), et que :

$$(213) \quad \widehat{S}(U^{\wp}, W^{\wp})^{\text{alg}} \otimes_E \overline{\mathbb{Q}}_p \simeq \bigoplus_{\pi} \left((\pi^{\infty, p})^{U^p} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} (\otimes_{v|p, v \neq \wp} \pi_v^{U_v}) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} (\pi_{\wp} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} W_{\wp}) \right)^{m(\pi)}$$

où $\pi \simeq \pi_{\infty} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \pi^{\infty}$ parcourt les représentations automorphes de $G(\mathbb{A}_{F^+})$ telles que W_p en (211) est de la forme $W_p \simeq W_{\wp} \otimes_E (W^{\wp})^{\vee}$ en notant $(W^{\wp})^{\vee}$ le dual de W^{\wp} et W_{\wp} une représentation algébrique de $G(F_{\wp}^+)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On voit dans la suite $\widehat{S}(U^{\wp}, W^{\wp})$ et ses sous-représentations comme représentations de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ via $\iota_{G, \tilde{\wp}}$.

Soit $\rho : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{GL}_n(E)$ une représentation continue non ramifiée aux places dans $D(U^p)$. On associe à ρ l'unique idéal maximal \mathfrak{m}_{ρ} de corps résiduel E de

$\mathbb{T}(U^p)[1/p]$ tel que, pour tout $v \in D(U^p)$ et \tilde{v} place de F au-dessus de v , le polynôme caractéristique $\rho(\text{Frob}_{\tilde{v}})$ (où $\text{Frob}_{\tilde{v}}$ est un Frobenius *géométrique* en \tilde{v}) est donné par :

$$(214) \quad X^n + \cdots + (-1)^j (N\tilde{v})^{\frac{j(j-1)}{2}} \theta_\rho(T_{\tilde{v}}^{(j)}) X^{n-j} + \cdots + (-1)^n (N\tilde{v})^{\frac{n(n-1)}{2}} \theta_\rho(T_{\tilde{v}}^{(n)})$$

en notant $N\tilde{v}$ le cardinal du corps résiduel de $F_{\tilde{v}}$ et θ_ρ la composée $\mathbb{T}(U^p)[1/p] \rightarrow \mathbb{T}(U^p)[1/p]/\mathfrak{m}_\rho \xrightarrow{\sim} E$. Lorsque $\widehat{S}(U^\wp, W^\wp)[\mathfrak{m}_\rho]^{\text{alg}} \neq 0$ on sait de plus que $\rho_{\tilde{v}} \stackrel{\text{déf}}{=} \rho|_{\text{Gal}(\overline{F}_{\tilde{v}}/F_{\tilde{v}})}$ est potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate distincts.

On normalise la correspondance de Langlands locale pour $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ de sorte que la représentation $\chi_1 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ du groupe de Weil de \mathbb{Q}_p corresponde (pour des χ_i génériques) à :

$$(215) \quad \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)} \chi_1 | \cdot |^{1-n} \otimes \chi_2 | \cdot |^{2-n} \otimes \cdots \otimes \chi_n \right)^\infty$$

où les χ_i dans l'induite sont vus comme caractères de \mathbb{Q}_p^\times via la normalisation du corps de classe local au § 1 et où (comme dans l'Exemple 2.1.1) B^- est le Borel inférieur.

On fixe un module de Deligne-Fontaine D de rang n sur $L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ (pour une extension finie L de \mathbb{Q}_p , cf. § 5.1). On note W la représentation de Weil-Deligne associée par Fontaine à D (cf. [10, § 2.2]) et l'on suppose que la représentation de Weil sous-jacente à W est absolument semi-simple, i.e. W est F -semi-simple. On note $\pi^\infty(W)$ la représentation lisse admissible de longueur finie de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E correspondant à W par la correspondance de Langlands locale normalisée comme ci-dessus *puis* modifiée comme dans [17, § 4]. La représentation $\pi^\infty(W)$ a un unique constituant irréductible générique qui est en sous-objet, et si $\chi_{\pi^\infty(W)}$ est son caractère central alors $\chi_{\pi^\infty(W)} = \chi_W | \cdot |^{-\frac{n(n-1)}{2}}$ où $\chi_W \stackrel{\text{déf}}{=} \det(W)$.

On fixe également $(h_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ dans \mathbb{Z}^n tel que $h_1 > h_2 > \cdots > h_n$ et on pose $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ avec $\lambda_i \stackrel{\text{déf}}{=} (n-i) - h_i$, de sorte que λ est dominant par rapport à B^- . On rappelle que $L(-\lambda)$ est la représentation algébrique irréductible de GL_n sur E de plus haut poids $-\lambda$ par rapport à B (cf. § 3.1). On dispose donc de la représentation localement algébrique $L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)$. Rappelons que, si $\alpha \in S$ et si l'on a une extension $0 \rightarrow \pi' \rightarrow \pi \rightarrow L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W) \rightarrow 0$ dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p))$ avec $F_\alpha(\pi')(-) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi'), -)$ pour un (φ, Γ) -module sans torsion $D_\alpha(\pi')$, alors par le Théorème 4.1.5 (avec la Remarque 4.2.1) et le Théorème 3.3.1 on a $F_\alpha(\pi)(-) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi), -)$ pour un (φ, Γ) -module $D_\alpha(\pi)$ qui est une extension de $D_\alpha(L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)) \simeq \mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee}) / (t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle})$ par $D_\alpha(\pi')$. On a donc une application E -linéaire :

$$(216) \quad \text{Ext}_{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi', L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)) \longrightarrow \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_\alpha(L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)), D_\alpha(\pi')).$$

Pour toute racine simple $\alpha = e_j - e_{j+1} \in S$ où $j \in \{1, \dots, n-1\}$ on pose :

$$(217) \quad D_\alpha(\lambda, W) \stackrel{\text{déf}}{=} (\wedge_{\mathcal{R}_E}^{n-j} \mathcal{D}) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E((s_\alpha \cdot \lambda) \circ \lambda_{\alpha^\vee}) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(| \cdot |^{n-j+(n-j+1)+\cdots+n-1} \chi_W^{-1})$$

où \mathcal{D} est le (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_E donné par l'équation différentielle p -adique associée à D (cf. § 5.1). Alors $D_\alpha(\lambda, W)$ est, à la torsion localement constante $|\cdot|^{n-j+\dots+n-1}\chi_W^{-1}$ près, le (φ, Γ) -module libre de rang $\binom{n}{j}$ sur \mathcal{R}_E associé par l'équivalence de [4, Th. A] au module de Deligne-Fontaine $\wedge_{L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E}^{n-j} D$ muni de la filtration :

$$\begin{cases} \text{Fil}^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_{j-1}+\lambda_{j+1}+1)}(\wedge_{L \otimes_{\mathbb{Q}_p} E}^{n-j} D_L) & = \wedge_{L \otimes_{\mathbb{Q}_p} E}^{n-j} D_L \\ \text{Fil}^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_{j-1}+\lambda_{j+1}+1)+1}(\wedge_{L \otimes_{\mathbb{Q}_p} E}^{n-j} D_L) & = 0. \end{cases}$$

De plus par (192) (appliqué avec $h_1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_{j-1} + \lambda_{j+1} + 1$, $h_2 = \lambda_1 + \dots + \lambda_{j-1} + \lambda_j$ et $D = \wedge_{L_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} E}^{n-j} D$) avec la Remarque 5.1.3 (appliquée avec $\delta = |\cdot|^{n-j+\dots+n-1}\chi_W^{-1}$), on déduit un isomorphisme naturel :

$$(218) \quad \mathcal{F}_\alpha : \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee})/(t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}), D_\alpha(\lambda, W)) \xrightarrow{\sim} (\wedge_{L \otimes_{\mathbb{Q}_p} E}^{n-j} D_L)^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}.$$

Soient maintenant U^φ , W^φ et $\rho : \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{GL}_n(E)$ comme ci-dessus tels que :

- (i) ρ est absolument irréductible non ramifiée aux places de F au-dessus de $D(U^p)$;
- (ii) $\widehat{S}(U^\varphi, W^\varphi)^{\text{alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \neq 0$ (donc $\rho_{\widehat{\varphi}}$ est potentiellement semi-stable);
- (iii) $\rho_{\widehat{\varphi}}$ a pour poids de Hodge-Tate h_1, \dots, h_n et module de Deligne-Fontaine D

(en fait W^φ est déterminé par ρ). Il résulte alors des normalisations, de (213) et de [20] que l'on a pour tout U^φ , W^φ , ρ vérifiant (i), (ii) et (iii) :

$$(219) \quad \widehat{S}(U^\varphi, W^\varphi)^{\text{alg}}[\mathfrak{m}_\rho] \simeq (L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W))^{\oplus d(U^\varphi, \rho)} \otimes_E \varepsilon^{n-1} \circ \det$$

où $d(U^\varphi, \rho) \geq 1$ est un entier ne dépendant que de U^φ et ρ . La filtration Fil sur $(B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \rho_{\widehat{\varphi}})^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/L)} \simeq D_L \simeq L \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_L^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}$ permet pour $\alpha = e_j - e_{j+1}$ de définir la droite :

$$(220) \quad \text{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_{\widehat{\varphi}}) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Fil}^{-h_{j+1}}(D_L)^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)} \wedge \text{Fil}^{-h_{j+2}}(D_L)^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)} \wedge \dots \wedge \text{Fil}^{-h_n}(D_L)^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}$$

dans $\wedge_E^{n-j}(D_L^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}) \simeq (\wedge_{L \otimes_{\mathbb{Q}_p} E}^{n-j} D_L)^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)}$.

Enfin, si π' , π'' sont des représentations admissibles dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p))$ et si H est un sous- E -espace vectoriel de dimension ≤ 1 du E -espace vectoriel $\text{Ext}_{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi'', \pi')$ des extensions de π'' par π' (dans la catégorie abélienne des représentations admissibles de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$), on note $\llbracket H \rrbracket$ l'unique représentation de $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E sous-jacente à H au sens de Yoneda. Si π_1, \dots, π_m sont admissibles dans $\text{Rep}_E^{\text{an}}(\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p))$ avec π comme sous-représentation commune, on note $\bigoplus_\pi^j \pi_j \stackrel{\text{déf}}{=} \pi_1 \oplus_\pi \pi_2 \oplus_\pi \dots \oplus_\pi \pi_m$.

La conjecture suivante est une version nettement plus précise (et un peu plus générale) de [10, Conj. 6.1.1] lorsque $F_{v_0}^+ = \mathbb{Q}_p$, qu'elle implique (sauf l'unicité de \mathcal{R}^j dans *loc.cit.* dont on ne se préoccupe pas ici).

Conjecture 5.3.1. — Pour toute racine simple $\alpha = e_j - e_{j+1}$ il existe une représentation localement analytique admissible de longueur finie $\pi^\alpha(\lambda, W)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sur E ne dépendant que de λ , W et α et vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $F_\alpha(\pi^\alpha(\lambda, W)) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\lambda, W), -)$ (cf. (217) pour $D_\alpha(\lambda, W)$);

(ii) l'application (216) pour $\pi' = \pi^\alpha(\lambda, W)$ est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha : \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha(\lambda, W), L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)) \\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee}) / (t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}), D_\alpha(\lambda, W)); \end{aligned}$$

(iii) pour U^φ , W^φ , ρ vérifiant (i), (ii), (iii) ci-dessus, on a une injection $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante (cf. (218) pour \mathcal{F}_α , (220) pour $\mathrm{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_{\widehat{\rho}})$ et (219) pour $d(U^\varphi, \rho)$) :

$$\left(\bigoplus_{L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)}^\alpha \llbracket (\mathcal{F}_\alpha \circ \mathcal{E}_\alpha)^{-1}(\mathrm{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_{\widehat{\rho}})) \rrbracket \right)^{\oplus d(U^\varphi, \rho)} \otimes \varepsilon^{n-1} \circ \det \hookrightarrow \widehat{S}(U^\varphi, W^\varphi)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho].$$

Remarque 5.3.2. — (i) Les représentations $\pi^{e_i - e_{i+1}}(-)$ sont notées $\Pi^{n-i}(-)$ dans [10].

(ii) En général il devrait exister plus d'une représentation $\pi^\alpha(\lambda, W)$ satisfaisant toutes les conditions de la Conjecture 5.3.1 (par exemple, si le foncteur F_α annule des constituants en cosocle de $\pi^\alpha(\lambda, W)$, on peut les enlever de $\pi^\alpha(\lambda, W)$), mais il est possible qu'il en existe une maximale pour l'inclusion.

(iii) Si les constituants de $\pi^\infty(W)$ sont des sous-quotients de séries principales, on devrait pouvoir prendre $\pi^\alpha(\lambda, W)$ dans la catégorie $C_{\lambda, \alpha}$ du § 4.1.

(iv) Pour $\lambda = 0$, les auteurs aiment à penser les représentations localement analytiques $\pi^\alpha(W) \stackrel{\mathrm{d}\acute{\mathrm{e}}\mathrm{f}}{=} \pi^\alpha(0, W)$ comme une “correspondance de Langlands locale (conjecturale) pour chaque racine simple α ”.

5.4. Cas partiels ou particuliers. — On énonce et démontre divers cas partiels de la Conjecture 5.3.1, notamment lorsque $\dim_E W = 3$ et $N^2 \neq 0$ sur D .

Commençons par le cas $n = 2$. On dispose alors de la correspondance de Langlands localement analytique $\rho_p \mapsto \pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)$ pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (normalisée de sorte que le caractère central de $\pi^{\mathrm{an}}(\rho_p)$ est $\varepsilon^{-1} \det(\rho_p)$), cf. [25], [27], [26]. Via les résultats de compatibilité local-global sur cette correspondance (cf. [34], [22], [23]), on peut ici remplacer la Conjecture 5.3.1 par la conjecture purement locale suivante (où α est l'unique racine de GL_2 et D , W , h_1, h_2 et λ sont comme au § 5.3).

Conjecture 5.4.1. — Il existe une représentation localement analytique admissible de longueur finie $\pi^\alpha(\lambda, W)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E ne dépendant que de λ , W et vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $F_\alpha(\pi^\alpha(\lambda, W)) \simeq E_\infty \otimes_E \mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\lambda, W), -)$;

(ii) l'application (216) pour $\pi' = \pi^\alpha(\lambda, W)$ est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha : \text{Ext}_{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha(\lambda, W), L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)) \\ \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee})/(t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}), D_\alpha(\lambda, W)); \end{aligned}$$

(iii) pour toute $\rho_p : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}_2(E)$ potentiellement semi-stable de poids de Hodge-Tate h_1, h_2 et module de Deligne-Fontaine D , on a $\pi^{\text{an}}(\rho_p) \simeq [(\mathcal{F}_\alpha \circ \mathcal{E}_\alpha)^{-1}(\text{Fil}^{-h_2}(\rho_p))]$ où $\text{Fil}(\rho_p)$ est la filtration de Hodge sur D_L donnée par ρ_p .

En tenant compte des normalisations, on peut vérifier que, si (i) et (ii) sont vrais, alors (iii) est équivalent à :

$$\begin{aligned} F_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p)) &\simeq E_\infty \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_{\text{rig}}(\rho_p)(\det(\rho_p)^{-1}\varepsilon), -) \\ &\simeq E_\infty \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p), -) \end{aligned}$$

où $\check{\rho}_p \stackrel{\text{déf}}{=} \rho_p^\vee \otimes \varepsilon \simeq \rho_p \otimes \det(\rho_p)^{-1}\varepsilon$ est le dual de Cartier de ρ_p et $D_{\text{rig}}(\rho_p)$, $D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)$ les (φ, Γ) -modules (étales) sur \mathcal{R}_E de (respectivement) ρ_p , $\check{\rho}_p$. Rappelons également que $\pi^{\text{an}}(\rho_p)/(L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W))$ ne dépend que de λ et W par [25, Th. VI.6.43]. Le théorème suivant résume ce que l'on sait montrer de la Conjecture 5.4.1.

Théorème 5.4.2. — (i) La Conjecture 5.4.1 est vraie lorsque W est réductible.
(ii) Si W est irréductible, pour tout ρ_p de poids de Hodge-Tate h_1, h_2 et module de Deligne-Fontaine D on a un morphisme surjectif $\mathcal{R}_E^r \otimes_{\mathcal{R}_E^+} \pi^{\text{an}}(\rho_p)^\vee \rightarrow D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r$ de (ψ, Γ) -modules de Fréchet pour $r \gg 0$. De plus, si le (i) de la Conjecture 5.4.1 est vrai avec $\pi^\alpha(\lambda, W) = \pi^{\text{an}}(\rho_p)/(L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W))$, alors on a $F_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p)) \simeq E_\infty \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p), -)$.

Démonstration. — **Étape 1**

Soit $\rho_p : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}_2(E)$ potentiellement semi-stable de poids de Hodge-Tate h_1, h_2 et module de Deligne-Fontaine D . Pour $r \gg 0$, on a $D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p) = \mathcal{R}_E \otimes_{\mathcal{R}_E^r} D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r$. On montre d'abord (sans hypothèse sur W) que l'on a une surjection $\mathcal{R}_E^r \otimes_{\mathcal{R}_E^+} \pi^{\text{an}}(\rho_p)^\vee \rightarrow D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r$ de (ψ, Γ) -modules de Fréchet quitte éventuellement à augmenter r . La composée (cf. [26, § VI] pour les définitions, en particulier [26, Cor. VI.12 & Cor. VI.13]) :

$$\pi^{\text{an}}(\rho_p)^\vee \hookrightarrow D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r \boxtimes \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\text{res}_{\mathbb{Z}_p}^r} D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r \boxtimes \mathbb{Z}_p \simeq D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r$$

donne un morphisme $\pi^{\text{an}}(\rho_p)^\vee \rightarrow D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r$ de (ψ, Γ) -modules de Fréchet sur \mathcal{R}_E^+ . Soit $\pi(\rho_p)$ le Banach p -adique unitaire associée à ρ_p , ou alternativement par [26, Th. 0.2] le complété unitaire universel de $\pi^{\text{an}}(\rho_p)$, $D(\check{\rho}_p)_0$ le (φ, Γ) -module continu de ρ_p (i.e. sur $\mathcal{E} = \mathcal{O}_E[[X]][[1/X]]^\wedge[[1/p]]$) et $D(\check{\rho}_p)_0^\natural$ le sous- $\mathcal{O}_E[[X]][[1/p]]$ -module de $D(\check{\rho}_p)_0$ stable par ψ et Γ défini dans [24, § II.5]. Alors il résulte de [26, Cor. III.22(ii)] et [26, Prop. III.23] (avec [24, Cor. II.7.2]) que l'image de la composée $\pi(\rho_p)^\vee \hookrightarrow \pi^{\text{an}}(\rho_p)^\vee \rightarrow D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r$ contient $D(\check{\rho}_p)_0^\natural$. Comme $D(\check{\rho}_p)_0^\natural$, vu dans $D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r$, contient une base de $D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r$ sur \mathcal{R}_E^r (ce qui se déduit par extension des scalaires de [24, Cor. II.7.2] et

du fait que $D(\check{\rho}_p)_0^{\natural}$ contient une base de $D(\check{\rho}_p)_0$ sur \mathcal{E} , on en déduit en particulier que l'application obtenue par extension des scalaires $\mathcal{R}_E^r \otimes_{\mathcal{R}_E^+} \pi^{\text{an}}(\rho_p)^\vee \rightarrow D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r$ est surjective (merci à G. Dospinescu pour les références et pour cet argument !).

Étape 2

Supposons W réductible avec $N = 0$ sur D . Supposons d'abord W non scalaire. Alors comme dans [10, § 3.1] la représentation $\pi^\alpha(\lambda, W)$ est la somme directe de deux séries principales localement analytiques distinctes et il résulte facilement du Théorème 3.7.1 et de (l'analogue de) [10, Lem. 3.1.1] avec le (ii) de la Proposition 5.1.2 que les (i) et (ii) de la Conjecture 5.4.1 sont vrais dans ce cas (l'application \mathcal{E}_α est en effet une injection entre E -espaces vectoriels de dimension 2, donc une bijection). Soit ρ_p comme dans l'Étape 1, alors par [48], [49] et ce qui précède, le foncteur $F_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p))$ est représentable par un (φ, Γ) -module libre de rang 2 $D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p))$ extension de deux (φ, Γ) -modules libres de rang 1 (en étendant les scalaires à E_∞). De plus, par l'Étape 1 et la définition du foncteur F_α , on obtient un morphisme surjectif $D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p)) \rightarrow D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)$ de (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}_E , donc un isomorphisme puisque les deux sont des modules libres de rang 2 sur \mathcal{R}_E . Cela achève la preuve du cas W réductible non scalaire avec $N = 0$. Supposons maintenant W scalaire (et $N = 0$), alors les deux séries principales localement analytiques du début sont les mêmes. En prenant pour $\pi^\alpha(\lambda, W)$ deux copies de cette série principale, on obtient de même les (i) et (ii) de la Conjecture 5.4.1, et dans ce cas il n'existe pas de ρ_p comme en (iii).

Étape 3

Supposons maintenant W réductible (non scalaire) avec $N \neq 0$ sur D . Alors à torsion près par un caractère de \mathbb{Q}_p^\times , la représentation $\pi^\alpha(\lambda, W)$ est comme dans [10, Lem. 3.1.2(i)]. Par le Théorème 3.7.1 et le Théorème 4.1.6 (pour $G = \text{GL}_2$) on a que $F_\alpha(\pi^\alpha(\lambda, W))$ est représentable par un (φ, Γ) -module libre de rang 2 $D_\alpha(\pi^\alpha(\lambda, W))$ extension de deux (φ, Γ) -modules libres de rang 1. Pour montrer $D_\alpha(\pi^\alpha(\lambda, W)) \simeq D_\alpha(\lambda, W)$, on voit aisément avec [51, Prop. 2.15] (et [52, Th. 5.11]) qu'il suffit de montrer que cette extension est non scindée. Quitte à tordre encore par un caractère de \mathbb{Q}_p^\times , il existe une représentation ρ_p semi-stable de poids de Hodge-Tate h_1, h_2 et module de Deligne-Fontaine D . De plus il résulte facilement de [10, Lem. 3.1.2(ii)] et sa preuve avec (encore) le Théorème 3.7.1 et le Théorème 4.1.5 que le foncteur F_α appliqué à toute extension *non scindée* dans $\text{Ext}_{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha(\lambda, W), L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W))$, par exemple l'extension donnée par $\pi^{\text{an}}(\rho_p)$ (par [49]), est représentable par un (φ, Γ) -module *libre* de rang 2 qui contient $D_\alpha(\pi^\alpha(\lambda, W))$. Par l'Étape 1 et ce qui précède, on déduit un morphisme surjectif $D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p)) \twoheadrightarrow D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)$ de (φ, Γ) -modules libres de rang 2, donc un isomorphisme. En particulier on a une injection $D_\alpha(\pi^\alpha(\lambda, W)) \hookrightarrow D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)$ d'où on déduit facilement que $D_\alpha(\pi^\alpha(\lambda, W))$ est bien une extension non scindée de (φ, Γ) -modules libres de rang 1. Un examen de tout ce qui précède (avec le (ii) de la Proposition 5.1.2 pour $\dim_E \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(-, -) = 2$) montre que l'on a finalement démontré les (i), (ii) et (iii) de la Conjecture 5.4.1 dans ce cas. Cela achève la preuve du (i).

Étape 4

Supposons enfin W irréductible, par l'Étape 1 il reste à vérifier la dernière assertion en (ii). Par le Théorème 4.1.5 et l'Étape 1, on a un morphisme surjectif de (φ, Γ) -modules généralisés $D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p)) \twoheadrightarrow D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)$ où $D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p)) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{E}^\alpha(\llbracket \pi^{\text{an}}(\rho_p) \rrbracket) \in \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee})/(t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}), D_\alpha(\lambda, W))$. Si $D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p))$ a de la torsion $D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p))_{\text{tor}}$, celle-ci s'injecte forcément dans $\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee})/(t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle})$, et par ailleurs s'envoie sur 0 dans $D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)$ (qui est libre), de sorte que $D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p))/D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p))_{\text{tor}} \xrightarrow{\sim} D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)$ (puisque ces deux \mathcal{R}_E -modules sont libres de rang 2). Si $D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p))_{\text{tor}} \neq 0$, on en déduit en utilisant le (i) de la Proposition 5.1.2 que les poids de Hodge-Tate de $D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p))/D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p))_{\text{tor}}$ sont $1 - h_2, h'_1$ avec $h'_1 > 1 - h_1$, ce qui contredit l'isomorphisme précédent (les poids de Hodge-Tate de $\check{\rho}_p$ étant $1 - h_2, 1 - h_1$). Donc $D_\alpha(\pi^{\text{an}}(\rho_p)) \xrightarrow{\sim} D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)$, ce qui achève la preuve du (ii). \square

Remarque 5.4.3. — (i) Lorsque $N \neq 0$ sur D et en supposant W non ramifié, l'isomorphisme $\mathcal{F}_\alpha \circ \mathcal{E}_\alpha : \text{Ext}_{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha(\lambda, W), L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)) \xrightarrow{\sim} D_L^{\text{Gal}(L/\mathbb{Q}_p)} = D$ est le même, à multiplication près par un scalaire non nul, que l'inverse de l'isomorphisme \mathcal{R}^1 de [10, (25)], car un tel isomorphisme satisfaisant le (iii) de la Conjecture 5.4.1 est dans ce cas unique (à scalaire près).

(ii) Lorsque W est irréductible, on a le résultat suivant dans la direction du (i) de la Conjecture 5.4.1. Quitte à tordre W par un caractère, il existe ρ_p potentiellement semi-stable de poids de Hodge-Tate h_1, h_2 et module de Deligne-Fontaine D . Au moins lorsque $(h_1, h_2) = (1, 0)$, il résulte de [30, Prop. 8.2] que le morphisme $\pi^{\text{an}}(\rho_p)^\vee \rightarrow D_{\text{rig}}(\check{\rho}_p)_r$ dans le (ii) du Théorème 5.4.2 induit pour $r \gg 0$ un morphisme de (ψ, Γ) -modules de Fréchet :

$$(\pi^{\text{an}}(\rho_p)/(L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)))^\vee \longrightarrow D_\alpha(\lambda, W)_r.$$

Continuons avec le cas où W est une somme directe de caractères non ramifiés suffisamment génériques, i.e. $W = \bigoplus_{i=1}^n \text{nr}(c_i)$ pour des $c_i \in E^\times$ tels que $c_i c_j^{-1} \notin \{1, p\}$ pour $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ où $\text{nr}(z) : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow E^\times$ est le caractère non ramifié qui envoie $p \in \mathbb{Q}_p^\times$ sur $z \in E^\times$. Le module de Deligne-Fontaine associé est $D = Ef_1 \oplus \dots \oplus Ef_n$ avec $\varphi(f_i) = c_i f_i$ et on a $\pi^\infty(W)$ comme en (215). Un calcul donne pour $\alpha = e_j - e_{j+1}$, $j \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$D_\alpha(\lambda, W) = \bigoplus_{\mathcal{P}} \mathcal{R}_E((s_\alpha \cdot \lambda) \circ \lambda_{\alpha^\vee} \cdot |^{n-j+(n-j+1)+\dots+n-1} \text{nr}(\prod_{i \notin \mathcal{P}} c_i)^{-1})$$

où \mathcal{P} parcourt les sous-ensembles de $\{c_1, \dots, c_n\}$ de cardinal $n - j$. Pour $w \in \mathcal{S}_n$, soit $\text{nr}_w \stackrel{\text{déf}}{=} \text{nr}(c_{w^{-1}(1)}) \cdot |^{1-n} \otimes \text{nr}(c_{w^{-1}(2)}) \cdot |^{2-n} \otimes \dots \otimes \text{nr}(c_{w^{-1}(n)})$ (un caractère non ramifié du tore). On définit $\pi^\alpha(\lambda, W)$ comme la somme directe de tous les constituants (irréductibles) $\mathcal{F}_{B^-}^{\text{GL}_n}(L^-(s_\alpha \cdot \lambda), \text{nr}_w)$ qui sont *distincts* quand w parcourt \mathcal{S}_n . Il y en a exactement $\binom{n}{j}$, cf. [10, § 3.3].

Théorème 5.4.4. — Supposons $W = \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{nr}(c_i)$ avec $c_i c_j^{-1} \notin \{1, p\}$ pour $i \neq j$.

(i) On a $F_\alpha(\pi^\alpha(\lambda, W)) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \mathrm{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\lambda, W), -)$.

(ii) L'application (216) pour $\pi' = \pi^\alpha(\lambda, W)$ est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha : \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha(\lambda, W), L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)) \\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\lambda \circ \lambda_{\alpha^\vee}) / (t^{1-\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}), D_\alpha(\lambda, W)). \end{aligned}$$

(iii) Soit U^\wp, W^\wp, ρ vérifiant les points (i), (ii), (iii) du § 5.3 tels que U^p est suffisamment petit, ρ est résiduellement absolument irréductible et $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$ est cristalline pour $v|p$, $v \neq \wp$ avec les ratios des valeurs propres du Frobenius distincts de $1, p$, alors sous les hypothèses standard de Taylor-Wiles on a une injection $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante :

$$\left(\bigoplus_{L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)}^\alpha \llbracket (\mathcal{F}_\alpha \circ \mathcal{E}_\alpha)^{-1}(\mathrm{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_{\overline{\rho}})) \rrbracket \right) \otimes \varepsilon^{n-1} \circ \det \hookrightarrow \widehat{S}(U^\wp, W^\wp)^{\mathrm{an}}[\mathfrak{m}_\rho].$$

Démonstration. — Le (i) suit facilement des définitions et du (i) du Corollaire 3.7.8. Pour le (ii), il suffit de montrer que l'application est injective puisque les deux E -espaces vectoriels sont de dimension $\binom{n}{j}$: par le Corollaire 5.2.6 pour celui de gauche et en utilisant le (ii) de la Proposition 5.1.2 pour celui de droite. Autrement dit il suffit de montrer que \mathcal{E}_α envoie l'unique extension non scindée de $\mathcal{F}_{B^-}^{\mathrm{GL}_n}(L^-(s_\alpha \cdot \lambda), \mathrm{nr}_w)$ par $L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)$ vers une extension non nulle de (φ, Γ) -modules à droite. Cela découle facilement du Théorème 3.7.1 appliqué à la série principale $(\mathrm{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}(-\lambda) \otimes_E \mathrm{nr}_w)^{\mathrm{an}}$ (qui contient l'unique extension non scindée ci-dessus, cf. (206)) avec le (ii) de la Proposition 2.3.4 appliquée avec $\pi'' = 0$. Enfin le (iii) résulte facilement de [16, Cor. 5.16] avec [18, Th. 1.3] et de [10, Prop. 3.3.2]. \square

Rappelons que les “hypothèses standard de Taylor-Wiles” dans le (iii) du Théorème 5.4.4 sont les suivantes (cf. par exemple [18, § 1]) : $p > 2$, F/F^+ non ramifié avec $\sqrt[p]{1} \notin F$, G quasi-déployé en toute place finie, U_v hyperspécial en toute place finie v de F^+ inerte dans F et $\overline{\rho}(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F(\sqrt[p]{1})))$ adéquat où $\overline{\rho}$ est la réduction (irréductible) de ρ modulo p .

Terminons ce paragraphe avec le cas important $\dim_E W = 3$ et $N^2 \neq 0$ sur D (certains résultats étant démontrés dans les paragraphes suivants). Quitte à tordre D par un caractère de \mathbb{Q}_p^\times , on suppose de plus W non ramifié, i.e. on a pour un $c \in E^\times$:

$$(221) \quad D = E f_1 \oplus E f_2 \oplus E f_3 \quad \begin{cases} \varphi(f_3) = c f_3 \\ \varphi(f_2) = c p^{-1} f_2 \\ \varphi(f_1) = c p^{-2} f_1 \end{cases} \quad \begin{cases} N(f_3) = f_2 \\ N(f_2) = f_1 \\ N(f_1) = 0 \end{cases}$$

et $\pi^\infty(W) = \text{St}_3^\infty \otimes_E (\text{nr}(c) \circ \det)$ où St_3^∞ est la représentation lisse de Steinberg de $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$. On vérifie alors que $D_\alpha(\lambda, W)$ est (à isomorphisme près) l'unique (φ, Γ) -module de de Rham de la forme :

$$(222) \quad \begin{aligned} D_{e_1-e_2}(\lambda, W) &= (\mathcal{R}_E(|\cdot|^2) \text{---} \mathcal{R}_E(|\cdot|) \text{---} \mathcal{R}_E) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(x^{2-h_2} \text{nr}(c^{-1})) \\ D_{e_2-e_3}(\lambda, W) &= (\mathcal{R}_E(|\cdot|^2) \text{---} \mathcal{R}_E(|\cdot|) \text{---} \mathcal{R}_E) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(x^{3-(h_1+h_3)} \text{nr}(c^{-2})) \end{aligned}$$

où $D_1 \text{---} D_2$ désigne une extension *non scindée* du (φ, Γ) -module D_2 par le (φ, Γ) -module D_1 . Les représentations $\pi^\alpha(\lambda, W)$ ont été construites dans [10, § 4.5]. On rappelle juste ici qu'elles sont dans la catégorie $C_{\lambda, \alpha}$ du § 4.1 et ont la forme :

$$(223) \quad C_{\alpha,1} \text{---} C_{\alpha,2} \text{---} C_{\alpha,3} \text{---} C_{\alpha,4} \text{---} C_{\alpha,5}$$

où $C_{\alpha,i}$ est irréductible si $i \in \{1, 3, 5\}$ et est une somme directe de deux irréductibles si $i \in \{2, 4\}$ (cf. [10, § 4.1] où $C_{\alpha,i}$ est noté $C_i \oplus \tilde{C}_i$ si $i \in \{2, 4\}$), et où $C_1 \text{---} C_2$ désigne encore une extension non scindée de C_2 par C_1 . De plus on a $F_\alpha(C_{\alpha,i}) = E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(C_{\alpha,i}), -)$ avec $D_\alpha(C_{\alpha,i}) = \mathcal{R}_E(x^{2-h_2} |\cdot|^{\frac{i-1}{2}} \text{nr}(c^{-1}))$ si $i \in \{1, 3, 5\}$ et $\alpha = e_1 - e_2$, $D_\alpha(C_{\alpha,i}) = \mathcal{R}_E(x^{3-(h_1+h_3)} |\cdot|^{\frac{i-1}{2}} \text{nr}(c^{-2}))$ si $i \in \{1, 3, 5\}$ et $\alpha = e_2 - e_3$, $D_\alpha(C_{\alpha,i}) = 0$ si $i \in \{2, 4\}$.

Soit $\rho_p : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}_3(E)$ semi-stable de poids de Hodge-Tate h_1, h_2, h_3 et module de Deligne-Fontaine D comme ci-dessus. On suppose de plus que le (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_E associé à ρ_p vérifie les hypothèses de généralité dans la dernière partie de [14, § 3.3.4] (que l'on ne rappelle pas ici, elles sont par exemple satisfaites lorsque $p > 3$, $h_1 = h_2 + 1 = h_3 + 2$ et ρ_p admet un réseau stable dont la réduction $\overline{\rho}_p$ a tous ses sous-quotients de dimension 2 non scindés, cf. [14, Prop. 3.30 & Prop. 3.32]). Alors dans [14, § 3.3.4] est associé à un tel ρ_p pour $\alpha \in S$ une extension non scindée $\pi^\alpha(\rho_p) \in \text{Ext}_{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha(\lambda, W), L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W))$ ne dépendant que de ρ_p .

Les deux théorèmes suivants résument l'essentiel de ce qui est connu dans la direction de la Conjecture 5.3.1 lorsque $\dim_E W = 3$ et $N^2 \neq 0$.

Théorème 5.4.5. — *Supposons $\dim_E W = 3$ et $N^2 \neq 0$.*

(i) *On a $F_\alpha(\pi^\alpha(\lambda, W)) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\lambda, W), -)$.*

(ii) *L'application (216) pour $\pi' = \pi^\alpha(\lambda, W)$ est un isomorphisme.*

Théorème 5.4.6. — *Supposons $\dim_E W = 3$ et $N^2 \neq 0$.*

(i) *Pour tout $\rho_p : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}_3(E)$ semi-stable comme ci-dessus, la représentation $\pi^\alpha(\rho_p)$ détermine $h_1, h_2, h_3, D, \text{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_p)$ et ne dépend que de ces données.*

(ii) *Soit U^\wp, W^\wp, ρ vérifiant les points (i), (ii), (iii) du § 5.3 et tels que $h_1 = h_2 + 1 = h_3 + 2$, U_v est maximal si $v|p$, $v \neq \wp$, $\overline{\rho}$ est absolument irréductible et les sous-quotients de dimension 2 de $\overline{\rho}|_{\text{Gal}(\overline{F_\wp}/F_\wp)}$ sont non scindés (cf. [14, Th. 1.1]).*

Alors on a une injection $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante :

$$(\pi^{e_1-e_2}(\rho_\wp) \oplus_{L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)} \pi^{e_2-e_3}(\rho_\wp))^{\oplus d(U^\wp, \rho)} \otimes \varepsilon^{n-1} \circ \det \hookrightarrow \widehat{S}(U^\wp, W^\wp)^{\text{an}}[\mathfrak{m}_\rho].$$

Le (ii) du Théorème 5.4.6 est déjà dans [14, Th. 1.1] (et ne contient donc rien de nouveau). Lorsque h_1, h_2, h_3 ne sont plus nécessairement consécutifs, il est conjecturé dans [14, Conj. 1.2] que la somme amalgamée $(\pi^{e_1 - e_2}(\rho_{\widehat{\rho}}) \oplus_{L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W)} \pi^{e_2 - e_3}(\rho_{\widehat{\rho}})) \otimes \varepsilon^{n-1} \circ \det$ se plonge encore dans $\widehat{S}(U^\wp, W^\wp)^{\text{an}}[\mathfrak{m}_\rho]$. Le (i) du Théorème 5.4.6 sera montré au § 5.5. Notons qu'il dit que les représentations $\pi^\alpha(\rho_p)$ et $\llbracket (\mathcal{F}_\alpha \circ \mathcal{E}_\alpha)^{-1}(\text{Fil}_\alpha^{\text{max}}(\rho_p)) \rrbracket$ contiennent *exactement* la même information, et la conjecture qui suit (purement locale) est donc très naturelle.

Conjecture 5.4.7. — *Pour tout $\rho_p : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \text{GL}_3(E)$ semi-stable comme ci-dessus, on a $\pi^\alpha(\rho_p) \simeq \llbracket (\mathcal{F}_\alpha \circ \mathcal{E}_\alpha)^{-1}(\text{Fil}_\alpha^{\text{max}}(\rho_p)) \rrbracket$.*

On termine ce paragraphe avec la preuve du Théorème 5.4.5 (voir § 5.5 pour celle du (i) du Théorème 5.4.6). Quitte à tordre $\pi^\alpha(\lambda, W)$ et $\pi^\infty(W)$ par un caractère non ramifié, on peut supposer $c = 1$ (cf. la dernière assertion de la Remarque 2.3.7) et par symétrie, il suffit de traiter le cas $\alpha = e_1 - e_2$. On commence par la preuve du (i).

Étape 1

Par (222) et le paragraphe qui le suit, $D_\alpha(\lambda, W)$ est l'unique (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_E de de Rham de la forme $D_\alpha(C_{\alpha,5}) - D_\alpha(C_{\alpha,3}) - D_\alpha(C_{\alpha,1})$. Écrivons $C_{\alpha,i} = C_{\alpha,i}^1 \oplus C_{\alpha,i}^2$ si $i \in \{2, 4\}$ avec les deux facteurs directs irréductibles. En utilisant par récurrence le Théorème 4.1.6 en partant de $\pi' = C_{\alpha,5}$ puis en considérant successivement $\pi'' = C_{\alpha,4}^1$, $\pi'' = C_{\alpha,4}^2$, $\pi'' = C_{\alpha,3}$, $\pi'' = C_{\alpha,2}^1$, $\pi'' = C_{\alpha,2}^2$ et $\pi'' = C_{\alpha,1}$ (et en augmentant π' à chaque étape via le Théorème 4.1.6) on obtient $F_\alpha(\pi^\alpha(\lambda, W)) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(\widetilde{D}_\alpha(\lambda, W), -)$ où $\widetilde{D}_\alpha(\lambda, W)$ est un (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_E sans torsion de la forme $D_\alpha(C_{\alpha,5}) - D_\alpha(C_{\alpha,3}) - D_\alpha(C_{\alpha,1})$, la notation $D_1 - D_2$ désignant une extension *quelconque* (i.e. possiblement scindée) de D_2 par D_1 .

Étape 2

On montre que toutes les extensions dans $\widetilde{D}_\alpha(\lambda, W)$ sont non scindées. On commence par $D_\alpha(C_{\alpha,3}) - D_\alpha(C_{\alpha,1})$. On note $I \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p) \cap L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)}(-s_\alpha \cdot \lambda))^{\text{an}}$ et $\widetilde{I} \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p) \cap L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)}^{L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)}(-s_\alpha \cdot \lambda) \otimes_E (|\cdot|^{-1} \otimes |\cdot| \otimes 1))^{\text{an}}$ (où selon la notation usuelle on voit $-s_\alpha \cdot \lambda$ comme caractère algébrique de $T(\mathbb{Q}_p)$). Par [10, Lem. 3.1.2(i)] on a une unique représentation de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ sur E de la forme $I - L(-\lambda)_{P_\alpha} - \widetilde{I}$. En fait, si l'on note $D_2 = Ef_1 \oplus Ef_2$ le module de Deligne-Fontaine de dimension 2 où $\begin{cases} \varphi(f_2) = f_2 \\ \varphi(f_1) = p^{-1}f_1 \end{cases}$ $\begin{cases} N(f_2) = f_1 \\ N(f_1) = 0 \end{cases}$ et W_2 la représentation de Weil-Deligne associée, on a $I - L(-\lambda)_{P_\alpha} - \widetilde{I} \simeq \pi^\alpha((\lambda_1, \lambda_2), W_2) \boxtimes_E (-\lambda_3)$ où \boxtimes est le produit tensoriel *extérieur* d'une représentation de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et d'une représentation de \mathbb{Q}_p^\times . Un examen de la preuve de [10, Prop. 4.4.2] montre que l'on a une injection :

$$\pi \hookrightarrow (\text{Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^G(I - L(-\lambda)_{P_\alpha} - \widetilde{I}))^{\text{an}}$$

où π est une représentation dans $C_{\lambda, \alpha}$ de la forme $\pi'' - - - (C_{\alpha, 1} - C_{\alpha, 2} - C_{\alpha, 3})$ avec les constituants de π'' tous de la forme $\mathcal{F}_{P^-}^G(L^-(w \cdot \lambda), \pi_P^\infty)$ pour des π_P^∞ non génériques. Il résulte du Théorème 4.1.6 que l'on a :

$$F_\alpha(\pi) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(C_{\alpha, 3}) - - D_\alpha(C_{\alpha, 1}), -)$$

et du Théorème 3.7.2 suivi du (i) du Théorème 5.4.2 que l'on a :

$$\begin{aligned} F_\alpha\left(\left(\text{Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(I - L(-\lambda)_{P_\alpha} - \tilde{I})\right)^{\text{an}}\right) \\ \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(C_{\alpha, 3}) - D_\alpha(C_{\alpha, 1}), -) \end{aligned}$$

où $D_\alpha(C_{\alpha, 3}) - D_\alpha(C_{\alpha, 1})$ est l'unique extension non scindée ([51, Prop. 2.15] et [52, Th. 5.11]). Par le (ii) de la Proposition 2.3.4 (appliquée avec $\pi'' = 0$) l'injection $\pi \hookrightarrow (\text{Ind}_{P_\alpha(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}(I - L(-\lambda)_{P_\alpha} - \tilde{I}))^{\text{an}}$ induit une surjection de (φ, Γ) -modules :

$$D_\alpha(C_{\alpha, 3}) - D_\alpha(C_{\alpha, 1}) \twoheadrightarrow D_\alpha(C_{\alpha, 3}) - - D_\alpha(C_{\alpha, 1})$$

qui doit donc être un isomorphisme. La preuve pour la deuxième extension $D_\alpha(C_{\alpha, 5}) - - D_\alpha(C_{\alpha, 3})$ est analogue en remplaçant $I - L(-\lambda)_{P_\alpha} - \tilde{I}$ par son tordu par le caractère $|\det_2|^{-1} \boxtimes_E |\cdot|^2$ de $L_{P_\alpha}(\mathbb{Q}_p)$ (cf. [10, Prop. 4.4.4]).

Étape 3

On montre que $\tilde{D}_\alpha(\lambda, W)$ est un (φ, Γ) -module de de Rham. Soit π une extension dans $\text{Ext}_{\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^\alpha(\lambda, W), L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W))$ telle que l'on a une extension non scindée $\pi' \stackrel{\text{déf}}{=} L(-\lambda) \otimes_E \pi^\infty(W) - C_{\alpha, 1}$ en sous-objet de π (c'est possible par [10, § 4.6]). Il résulte de [10, § 4.1 & Prop. 4.6.1 & Lem. 5.3.1 & (53)] avec [12, Cor. 2.5] (on laisse les détails faciles au lecteur) que l'on a un isomorphisme :

$$(224) \quad \pi'' - - \pi' \simeq \mathcal{F}_{P_\beta^-}^G(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_\beta^-)} L^-(\lambda)_{P_\beta}, 1 \boxtimes_E \text{St}_2^\infty)$$

où St_2^∞ est la représentation de Steinberg lisse de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et π'' a tous ses constituants de la forme $\mathcal{F}_{P^-}^G(L^-(w \cdot \lambda), \pi_P^\infty)$ pour des π_P^∞ non génériques. Il résulte du Théorème 4.1.6 que l'on a $F_\alpha(\pi'' - - \pi') \xrightarrow{\sim} F_\alpha(\pi')$, d'où par (224) et le (i) du Corollaire 3.7.8 $F_\alpha(\pi') \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(\mathcal{R}_E(x^{2-h_1}), -)$. Autrement dit, par le Théorème 4.1.6 appliqué à π on a $F_\alpha(\pi) \simeq E_\infty(\chi_{-\lambda}) \otimes_E \text{Hom}_{(\varphi, \Gamma)}(D_\alpha(\pi), -)$ avec $D_\alpha(\pi)$ de la forme :

$$\mathcal{R}_E(x^{2-h_2} |\cdot|^2) - \mathcal{R}_E(x^{2-h_2} |\cdot|) - \mathcal{R}_E(x^{2-h_1}) \simeq \tilde{D}_\alpha(\lambda, W) - \mathcal{R}_E(x^{2-h_1}) / (t^{h_1-h_2}).$$

Or, c'est un exercice facile en utilisant $2 - h_1 < 2 - h_2$ et l'équivalence de catégories exactes entre modules filtrés et (φ, Γ) -modules de de Rham ([4, Th.A]) de vérifier que toutes les extensions de $\mathcal{R}_E(x^{2-h_1})$ par $\mathcal{R}_E(x^{2-h_2} |\cdot|^2) - \mathcal{R}_E(x^{2-h_2} |\cdot|)$ sont des (φ, Γ) -modules de de Rham (et même semi-stables). En particulier, $\tilde{D}_\alpha(\lambda, W)$ est aussi de de Rham (car $\tilde{D}_\alpha(\lambda, W)[1/t] \xrightarrow{\sim} D_\alpha(\pi)[1/t]$, cf. la discussion avant (197)). Cela termine la preuve du (i) du Théorème 5.4.5.

On conserve les notations des paragraphes précédents. Soit D un (φ, Γ) -module (libre de rang fini) sur \mathcal{R}_E et $W_{\text{dR}}^+(D)$ le B_{dR}^+ -module avec action semi-linéaire de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ associé (cf. § 5.1). Il suit de la définition du foncteur (exact) W_{dR}^+ que l'on a des applications canoniques pour $i = 0, 1$ (et même pour tout i , cf. [51, § 2.1] et [52, Th. 5.11]) :

$$(225) \quad H_{(\varphi, \Gamma)}^i(D) \longrightarrow H^i(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\text{dR}}^+(D)).$$

En composant (225) à droite avec l'application déduite de $W_{\text{dR}}^+(D) \twoheadrightarrow W_{\text{dR}}^+(D)/(t)$, on définit :

$$(226) \quad H_{\text{HT}}^1(D) \stackrel{\text{déf}}{=} \ker(H_{(\varphi, \Gamma)}^1(D) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\text{dR}}^+(D)/(t))).$$

Rappelons qu'un (φ, Γ) -module D sur \mathcal{R}_E est dit de Hodge-Tate si le rang de D est $\dim_E \sum_{i \in \mathbb{Z}} H^0(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), t^i W_{\text{dR}}^+(D)/t^{i+1} W_{\text{dR}}^+(D))$.

Lemme 5.5.1. — *Supposons D de Hodge-Tate et soit D' un (φ, Γ) -module extension de \mathcal{R}_E par D . Alors $E[D'] \subseteq H_{\text{HT}}^1(D)$ si et seulement si D' est de Hodge-Tate.*

Démonstration. — La suite exacte $0 \rightarrow D \rightarrow D' \rightarrow \mathcal{R}_E \rightarrow 0$ induit une suite exacte de B_{dR}^+ -modules avec action semi-linéaire de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$:

$$0 \longrightarrow W_{\text{dR}}^+(D) \longrightarrow W_{\text{dR}}^+(D') \longrightarrow B_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \longrightarrow 0$$

qui (en regardant la multiplication par $t \in B_{\text{dR}}^+$) induit une suite exacte :

$$0 \longrightarrow W_{\text{dR}}^+(D)/(t) \longrightarrow W_{\text{dR}}^+(D')/(t) \longrightarrow B_{\text{dR}}^+/(t) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \longrightarrow 0.$$

On en déduit un diagramme commutatif (avec $H^i(-)$ pour $H^i(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), -)$) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{(\varphi, \Gamma)}^0(D) & \longrightarrow & H_{(\varphi, \Gamma)}^0(D') & \longrightarrow & E \longrightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^1(D) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^0\left(\frac{W_{\text{dR}}^+(D)}{(t)}\right) & \longrightarrow & H^0\left(\frac{W_{\text{dR}}^+(D')}{(t)}\right) & \longrightarrow & E \longrightarrow H^1\left(\frac{W_{\text{dR}}^+(D)}{(t)}\right). \end{array}$$

Comme l'image de E dans la flèche du haut à droite est $E[D']$ et comme $H^0(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), t^i B_{\text{dR}}^+/t^{i+1} B_{\text{dR}}^+) = 0$ si $i \neq 0$, on en déduit facilement le lemme. \square

On pose $k_1 \stackrel{\text{déf}}{=} h_1 - 2$, $k_2 \stackrel{\text{déf}}{=} h_2 - 1$ et $k_3 \stackrel{\text{déf}}{=} h_3$, on a donc $k_1 \geq k_2 \geq k_3$ (et $k_i = -\lambda_i$ avec les notations du § 5.3). Soit D_1 de la forme $D_1 \simeq \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1}) \text{---} \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})$ (i.e. une extension non scindée). C'est un (φ, Γ) -module de de Rham, et même semi-stable. De plus, par [14, (2.2)] le cup-produit induit un diagramme commutatif d'accouplements :

$$(227) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_3}), D_1) & \times & \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, D_1) & \xrightarrow{\cup} & E \\ \parallel & & \kappa \downarrow & & \parallel \\ \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_3}), D_1) & \times & \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) & \xrightarrow{\cup} & E \end{array}$$

où l'application κ est surjective et l'accouplement du bas est parfait ([14, Prop. 2.3(2)]). Soit $k'_2 \stackrel{\text{déf}}{=} k_2 + (k_2 + 1 - k_3)$, on a aussi un diagramme commutatif d'accouplements parfaits (noter que $k'_2 > k_2$ et rappelons que $k_2 + 1 > k_3$) :

$$(228) \quad \begin{array}{ccc} \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_3}), D_1) & \times & \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) & \xrightarrow{\cup} & E \\ u \downarrow & & j \uparrow & & \parallel \\ \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), D_1) & \times & \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k'_2})) & \xrightarrow{\cup} & E \end{array}$$

qui se déduit des accouplements parfaits ([47, § 5.2]) :

$$(229) \quad \begin{array}{ccc} H_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1(x^{-k_3})) & \times & H_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1^\vee(\varepsilon x^{k_2})) & \xrightarrow{\cup} & H_{(\varphi, \Gamma)}^2(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2-k_3})) \\ \downarrow & & \uparrow & & \parallel \\ H_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1(x^{-1-k_2})) & \times & H_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1^\vee(\varepsilon x^{k'_2})) & \xrightarrow{\cup} & H_{(\varphi, \Gamma)}^2(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2-k_3})) \end{array}$$

où D_1^\vee est le (φ, Γ) -module dual de D_1 (notons que $D_1^\vee(\varepsilon x^{k'_2}) \simeq D_1(x^{-1-k_2})^\vee(\varepsilon x^{k_2-k_3})$).

Lemme 5.5.2. — (i) On a les égalités :

$$\dim_E \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), D_1) = \dim_E \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k'_2})) = 2.$$

(ii) Dans le diagramme (228) l'application u est surjective et l'application j injective.

Démonstration. — Le (i) se déduit facilement de [51, Prop. 2.15] et [52, Th. 5.11] (qui incluent le cas $p = 2$). Montrons le (ii). Soit $D \stackrel{\text{déf}}{=} D_1(x^{-1-k_2})$ et $D_{\text{dR}}(D)$ le E -espace vectoriel filtré de dimension 2 associé au (φ, Γ) -module de de Rham D (par exemple par [4, Th. A]). On a $\text{Fil}^i(D_{\text{dR}}(D)) = (\text{Fil}^i(W_{\text{dR}}(D)))^{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ pour $i \in \mathbb{Z}$ (cf. [51, Def. 1.17]) où $W_{\text{dR}}(D) \stackrel{\text{déf}}{=} B_{\text{dR}} \otimes_{B_{\text{dR}}^+} W_{\text{dR}}^+(D) = W_{\text{dR}}^+(D)[1/t]$ avec $W_{\text{dR}}^+(D)$ comme au § 5.1 et $\text{Fil}^i(W_{\text{dR}}(D)) = t^i W_{\text{dR}}^+(D)$ (en particulier $\text{Fil}^0(W_{\text{dR}}(D)) = W_{\text{dR}}^+(D)$). La forme de D montre que, pour $i \in \mathbb{Z}$, on a $\text{Fil}^i(D_{\text{dR}}(D)) = D_{\text{dR}}(D)$ si $i \leq -(k_1 - k_2 + 1)$, $\text{Fil}^i(D_{\text{dR}}(D))$ est une droite si $-(k_1 - k_2 + 1) < i \leq 0$ et $\text{Fil}^i(D_{\text{dR}}(D)) = 0$ si $0 < i$. Comme D est de de Rham, on a un isomorphisme compatible à $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ et aux filtrations $B_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_{\text{dR}}(D) \xrightarrow{\sim} W_{\text{dR}}(D)$, d'où on déduit par ce qui précède :

$$(230) \quad \begin{aligned} W_{\text{dR}}^+(D) &\simeq \sum_{i+j=0} t^j B_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} \text{Fil}^i(D_{\text{dR}}(D)) \\ &\simeq B_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} E \oplus t^{k_1-k_2+1} B_{\text{dR}}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} E. \end{aligned}$$

Utilisant le Lemme 5.1.1 avec (230) (et $H^0(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), t^j B_{\text{dR}}^+ / t^{j+1} B_{\text{dR}}^+) = 0$ si $j \neq 0$), on obtient $\dim_E H_{(\varphi, \Gamma)}^0(D/(t^{k_2-k_3+1})) = 1$. On a par ailleurs une suite exacte :

$$(231) \quad 0 \rightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^0(D_1(x^{-1-k_2})/t^{k_2-k_3+1}) \rightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1(x^{-k_3})) \rightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1(x^{-1-k_2})).$$

Comparant (231) et (229), on déduit de ce qui précède $\dim_E \ker(u) = 1$. Par [14, Lem. 2.2], on a $\dim_E \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_3}), D_1) = 3$, ce qui implique finalement la surjectivité de u par (i). La preuve de l'injectivité de j est analogue et laissée au lecteur. \square

On note D_0 l'unique (φ, Γ) -module de de Rham de la forme (cf. (222)) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_2-1}) \text{ --- } \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}) \text{ --- } \mathcal{R}_E(x^{k_2+1}) \\ \simeq (\mathcal{R}_E(|\cdot|^2) \text{ --- } \mathcal{R}_E(|\cdot|) \text{ --- } \mathcal{R}_E) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(x^{k_2+1}). \end{aligned}$$

Proposition 5.5.3. — Soit D une extension de $\mathcal{R}_E(x^{k_3})$ par D_1 telle que $N^2 \neq 0$ sur $D_{\text{dR}}(D) = D_{\text{st}}(D)$ (cf. [51, § 1] pour les notations, cf. aussi la preuve du (ii) du Lemme 5.5.2) et notons $u(D)$ le “pull-back” de D le long de $\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}) \hookrightarrow \mathcal{R}_E(x^{k_3})$. Alors le dual $u(D)^\vee$ est une extension (non scindée) de $\mathcal{R}_E(\varepsilon^{-2}x^{-k_1})/(t^{k_1-k_2+1})$ par D_0^\vee .

Démonstration. — Notons que par [28, Lem. 3.2] l'hypothèse $N^2 \neq 0$ sur $D_{\text{dR}}(D)$ implique que le (φ, Γ) -module en sous-objet D_1 n'est pas cristallin. L'application u en (228) s'inscrit dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ext}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_3}), \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x_1^k)) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_3}), D_1) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_3}), \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \\ \downarrow & & \downarrow u & & \downarrow u_1 \\ \text{Ext}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x_1^k)) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), D_1) & \longrightarrow & \text{Ext}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})). \end{array}$$

Via les isomorphismes $\text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_3}), \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \simeq H_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2-k_3}))$ et $\text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \simeq H_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{-1}))$, u_1 est l'application naturelle :

$$(232) \quad u_1 : H_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2-k_3})) \longrightarrow H_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{-1}))$$

où $\dim_E H_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2-k_3})) = 2$ et $\dim_E H_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{-1})) = 1$. Un argument comme dans la preuve du (ii) du Lemme 5.5.2 (en plus simple) donne que u_1 est surjectif. Par ailleurs il suit facilement de [51, Prop. 2.7] que $\dim_E H_f^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2-k_3})) = 1$ et $H_f^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{-1})) = 0$, de sorte que $H_f^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2-k_3}))$ est inclus dans le noyau de (232), et qu'il lui est même égal puisque u_1 est surjectif en comparant les dimensions. Donc $\ker(u_1)$ s'identifie aux extensions qui sont cristallines. Comme $N^2 \neq 0$ sur $D_{\text{dR}}(D)$, le quotient $\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}) \text{ --- } \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_3})$ de D n'est pas cristallin. Par le diagramme commutatif et la discussion ci-dessus, on en déduit que le quotient $\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}) \text{ --- } \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2+1})$ de $u(D)$ est une extension *non scindée*, i.e. $u(D)$ est de la forme $\mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1}) \text{ --- } \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}) \text{ --- } \mathcal{R}_E(x^{k_2+1})$ et donc :

$$(233) \quad u(D)^\vee \simeq \mathcal{R}_E(x^{-k_2-1}) \text{ --- } \mathcal{R}_E(\varepsilon^{-1}x^{-k_2}) \text{ --- } \mathcal{R}_E(\varepsilon^{-2}x^{-k_1}).$$

Comme $u(D)^\vee$ est de de Rham avec en quotient D_1^\vee qui n'est pas cristallin, on en déduit facilement que le “pull-back” de $u(D)^\vee$ le long de $\mathcal{R}_E(\varepsilon^{-2}x^{-k_2+1}) \hookrightarrow \mathcal{R}_E(\varepsilon^{-2}x^{-k_1})$ est isomorphe à D_0^\vee , puis le résultat. \square

On note $\text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1)$ (resp. $\text{Ext}_g^1(D_1, D_1) \subseteq \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1)$) le sous- E -espace vectoriel de $\text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, D_1)$ des extensions qui sont de Hodge-Tate

(resp. de de Rham). En voyant un élément de $\text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, D_1)$ comme un (φ, Γ) -module \widetilde{D}_1 sur $\mathcal{R}_{E[\epsilon]/(\epsilon^2)} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_E \otimes_E E[\epsilon]/(\epsilon^2)$ qui déforme D_1 , on définit $\text{Ext}_Z^1(D_1, D_1) \subseteq \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, D_1)$ comme le sous-espace des extensions telles que $\wedge_{\mathcal{R}_{E[\epsilon]/(\epsilon^2)}}^2 \widetilde{D}_1 \simeq \wedge_{\mathcal{R}_E}^2 D_1 \otimes_E E[\epsilon]/(\epsilon^2)$. Enfin on pose $\text{Ext}_{\text{HT}, Z}^1(D_1, D_1) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1) \cap \text{Ext}_Z^1(D_1, D_1)$.

Lemme 5.5.4. — On a $\dim_E \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1) = 3$ et $\dim_E \text{Ext}_{\text{HT}, Z}^1(D_1, D_1) = 2$.

Démonstration. — Soit \widetilde{D}_1 une déformation de D_1 sur $\mathcal{R}_{E[\epsilon]/(\epsilon^2)}$, les poids de Sen de \widetilde{D}_1 sont de la forme $(k_1 + 2 + d_1\epsilon, k_2 + 1 + d_2\epsilon)$ pour $(d_1, d_2) \in E^2$, ce qui donne une application E -linéaire naturelle :

$$(234) \quad \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, D_1) \longrightarrow E^2, \quad [\widetilde{D}_1] \mapsto (d_1, d_2).$$

Montrons que cette application est surjective. Si D_1 est cristallin, cela suit facilement de [2, Prop. 2.3.10] appliqué au raffinement $\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_1+1}) - \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_2-1})$ de D_1 . Si D_1 est (semi-stable) *non* cristallin, pour tout $(d_1, d_2) \in E^2$, en utilisant [14, Th. 2.7] (appliqué à D_1) il n'est pas difficile de trouver $\widetilde{D}_1 \in \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, D_1)$ triangulin de paramètre $(\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2)$ tel que $(k_1 + 2 + d_1\epsilon, k_2 + 1 + d_2\epsilon)$ sont les poids de Sen respectifs de $\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2$ (la condition dans *loc.cit.* sur $\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2$ donne en fait ici une condition vide sur d_1, d_2). On a par ailleurs $[\widetilde{D}_1] \in \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1)$ si et seulement si $d_1 = d_2 = 0$: utiliser par exemple que l'on peut toujours tordre D_1 par un caractère non ramifié pour le rendre étale, donc provenant d'une représentation galoisienne de Hodge-Tate. Comme $\dim_E \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, D_1) = 5$ ([14, Lem. 3.5]), on obtient la première égalité. Pour la deuxième, notons que la restriction de (234) à $\text{Ext}_Z^1(D_1, D_1)$ a pour image la droite $\{(x, -x), x \in E\} \hookrightarrow E^2$. Comme $\dim_E \text{Ext}_Z^1(D_1, D_1) = 3$ ([14, Lem. 3.9]), on en déduit $\dim_E \text{Ext}_{\text{HT}, Z}^1(D_1, D_1) = 2$. \square

Lemme 5.5.5. — On a $\dim_E \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) = 2$.

Démonstration. — L'isomorphisme $\text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \simeq H_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1^\vee(\varepsilon x^{k_2}))$ induit un isomorphisme $\text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \simeq H_{\text{HT}}^1(D_1^\vee(\varepsilon x^{k_2}))$. Par ailleurs une preuve analogue à celle de (230) donne $W_{\text{dR}}^+(D_1^\vee(\varepsilon x^{k_2})) \simeq (B_{\text{dR}}^+ \oplus t^{-(k_1+1-k_2)} B_{\text{dR}}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, qui implique en particulier (avec $H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), t^j B_{\text{dR}}^+/t^{j+1} B_{\text{dR}}^+) = 0$ si $j \neq 0$) :

$$\dim_E H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\text{dR}}^+(D_1^\vee(\varepsilon x^{k_2}))/t) = 1.$$

Comme $\dim_E \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) = 3$ (cf. [14, Lem. 3.5]), on en déduit $\dim_E \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \geq 2$ par la définition de $H_{\text{HT}}^1(D_1^\vee(\varepsilon x^{k_2}))$. Par ailleurs, l'injection (venant de $D_1 \twoheadrightarrow \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})$) :

$$\text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}), \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \hookrightarrow \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}))$$

induit un isomorphisme (en utilisant que tout sous- (φ, Γ) -module d'un (φ, Γ) -module de Hodge-Tate tel que le conoyau n'a pas de torsion est encore de Hodge-Tate) :

$$(235) \quad \mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}), \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \cap \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}), \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}))$$

(le terme de droite est clairement inclus dans celui de gauche, qui a seulement dimension 1, d'où un isomorphisme). Comme par ailleurs :

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}), \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \simeq \mathrm{Ext}_g^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}), \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \simeq H_g^1(\mathcal{R}_E) \subsetneq H_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E),$$

il existe des extensions de $\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})$ par $\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})$ qui ne sont pas de Hodge-Tate, d'où on déduit par (235) :

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \subsetneq \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})).$$

Cela implique $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \leq 2$ et termine la preuve. \square

Remarque 5.5.6. — Si D est un (φ, Γ) -module et D' un sous- (φ, Γ) -module de même rang que D , alors D' de Hodge-Tate n'implique pas D de Hodge-Tate (contrairement au cas de Rham). Par exemple, si D est une extension \mathcal{R}_E par \mathcal{R}_E qui n'est pas de Hodge-Tate, son "pull-back" le long de $t^n \mathcal{R}_E \hookrightarrow \mathcal{R}_E$ est de Hodge-Tate pour tout $n > 0$.

Comme pour (235), on vérifie que la surjection κ en (227) induit une suite exacte :

$$(236) \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1})) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(D_1, D_1) \xrightarrow{\kappa} \mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})).$$

Lemme 5.5.7. — (i) On a $\mathrm{Ext}_g^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1}))$.

(ii) Supposons D_1 non cristallin, alors $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1})) = 1$ et l'application κ en (236) est surjective.

Démonstration. — (i) Notons d'abord que $\mathrm{Ext}_*^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1})) \simeq H_*^1(D_1^\vee(\varepsilon^2 x^{k_1}))$ où $*$ $\in \{(\varphi, \Gamma), g, \mathrm{HT}\}$. Considérons les applications naturelles :

$$(237) \quad H_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1^\vee(\varepsilon^2 x^{k_1})) \longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\mathrm{dR}}^+(D_1^\vee(\varepsilon^2 x^{k_1}))) \\ \longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), W_{\mathrm{dR}}^+(D_1^\vee(\varepsilon^2 x^{k_1}))/\langle t \rangle).$$

Comme pour (230) on montre $W_{\mathrm{dR}}^+(D_1^\vee(\varepsilon^2 x^{k_1})) \simeq (B_{\mathrm{dR}}^+ \oplus t^{k_1 - k_2 + 1} B_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$, d'où on déduit que la seconde application en (237) est une bijection de E -espaces vectoriels de dimension 1. Par [51, Def. 2.4 & Lem. 2.6] on en déduit (i).

(ii) Supposons D_1 non cristallin, comme $D_1(\varepsilon^{-1} x^{-k_1}) \simeq \mathcal{R}_E(\varepsilon) \text{ — } \mathcal{R}_E(x^{k_2 - k_1})$ est aussi (semi-stable) non cristallin, on déduit de [51, Prop. 2.7] que l'on a $H_e^1(D_1(\varepsilon^{-1} x^{-k_1})) = H_f^1(D_1(\varepsilon^{-1} x^{-k_1})) \simeq E$. Par ailleurs par [14, Lem. 3.5] on a $\dim_E H_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1^\vee(\varepsilon^2 x^{k_1})) = 2$. Il suit alors de [51, Prop. 2.11] (avec [52, Th. 5.11]) et $(D_1^\vee(\varepsilon^2 x^{k_1}))^\vee(\varepsilon) \simeq D_1(\varepsilon^{-1} x^{-k_1})$ que l'on a $\dim_E H_g^1(D_1^\vee(\varepsilon^2 x^{k_1})) = 1 = \dim_E \mathrm{Ext}_g^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1}))$. On en déduit le (ii) avec (i), le Lemme 5.5.4 et le Lemme 5.5.5. \square

Remarque 5.5.8. — Dans le (ii) du Lemme 5.5.7, si D_1 est cristallin on peut montrer que $\dim_E \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1})) = 2$, et dans ce cas κ en (236) n'est donc pas surjective (par le Lemme 5.5.4 et le Lemme 5.5.5).

Lemme 5.5.9. — On a $\text{im}(j) = \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \subseteq \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}))$ (voir (228) pour j).

Démonstration. — Soit k'_2 comme en (228), on a un diagramme commutatif (en notant à droite $H^1(-)$ pour $H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p), -)$) :

$$\begin{array}{ccc} H^1_{(\varphi, \Gamma)}(D_1^\vee(\varepsilon x^{k'_2})) & \longrightarrow & H^1(t^{k'_2 - k_2} W_{\text{dR}}^+(D_1^\vee(\varepsilon x^{k_2}))) \\ j \downarrow & & j' \downarrow \\ H^1_{(\varphi, \Gamma)}(D_1^\vee(\varepsilon x^{k_2})) & \longrightarrow & H^1(W_{\text{dR}}^+(D_1^\vee(\varepsilon x^{k_2}))) \xrightarrow{v} H^1(W_{\text{dR}}^+(D_1^\vee(\varepsilon x^{k_2}))/\langle t \rangle). \end{array}$$

Comme $k'_2 - k_2 \geq 1$, on a $v \circ j' = 0$, donc $\text{im}(j) \subseteq H^1_{\text{HT}}(D_1^\vee(\varepsilon x^{k_2}))$. Mais par l'injectivité de j ((ii) du Lemme 5.5.2), le (i) du Lemme 5.5.2 et le Lemme 5.5.5, ces deux espaces ont même dimension (= 2), d'où le résultat. \square

Proposition 5.5.10. — (i) L'accouplement du bas en (227) induit un accouplement parfait $\text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), D_1) \times \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \xrightarrow{\cup} E$.

(ii) Si D_1 est non cristallin, on a un diagramme commutatif d'accouplements compatible via la surjection u avec le diagramme commutatif (227) :

$$(238) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), D_1) & \times & \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1) & \xrightarrow{\cup} & E \\ \parallel & & \kappa \downarrow & & \parallel \\ \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), D_1) & \times & \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) & \xrightarrow{\cup} & E. \end{array}$$

Démonstration. — Le Lemme 5.5.9 et l'injectivité de j ((ii) du Lemme 5.5.2) permettent de remplacer $\text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k'_2}))$ par $\text{im}(j) = \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}))$ dans l'accouplement parfait du bas en (228), d'où (i). L'accouplement du haut en (238) est alors défini en décrétant que $\ker(\kappa)$ annule $\text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), D_1)$. Les dernières assertions du (ii) découlent du (ii) du Lemme 5.5.7 et du (i). \square

Remarque 5.5.11. — Dans le (ii) de la Proposition 5.5.10, si D_1 est cristallin on a encore un diagramme commutatif comme en (238), mais dans ce cas κ n'est plus surjective (Remarque 5.5.8) et on ne peut utiliser $\text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1)$ pour "caractériser" des vecteurs dans $\text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), D_1)$.

En remplaçant D_1 par une extension (semi-stable) non cristalline $D_2 \simeq \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}) \text{---} \mathcal{R}_E(x^{k_3})$, on obtient la proposition suivante par des arguments similaires.

Proposition 5.5.12. — (i) L’injection $\mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1}) \hookrightarrow \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_2-1})$ induit une application surjective :

$$u' : \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_2, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1})) \rightarrow \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_2, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_2-1})).$$

(ii) Soit D une extension de D_2 par $\mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1})$ avec $N^2 \neq 0$ sur $D_{\mathrm{dR}}(D) = D_{\mathrm{st}}(D)$ et $u'(D)$ le “push-forward” de D le long de $\mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1}) \hookrightarrow \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_2-1})$, alors $u'(D)$ est une extension (non scindée) de $\mathcal{R}_E(x^{k_3})/t^{k_2+1-k_3}$ par D_0 .

(iii) Le diagramme commutatif d’accouplements (cf. [14, (2.8)]) :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_2, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1})) & \times & \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_2, D_2) & \xrightarrow{\cup} & E \\ \parallel & & \kappa \downarrow & & \parallel \\ \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_2, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1})) & \times & \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}), D_2) & \xrightarrow{\cup} & E \end{array}$$

induit un diagramme commutatif d’accouplements :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_2, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_2-1})) & \times & \mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(D_2, D_2) & \xrightarrow{\cup} & E \\ \parallel & & \kappa \downarrow & & \parallel \\ \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_2, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_2-1})) & \times & \mathrm{Ext}_{\mathrm{HT}}^1(\mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2}), D_2) & \xrightarrow{\cup} & E \end{array}$$

où l’application κ est surjective et l’accouplement du bas est parfait.

Par [14, Lem. 3.29], il existe $a \in E^\times$ et une représentation $\rho_1 : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$ tels que $D_1 \simeq D_{\mathrm{rig}}(\rho_1) \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(\mathrm{nr}(a))$ (où $D_{\mathrm{rig}}(\rho_1)$ est le (φ, Γ) -module sur \mathcal{R}_E associé à ρ_1). On note $\pi^{\mathrm{an}}(D_1) \stackrel{\mathrm{d\acute{e}f}}{=} \pi^{\mathrm{an}}(\rho_1) \otimes \mathrm{nr}(a) \circ \det$ où $\pi^{\mathrm{an}}(\rho_1)$ est la représentation localement analytique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ associée à ρ_1 via la correspondance de Langlands localement analytique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([25], [26]). On suppose que ρ_1 admet un \mathcal{O}_E -réseau invariant dont la réduction $\overline{\rho}_1$ satisfait [14, (A.2)]. Par [14, Prop. 3.30], on a alors une bijection naturelle :

$$(239) \quad \mathrm{pLL} : \mathrm{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, D_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi^{\mathrm{an}}(D_1), \pi^{\mathrm{an}}(D_1)).$$

Noter que la normalisation de la correspondance de Langlands localement analytique (ou p -adique) que l’on utilise ici est celle de [14, § 3.2.3] tordue par le caractère $\varepsilon^{-1} \circ \det$. Explicitement, notons $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times, E)$ les morphismes de groupes continus pour la structure additive sur E , et soit $0 \neq \eta \in \mathcal{L}_{\mathrm{FM}}(D_1 : \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1})) \subseteq \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times, E)$ (cf. [14, Cor. 2.9] et noter que D_1 est déterminé par $\varepsilon^2 x^{k_1}$, εx^{k_2} et η), alors on a $\pi^{\mathrm{an}}(D_1) \simeq \pi(\nu_{1,2}, \eta) \otimes \varepsilon \circ \det$ où $\nu_{1,2} \stackrel{\mathrm{d\acute{e}f}}{=} (k_1, k_2)$ et la représentation $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ est la représentation localement analytique de longueur finie définie dans [14, (3.26)] (notée $\pi(\lambda, \psi)$ dans *loc.cit.*).

Si V, W sont des représentations admissibles dans $\mathrm{Rep}_E^{\mathrm{an}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$ telles que le centre $Z(\mathfrak{gl}_2)$ de $\mathrm{U}(\mathfrak{gl}_2)$ (resp. le centre $Z_{\mathrm{GL}_2}(\mathbb{Q}_p)$) agit sur V, W par le même caractère, on note $\mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(W, V)$ (resp. $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(W, V)$, resp. $\mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}, Z}^1(W, V)$) le sous-espace

de $\text{Ext}_{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(W, V)$ des extensions sur lesquelles $Z(\mathfrak{gl}_2)$ (resp. $Z_{\text{GL}_2}(\mathbb{Q}_p)$, resp. $Z(\mathfrak{gl}_2)$ et $Z_{\text{GL}_2}(\mathbb{Q}_p)$) agit par ce caractère.

Proposition 5.5.13. — *Avec les notations précédentes, supposons de plus $\text{End}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}(\overline{\rho}_1) \simeq k_E$, alors (239) induit une bijection :*

$$(240) \quad \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{inf}}^1(\pi^{\text{an}}(D_1), \pi^{\text{an}}(D_1)).$$

Démonstration. — Par (260), la deuxième partie du (i) du Lemme 6.2.2 (en tordant par $\varepsilon \circ \det$) et [14, Lem. 3.25(2)], on a si η est lisse $\text{Ext}_g^1(\pi^{\text{an}}(D_1), \pi^{\text{an}}(D_1)) \simeq \text{Ext}_{\text{inf}}^1(\pi^{\text{an}}(D_1), \pi^{\text{an}}(D_1))$. Si η est lisse, par [14, Lem. 3.11(3)] et le Lemme 5.5.4 on a aussi $\text{Ext}_g^1(D_1, D_1) \simeq \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1)$. La bijection en (240) découle alors de [14, Lem. 3.28] dans ce cas.

Soit $\pi(\overline{\rho}_1)$ la représentation de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur k_E associée à $\overline{\rho}_1$ via la correspondance de Langlands modulo p (normalisée de sorte que le caractère central de $\pi(\overline{\rho}_1)$ est $\overline{\varepsilon}^{-1} \det(\overline{\rho}_1)$), et $\widehat{\pi}(\rho_1)$ la représentation de Banach unitaire de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E associée à ρ_1 via la correspondance de Langlands p -adique. On utilise les notations de [14, § A.2]. Comme $\text{End}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}(\overline{\rho}_1) \simeq k_E$ (le corps résiduel de E), on a comme en [14, (A.7)] un isomorphisme $\text{Def}_{\pi(\overline{\rho}_1), \text{ortho}} \xrightarrow{\sim} \text{Def}_{\overline{\rho}_1}$ (noter que notre $\pi(\overline{\rho}_1)$ est celui de *loc.cit.* tordu par $\overline{\varepsilon}^{-1} \circ \det$, ce qui est sans conséquence). Soit $\zeta \stackrel{\text{déf}}{=} \det(\rho_1)$, alors $\zeta \varepsilon^{-1}$ est le caractère central de $\widehat{\pi}(\rho_1)$. Comme en [14, (A.9)] (on utilise ici aussi $\text{End}_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}(\overline{\rho}_1) \simeq k_E$), on a un isomorphisme $\text{Def}_{\pi(\overline{\rho}_1), \text{ortho}}^{\zeta \varepsilon^{-1}} \simeq \text{Def}_{\overline{\rho}_1}^{\zeta}$ où $\text{Def}_{\pi(\overline{\rho}_1), \text{ortho}}^{\zeta \varepsilon^{-1}}$ (resp. $\text{Def}_{\overline{\rho}_1}^{\zeta}$) désigne le sous-foncteur de $\text{Def}_{\pi(\overline{\rho}_1), \text{ortho}}$ (resp. de $\text{Def}_{\overline{\rho}_1}$) des déformations avec caractère central égal à $\zeta \varepsilon^{-1}$ (resp. avec déterminant égal à ζ). Par le même argument que dans la preuve de [14, Cor. A.2], on voit que le foncteur de Colmez \mathbf{V} induit une bijection :

$$(241) \quad \mathbf{V} : \text{Ext}_Z^1(\widehat{\pi}(\rho_1), \widehat{\pi}(\rho_1)) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_Z^1(\rho_1, \rho_1)$$

où $\text{Ext}_Z^1(\rho_1, \rho_1)$ désigne les déformations de ρ_1 sur $E[\epsilon]/(\epsilon^2)$ de déterminant ζ . Par la preuve de [14, Prop. 3.30], on en déduit facilement que (239) induit un isomorphisme :

$$(242) \quad \text{Ext}_Z^1(D_1, D_1) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p), Z}^1(\pi^{\text{an}}(D_1), \pi^{\text{an}}(D_1)).$$

Soit $\widetilde{\rho}_1 \in \text{Ext}_Z^1(\rho_1, \rho_1)$, et $\widetilde{\pi}$ l'image réciproque de $\widetilde{\rho}_1$ via \mathbf{V} . Par [26, Th. III.45], on a un morphisme équivariant sous l'action de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$:

$$(243) \quad \Pi_{\zeta \varepsilon^{-1}}(D(\widetilde{\rho}_1)_0) \longrightarrow \widetilde{\pi} / \widetilde{\pi}^{\text{SL}_2(\mathbb{Q}_p)}$$

dont les noyau et conoyau sont de dimension finie sur E , où $D(\widetilde{\rho}_1)_0$ est le (φ, Γ) -module continu de $\widetilde{\rho}_1$ et le foncteur $\Pi_{\zeta \varepsilon^{-1}}$ est comme dans *loc.cit.* Comme $\widetilde{\pi}$ est isomorphe à une extension de $\widehat{\pi}(\rho_1)$ par $\widehat{\pi}(\rho_1)$, on voit (par la structure de $\pi^{\text{an}}(D_1)$) que $\widetilde{\pi}^{\text{SL}_2(\mathbb{Q}_p)} = 0$ et que $\widetilde{\pi}$ n'a pas de quotient de dimension finie équivariant sous l'action de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Donc (243) est une application surjective $\Pi_{\zeta \varepsilon^{-1}}(D(\widetilde{\rho}_1)_0) \twoheadrightarrow \widetilde{\pi}$. Par [29, Th. 3.3] (qui fait l'hypothèse que ρ_1 est absolument irréductible, mais le même argument s'applique au cas où $\text{End}_{\text{Gal}_{\mathbb{Q}_p}}(\rho_1) \simeq E$), si $\widetilde{\rho}_1$ est de Hodge-Tate

alors $\Pi_{\zeta\varepsilon^{-1}}(D(\tilde{\rho}_1)_0)^{\text{an}}$ a un caractère infinitésimal, donc $\tilde{\pi}^{\text{an}}$ aussi par ce qui précède. On en déduit que l'inverse de \mathbf{V} induit une injection (où $\pi^{\text{an}}(\rho_1) = \widehat{\pi}(\rho_1)^{\text{an}}$) :

$$(244) \quad \text{Ext}_{\text{HT},Z}^1(\rho_1, \rho_1) \hookrightarrow \text{Ext}_{\text{inf},Z}^1(\pi^{\text{an}}(\rho_1), \pi^{\text{an}}(\rho_1)).$$

Donc (242) induit une injection :

$$(245) \quad \text{Ext}_{\text{HT},Z}^1(D_1, D_1) \hookrightarrow \text{Ext}_{\text{inf},Z}^1(\pi^{\text{an}}(D_1), \pi^{\text{an}}(D_1)).$$

En outre, il est clair que $\text{Ext}_g^1(D_1, D_1)$ n'est pas contenu dans $\text{Ext}_Z^1(D_1, D_1)$ (cf. [14, Th. 2.7 & Lem. 3.11(2)]). Par [14, Lem. 3.11(3)] et le Lemme 5.5.4, on en déduit :

$$\text{Ext}_g^1(D_1, D_1) + \text{Ext}_{\text{HT},Z}^1(D_1, D_1) = \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1).$$

L'injection (245) combinée avec l'injection (260) ci-dessous et le premier isomorphisme de [14, Lem. 3.28] induisent alors une injection :

$$(246) \quad \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1) \hookrightarrow \text{Ext}_{\text{inf}}^1(\pi^{\text{an}}(D_1), \pi^{\text{an}}(D_1)).$$

En comparant les dimensions (par le Lemme 5.5.4 et le (i) du Lemme 6.2.2), on voit que (246) est une bijection. \square

On note $\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \stackrel{\text{déf}}{=} L(\nu_{1,2}) \otimes_E \text{St}_2^\infty$ où $L(\nu_{1,2})$ est la représentation algébrique de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur E de plus haut poids $\nu_{1,2}$ (par rapport au Borel supérieur de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$), $\nu \stackrel{\text{déf}}{=} (k_1, k_2, k_3) = -\lambda$ et $v_{P_i^-}^\infty(\nu) \stackrel{\text{déf}}{=} L(\nu) \otimes_E v_{P_i^-}^\infty$ où $v_{P_i^-}^\infty \stackrel{\text{déf}}{=} (\text{Ind}_{P_i^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty / 1$ pour $i \in \{1, 2\}$. Par [14, (3.90)] on a une suite de morphismes :

$$(247) \quad \begin{aligned} \text{Ext}_{(\varphi,\Gamma)}^1(D_1, D_1) &\xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi(\nu_{1,2}, \eta), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \xrightarrow{\iota} \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2^-}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta)^+) \end{aligned}$$

où la première application est (239) (en tordant par $\varepsilon^{-1} \circ \det$ à droite), où $\Pi^1(\nu, \eta)^+$ est la représentation définie au début de [14, § 3.3.4] et où l'on renvoie à [14, (3.87) & Lem. 3.42(1)] pour l'application ι .

Proposition 5.5.14. — *Supposons que η ne soit pas lisse, alors l'accouplement parfait dans [14, Th. 3.45] induit un diagramme commutatif d'accouplements parfaits (voir [14, Rem. 3.41] pour $\Pi^1(\nu, \eta)$):*

$$(248) \quad \begin{array}{ccc} \text{Ext}_{(\varphi,\Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_3}), D_1) & \times & \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2^-}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta)^+) & \xrightarrow{\cup} & E \\ u \downarrow & & \uparrow & & \parallel \\ \text{Ext}_{(\varphi,\Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_2+1}), D_1) & \times & \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2^-}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta)) & \xrightarrow{\cup} & E. \end{array}$$

Démonstration. — Par la phrase qui suit [14, (3.90)], la composée en (247) se factorise à travers un isomorphisme :

$$(249) \quad \text{Ext}_{(\varphi,\Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(x^{k_2}\varepsilon)) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2^-}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta)^+).$$

Par la Proposition 5.5.13, la surjection en (259) et la Proposition 6.2.10, (247) induit :

$$(250) \quad \begin{aligned} \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, D_1) &\xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{inf}}^1(\pi(\nu_{1,2}, \eta), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\text{inf}}^1(\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2^-}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta)). \end{aligned}$$

Comme (247) se factorise à travers (249), on voit que (250) induit une surjection (via le (ii) du Lemme 5.5.7) :

$$\text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \rightarrow \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2^-}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta)),$$

qui est un fait un isomorphisme en comparant les dimensions (voir le Lemme 5.5.5 et la preuve de [14, Prop. 3.49]). Par construction, on a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{\text{HT}}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) &\xrightarrow{\sim}& \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2^-}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta)) \\ \downarrow && \downarrow \\ \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_1, \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) &\xrightarrow{\sim}& \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2^-}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta)^+). \end{array}$$

La proposition en découle avec la Proposition 5.5.10 et [14, Th. 3.45]. \square

Par le même argument en utilisant la Proposition 5.5.12 et un analogue symétrique de la Proposition 6.2.10, on obtient la proposition suivante.

Proposition 5.5.15. — Soit $0 \neq \eta' \in \mathcal{L}_{FM}(D_2 : \mathcal{R}_E(\varepsilon x^{k_2})) \subseteq \text{Hom}(\mathbb{Q}_p^\times, E)$ (cf. [14, Cor. 2.9]), alors l'accouplement parfait dans [14, Th. 3.50] induit un diagramme commutatif d'accouplements parfaits :

$$(251) \quad \begin{array}{ccc} \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_2, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1})) &\times& \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_1^-}^\infty(\nu), \Pi^2(\nu, \eta')^+) &\xrightarrow{\cup}& E \\ u' \downarrow && \uparrow && \parallel \\ \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_2, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_2-1})) &\times& \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_1^-}^\infty(\nu), \Pi^2(\nu, \eta')) &\xrightarrow{\cup}& E. \end{array}$$

On peut enfin montrer le (i) du Théorème 5.4.6. Quitte à tordre ρ_p et les représentations de $\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ par $\text{nr}(c^{-1})$, on peut supposer $c = 1$. Soit $D_{\text{rig}}(\rho_p)$ le (φ, Γ) -module de ρ_p sur \mathcal{R}_E et D_1 (resp. D_2) l'unique sous- (φ, Γ) -module (resp. l'unique quotient) de $D_{\text{rig}}(\rho_p)$ de rang 2, donc $E[D_{\text{rig}}(\rho_p)] \subseteq \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(\mathcal{R}_E(x^{k_3}), D_1)$ et aussi $E[D_{\text{rig}}(\rho_p)] \subseteq \text{Ext}_{(\varphi, \Gamma)}^1(D_2, \mathcal{R}_E(\varepsilon^2 x^{k_1}))$. Notons $\pi^{e_1-e_2}(\rho_p)^-$ l'unique extension de $v_{P_2^-}^\infty(\nu)$ par $\Pi^1(\nu, \eta)$ (avec les notations précédentes) telle que $E[\pi^{e_1-e_2}(\rho_p)^-] \subseteq \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2^-}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta))$ est l'orthogonal de $E[u(D_{\text{rig}}(\rho_p))]$ via l'accouplement parfait du bas de (248) (où les espaces ont dimension 2). Donc la représentation $\pi^{e_1-e_2}(\rho_p)^-$ est unique à isomorphisme près, et elle détermine et ne dépend que de $u(D_{\text{rig}}(\rho_p))$. On définit $\pi^{e_2-e_3}(\rho_p)^-$ de manière analogue en utilisant D_2 et l'accouplement parfait du bas de (251). La représentation $\pi^{e_2-e_3}(\rho_p)^-$ détermine et ne dépend que de $u'(D_{\text{rig}}(\rho_p))$. Il suit facilement de la Proposition 5.5.3,

du (ii) de la Proposition 5.5.12, du (ii) de la Proposition 5.1.2 et de la functorialité dans [4, Th. A] que la représentation $\pi^\alpha(\rho_p)^-$ pour $\alpha \in S$ détermine et ne dépend que h_1, h_2, h_3, D et $\text{Fil}_\alpha^{\max}(\rho_p)$ (noter que $u(D_{\text{rig}}(\rho_p))^\vee \otimes_{\mathcal{R}_E} \mathcal{R}_E(\varepsilon^3 x^{k_1+k_2+k_3})$ est isomorphe au (φ, Γ) -module qui correspond via [4, Th. A] à $\wedge_E^2 D$ muni de la filtration à un cran $\text{Fil}^{-h_1-h_2}(\wedge_E^2 D) = \wedge_E^2 D$, $\text{Fil}^{-h_2-h_3}(\wedge_E^2 D) = \text{Fil}^{-h_2}(D) \wedge \text{Fil}^{-h_3}(D) = \text{Fil}_{e_1-e_2}^{\max}(\rho_p)$). Par la fin de [14, § 3.3.4] et [10, Rem. 4.6.3], la représentation $\pi^\alpha(\rho_p)$ contient $\pi^\alpha(\rho_p)^-$ et ces deux représentations se déterminent l'une l'autre. Le (i) du Théorème 5.4.6 en découle.

6. Appendice

Le but de cet appendice est de montrer la Proposition 6.2.10 ci-dessous, essentielle dans la preuve du (i) du Théorème 5.4.6.

6.1. Calculs de Lie. — On commence par des calculs techniques d'invariants sous l'unipotent dans des modules de Verma généralisés pour \mathfrak{gl}_3 .

On a besoin de plusieurs notations : $\mathfrak{x} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{y} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{h} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{z} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathfrak{c} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{h}^2 - 2\mathfrak{h} + 4\mathfrak{x}\mathfrak{y} = \mathfrak{h}^2 + 2\mathfrak{h} + 4\mathfrak{y}\mathfrak{x} \in U(\mathfrak{gl}_2)$ l'élément de Casimir. Rappelons que le centre $Z(\mathfrak{gl}_2)$ de $U(\mathfrak{gl}_2)$ est isomorphe à la E -algèbre polynomiale $E[\mathfrak{c}, \mathfrak{z}]$. On note désormais $P_1 \stackrel{\text{déf}}{=} P_{e_1-e_2} = \begin{pmatrix} \text{GL}_2 & * \\ 0 & \text{GL}_1 \end{pmatrix} \subset \text{GL}_3$, $L_1 \stackrel{\text{déf}}{=} L_{P_1}$, \mathfrak{p}_1 (resp. \mathfrak{l}_1) la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de $P_1(\mathbb{Q}_p)$ (resp. $L_1(\mathbb{Q}_p)$), $N_1 = N_{P_1}$, \mathfrak{n}_1 la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de $N_1(\mathbb{Q}_p)$, et on note avec un $-$ en exposant les opposés : $P_1^-, \mathfrak{p}_1^-, \mathfrak{n}_1^- \dots$. On note aussi :

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{x}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{x}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{x}_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{y}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathfrak{y}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{y}_3 \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{h}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathfrak{h}_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Nous utiliserons les relations de commutations suivantes entre ces éléments :

$$(252) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_2^{r_2} = \mathfrak{y}_2^{r_2} \mathfrak{x}_2 - r_2 \mathfrak{y}_2^{r_2-1} ((r_2 - 1) - \mathfrak{h}_2) \\ \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_3^{r_3} = \mathfrak{y}_3^{r_3} \mathfrak{x}_2 + r_3 \mathfrak{y}_3^{r_3-1} \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{x}_3 \mathfrak{y}_2^{r_2} = \mathfrak{y}_2^{r_2} \mathfrak{x}_3 + r_2 \mathfrak{y}_2^{r_2-1} \mathfrak{x}_1 \\ \mathfrak{x}_3 \mathfrak{y}_3^{r_3} = \mathfrak{y}_3^{r_3} \mathfrak{x}_3 - r_3 \mathfrak{y}_3^{r_3-1} ((r_3 - 1) - (\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)) \\ \mathfrak{h}_2 \mathfrak{y}_3^{r_3} = \mathfrak{y}_3^{r_3} \mathfrak{h}_2 + (-r_3) \mathfrak{y}_3^{r_3} \\ \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_3^{r_3} = \mathfrak{y}_3^{r_3} \mathfrak{x}_1 - r_3 \mathfrak{y}_2 \mathfrak{y}_3^{r_3-1}. \end{cases}$$

On fixe deux entiers $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $k_1 \geq k_2 \geq 0$ et M un $U(\mathfrak{gl}_2) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ -module quelconque tel que $\mathfrak{z}(u) = (k_1 + k_2)u$ pour tout $u \in M$. On voit M comme $U(\mathfrak{l}_1)$ -module via $U(\mathfrak{l}_1) \simeq U(\mathfrak{gl}_2) \otimes_E U(\mathfrak{gl}_1) \twoheadrightarrow U(\mathfrak{gl}_2)$, i.e. le facteur \mathfrak{gl}_1 de \mathfrak{l}_1 agit trivialement sur M , puis comme $U(\mathfrak{p}_1)$ -module via $\mathfrak{p}_1 \twoheadrightarrow \mathfrak{l}_1$.

Lemme 6.1.1. — (i) Le E -espace vectoriel $H^0(\mathfrak{n}_1, U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} M) = (U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} M)[\mathfrak{n}_1]$ est engendré par les éléments de M et les vecteurs de la forme $v = \sum_{i=0}^{r+1} \eta_2^i \eta_3^{r+1-i} \otimes v_i$ pour $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $v_i \in M$ vérifiant (avec $v_{i-1} = 0$ si $i = 0$) :

$$(253) \quad \begin{cases} i(\mathfrak{h} + 2r - (k_1 + k_2))v_i = 2(r + 2 - i)\eta v_{i-1} \\ (r + 2 - i)(\mathfrak{h} - 2r + (k_1 + k_2))v_{i-1} = -2i\mathfrak{x}v_i. \end{cases}$$

(ii) Supposons qu'il existe $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tel que $(\mathfrak{c} - (k_1 - k_2)(k_1 - k_2 + 2))^s(u) = 0$ pour tout $u \in M$, alors pour $v \neq 0$ comme dans le (i) on a $r = k_2$ ou $r = k_1 + 1$ et $\mathfrak{c}(v_i) = (k_1 - k_2)(k_1 - k_2 + 2)v_i$ pour tout v_i .

Démonstration. — (i) Tout élément $v \in U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} M \simeq U(\mathfrak{n}_1^-) \otimes_E M$ s'écrit de manière unique :

$$(254) \quad v = \sum_{r_2, r_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \eta_2^{r_2} \eta_3^{r_3} \otimes v_{r_2, r_3}.$$

Un calcul utilisant (252) donne :

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_2(\eta_2^{r_2} \eta_3^{r_3} \otimes v_{r_2, r_3}) &= \eta_2^{r_2-1} \eta_3^{r_3} \otimes (r_2(\mathfrak{h}_2 - r_2 - r_3 + 1)v_{r_2, r_3}) + \eta_2^{r_2} \eta_3^{r_3-1} \otimes r_3 \eta_1 v_{r_2, r_3} \\ \mathfrak{x}_3(\eta_2^{r_2} \eta_3^{r_3} \otimes v_{r_2, r_3}) &= \eta_2^{r_2} \eta_3^{r_3-1} \otimes (r_3(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 - r_2 - r_3 + 1)v_{r_2, r_3}) + \eta_2^{r_2-1} \eta_3^{r_3} \otimes r_2 \mathfrak{x}_1 v_{r_2, r_3}. \end{aligned}$$

En utilisant (254) on en déduit $\mathfrak{x}_2 v = \mathfrak{x}_3 v = 0$ si et seulement si pour tout $r_2, r_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$:

$$(255) \quad \begin{cases} (r_2 + 1)(\mathfrak{h}_2 - r_2 - r_3)v_{r_2+1, r_3} + (r_3 + 1)\eta_1 v_{r_2, r_3+1} = 0 \\ (r_3 + 1)(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 - r_2 - r_3)v_{r_2, r_3+1} + (r_2 + 1)\mathfrak{x}_1 v_{r_2+1, r_3} = 0. \end{cases}$$

Via l'action de \mathfrak{l}_1 sur M comme ci-dessus et l'hypothèse sur l'action de \mathfrak{z} , on voit que \mathfrak{h}_2 agit comme $-\frac{\mathfrak{h}-k_1-k_2}{2}$ et $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)$ comme $\frac{\mathfrak{h}+k_1+k_2}{2}$, et (255) est équivalent à :

$$\begin{cases} (r_2 + 1)\left(-\frac{\mathfrak{h}-k_1-k_2}{2} - r_2 - r_3\right)v_{r_2+1, r_3} + (r_3 + 1)\eta v_{r_2, r_3+1} = 0 \\ (r_3 + 1)\left(\frac{\mathfrak{h}+k_1+k_2}{2} - r_2 - r_3\right)v_{r_2, r_3+1} + (r_2 + 1)\mathfrak{x}v_{r_2+1, r_3} = 0. \end{cases}$$

On en déduit (i) en remarquant que $v - \sum_{r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left(\sum_{i=0}^{r+1} \eta_2^i \eta_3^{r+1-i} \otimes v_{i, r+1-i}\right) \in M$.

(ii) En appliquant \mathfrak{x} à la première équation en (253) on a (avec $\mathfrak{x}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\mathfrak{x} - 2\mathfrak{x}$) :

$$i(\mathfrak{h} + 2r - 2 - (k_1 + k_2))\mathfrak{x}v_i = \mathfrak{x}i(\mathfrak{h} + 2r - (k_1 + k_2))v_i = 2(r + 2 - i)\mathfrak{x}\eta v_{i-1}$$

et en appliquant $\mathfrak{h} + 2r - 2 - (k_1 + k_2)$ à la seconde :

$$-2i(\mathfrak{h} + 2r - 2 - (k_1 + k_2))\mathfrak{x}v_i = (r + 2 - i)(\mathfrak{h} + 2r - 2 - (k_1 + k_2))(\mathfrak{h} - 2r + (k_1 + k_2))v_{i-1}.$$

Ces deux égalités impliquent pour $i \in \{0, \dots, r + 1\}$ (donc $r + 2 - i \neq 0$) :

$$(\mathfrak{h}^2 - 2\mathfrak{h} + 4\mathfrak{x}\eta)v_{i-1} = \mathfrak{c}v_{i-1} = (k_1 + k_2 - 2r)(k_1 + k_2 + 2 - 2r)v_{i-1}.$$

De plus, par l'hypothèse en (ii) on en déduit pour $i \in \{0, \dots, r + 1\}$ et $v_{i-1} \neq 0$:

$$(k_1 + k_2 - 2r)(k_1 + k_2 + 2 - 2r) = (k_1 - k_2)(k_1 - k_2 + 2),$$

d'où $r = k_2$ ou $r = k_1 + 1$. De même on obtient $\mathfrak{c}(v_i) = (k_1 - k_2)(k_1 - k_2 + 2)v_i$ pour $i \in \{0, \dots, r+1\}$ en appliquant $\mathfrak{h} - 2r + 2 + (k_1 + k_2)$ à la première équation en (253) et \mathfrak{h} à la seconde, d'où (ii). \square

Le lemme technique suivant sera important dans la suite.

Lemme 6.1.2. — Soit $u \in M$ tel que $\mathfrak{c}(u) = (k_1 - k_2)(k_1 - k_2 + 2)u$, alors on a :

$$\sum_{i=0}^{k_2+1} \mathfrak{h}_2^i \mathfrak{h}_3^{k_2+1-i} \otimes u_i \in H^0(\mathfrak{n}_1, U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} M)$$

$$\text{où } u_0 \stackrel{\text{déf}}{=} \mathfrak{x}^{k_2+1}u \text{ et } u_i \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\prod_{j=1}^i \left(-\frac{k_2+2-j}{2j} \right) \right) \left(\prod_{j=1}^i (\mathfrak{h} + (k_1 - k_2) + 2j) \right) \mathfrak{x}^{k_2+1-i}u.$$

Démonstration. — Posons $a_0 \stackrel{\text{déf}}{=} 1$ et, pour $i \in \{1, \dots, k_2+1\}$, $a_i \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{j=1}^i \left(-\frac{k_2+2-j}{2j} \right)$, alors $(-2i)a_i = (k_2 + 2 - i)a_{i-1}$. On a (avec $\mathfrak{h}\mathfrak{x} = \mathfrak{x}\mathfrak{h} + 2\mathfrak{x}$) :

$$\begin{aligned} & (k_2 + 2 - i)(\mathfrak{h} + k_1 - k_2)u_{i-1} \\ &= (k_2 + 2 - i)(\mathfrak{h} + k_1 - k_2)a_{i-1} \left(\prod_{j=1}^{i-1} (\mathfrak{h} + (k_1 - k_2) + 2j) \right) \mathfrak{x}^{k_2+2-i}u \\ &= (k_2 + 2 - i)a_{i-1} \mathfrak{x}(\mathfrak{h} + k_1 - k_2 + 2) \left(\prod_{j=1}^{i-1} (\mathfrak{h} + k_1 - k_2 + 2j + 2) \right) \mathfrak{x}^{k_2+1-i}u \\ &= -2i\mathfrak{x}u_i. \end{aligned}$$

Avec $\mathfrak{c}(u) = (k_1 - k_2)(k_1 - k_2 + 2)u$, on a aussi par ailleurs :

$$\begin{aligned} & i(\mathfrak{h} - (k_1 - k_2))u_i \\ &= ia_i(\mathfrak{h}^2 + 2\mathfrak{h} - (k_1 - k_2)(k_1 - k_2 + 2)) \left(\prod_{j=2}^i (\mathfrak{h} + (k_1 - k_2) + 2j) \right) \mathfrak{x}^{k_2+1-i}u \\ &= ia_i(-4\mathfrak{h}\mathfrak{x}) \left(\prod_{j=2}^i (\mathfrak{h} + (k_1 - k_2) + 2j) \right) \mathfrak{x}^{k_2+1-i}u \\ &= 2(k_2 + 2 - i)a_{i-1} \mathfrak{h} \left(\prod_{j=1}^{i-1} (\mathfrak{h} + (k_1 - k_2) + 2j) \right) \mathfrak{x}^{k_2+2-i}u = 2(k_2 + 2 - i)\mathfrak{h}u_{i-1} \end{aligned}$$

en utilisant encore $\mathfrak{x}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\mathfrak{x} - 2\mathfrak{x}$ pour l'avant-dernière égalité. Le lemme suit alors du Lemme 6.1.1 appliqué avec $r = k_2$. \square

6.2. Extensions avec un caractère infinitésimal. — On démontre la Proposition 6.2.10.

On conserve les notations du paragraphe précédent et celles du § 5.5. On rappelle que $\nu_{1,2} = (k_1, k_2)$, $\eta : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow E$ est un morphisme continu de groupes (pour la structure additive à droite), $\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) = L(\nu_{1,2}) \otimes_E \mathrm{St}_2^\infty$ et que l'on dispose de la représentation localement analytique de longueur finie $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ ([14, (3.26)]). On suppose dans la suite que $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ vérifie [14, Hyp. 3.19]. C'est une hypothèse faible. En effet, par la discussion qui suit [14, Lem. 3.29], quitte à tordre $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ par un caractère non ramifié on peut supposer $\pi(\nu_{1,2}, \eta) \simeq \pi^{\mathrm{an}}(\rho)$ où $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathrm{GL}_2(E)$ et $\pi^{\mathrm{an}}(\rho)$ correspond à ρ via la correspondance de Langlands localement analytique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ([25], [26]). Si ρ admet un \mathcal{O}_E -réseau invariant dont la réduction $\bar{\rho}$ satisfait [14, (A.2)], alors [14, Hyp. 3.19] est vérifiée par [14, Prop. 3.30].

Lemme 6.2.1. — (i) Le centre $Z(\mathfrak{gl}_2)$ agit sur $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ par l'unique caractère ξ tel que $\xi(\mathfrak{z}) = k_1 + k_2$ et $\xi(\mathfrak{c}) = (k_1 - k_2)(k_1 - k_2 + 2)$.
 (ii) On a $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) = 2$.
 (iii) On a $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}, Z}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) = 1$.

Démonstration. — (i) Il est clair que $Z(\mathfrak{gl}_2)$ agit sur $\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$ par ξ . Par [59, Prop. 3.7], pour $\nabla \in Z(\mathfrak{gl}_2)$ on a un morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant $\nabla - \xi(\nabla) : \pi(\nu_{1,2}, \eta) \rightarrow \pi(\nu_{1,2}, \eta)$, qui induit donc un morphisme $\pi(\nu_{1,2}, \eta)/\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \rightarrow \pi(\nu_{1,2}, \eta)$. Comme le socle de $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ est $\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$, on en déduit (i).

(ii) Comme $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) = 4$ ([14, Lem. 3.17(ii)]), on peut associer à cet espace une extension $\tilde{\pi}(\nu_{1,2}, \eta)$ de $\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2})^{\oplus 4}$ par $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$. Soit $\nabla \in Z(\mathfrak{gl}_2)$, le morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant $\nabla - \xi(\nabla) : \tilde{\pi}(\nu_{1,2}, \eta) \rightarrow \tilde{\pi}(\nu_{1,2}, \eta)$ est nul sur $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ par (i), donc se factorise comme suit :

$$\tilde{\pi}(\nu_{1,2}, \eta) \rightarrow \mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2})^{\oplus 4} \rightarrow \mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \hookrightarrow \tilde{\pi}(\nu_{1,2}, \eta).$$

On en déduit que le sous-espace de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta))$ des extensions sur lesquelles ∇ agit par $\xi(\nabla)$ est au moins de dimension 3. Appliquant ceci à $\nabla = \mathfrak{c}$ et $\nabla = \mathfrak{z}$, on en déduit $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \geq 2$ puisque $Z(\mathfrak{g}) \simeq E[\mathfrak{c}, \mathfrak{z}]$. Soit $\pi(\nu_{1,2}, \eta)^-$ la sous-représentation de $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ définie en [14, (3.23)], par [14, (3.29)] on a une injection :

$$(256) \quad \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^-) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)),$$

et il suit de [14, Lem. 3.17(2) & (4)] que $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^-) = 3$. De plus, par [14, Lem. 3.20(2)], le foncteur de Jacquet-Emerton (par rapport au Borel supérieur) induit une bijection (avec les notations de *loc.cit.* à droite) :

$$(257) \quad \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^-) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\delta_{\nu_{1,2}}(|\cdot| \otimes |\cdot|^{-1}), \delta_{\nu_{1,2}}(|\cdot| \otimes |\cdot|^{-1}))_\eta.$$

On voit une extension à droite dans (257) comme un caractère du tore $T(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans $(E[\epsilon]/(\epsilon^2))^\times$ et on la note $\delta_{\nu_{1,2}}(|\cdot| \otimes |\cdot|^{-1})(1 + \Psi\epsilon)$ avec $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ où $\psi_i : \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow E$ (par définition de l'espace à droite on a $\psi_1 - \psi_2 \in E\eta$). Si V est

l'extension de $\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$ par $\pi(\nu_{1,2}, \eta)^-$ associée à $\delta_{\nu_{1,2}}(|\cdot| \otimes |\cdot|^{-1})(1 + \Psi\epsilon)$ par (257), il suit de [14, Rem. 3.21] et de la définition du foncteur de Jacquet-Emerton que l'on a une injection \mathfrak{b} -équivariante :

$$(258) \quad \delta_{\nu_{1,2}}(|\cdot| \otimes |\cdot|^{-1})(1 + \Psi\epsilon) \hookrightarrow V$$

où \mathfrak{b} est la \mathbb{Q}_p -algèbre de Lie de $B(\mathbb{Q}_p)$ et l'action de \mathfrak{n} à gauche est triviale. Un examen de l'action de \mathfrak{z} et $\mathfrak{c} = \mathfrak{h}^2 + 2\mathfrak{h} + 4\mathfrak{h}\mathfrak{x}$ sur l'image de (258) (en utilisant que \mathfrak{r} annule cette image) donne que, si V a un caractère infinitésimal et si η n'est pas lisse, alors $\psi_1 = \psi_2 \in E$ val. Par (257) cela implique $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^-) \leq 1$, i.e. $\dim_E (\mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^-) \cap \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta))) \leq 1$ qui implique $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \leq 2$ (par les dimensions de ces deux espaces). On en déduit (ii) dans le cas η non lisse. Si η est lisse, l'injection $\tilde{I}(\nu_{1,2}) \hookrightarrow \pi(\nu_{1,2}, \eta)$ (cf. [14, § 3.2.2] pour $\tilde{I}(\nu_{1,2})$) induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \tilde{I}(\nu_{1,2})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)).$$

Par une variante facile de la preuve de [14, Lem. 3.20], le foncteur de Jacquet-Emerton induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \tilde{I}(\nu_{1,2})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\delta_{\nu_{1,2}}, \delta_{\nu_{1,2}})$$

d'où on déduit comme précédemment $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \leq 2$.

(iii) Par [14, Lem. 3.17] on a $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) = 2$. Comme $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2})) = 0$ alors que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta))$ contient clairement (via $\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \hookrightarrow \pi(\nu_{1,2}, \eta)$) l'unique extension localement algébrique non scindée de $\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$ par lui-même, on en déduit $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}, \mathbb{Z}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \leq 1$. Soit $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{z}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta))$ le sous-espace des extensions sur lesquelles \mathfrak{z} agit par $k_1 + k_2$. On a clairement une inclusion :

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) + \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \subseteq \mathrm{Ext}_{\mathfrak{z}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)).$$

Comme $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{z}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \neq \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta))$ (par exemple par (257) et (256)), on en déduit $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}, \mathbb{Z}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \geq 1$ en comparant les dimensions. Cela termine la preuve de (iii). \square

Le lemme suivant est utilisé au § 5.5.

Lemme 6.2.2. — (i) On a une suite exacte courte :

$$(259) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\pi(\nu_{1,2}, \eta)/\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\pi(\nu_{1,2}, \eta), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \\ \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \rightarrow 0.$$

En particulier, $\dim_E \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\pi(\nu_{1,2}, \eta), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) = 3$.

(ii) Soit $\mathrm{Ext}_g^1(\pi(\nu_{1,2}, \eta), \pi(\nu_{1,2}, \eta))$ le sous-espace engendré par les extensions $\tilde{\pi}$ telles que les vecteurs localement algébriques de $\tilde{\pi}$ contiennent strictement $\mathrm{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$ (cf. la discussion avant [14, Lem. 3.25]). On a une injection naturelle :

$$(260) \quad \mathrm{Ext}_g^1(\pi(\nu_{1,2}, \eta), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{inf}}^1(\pi(\nu_{1,2}, \eta), \pi(\nu_{1,2}, \eta)).$$

Démonstration. — (i) Par [14, (3.28)], on a une suite exacte comme en (259) avec $\text{Ext}_{\text{inf}}^1$ remplacé par $\text{Ext}_{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1$. Il suffit donc de montrer que toute extension $\tilde{\pi}$ de $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ par $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ admet un caractère infinitésimal si et seulement si sa sous-représentation $\tilde{\pi}_0$ donnée par “pull-back” le long de $\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \hookrightarrow \pi(\nu_{1,2}, \eta)$ admet un caractère infinitésimal. Le sens “seulement si” est clair. Si $\tilde{\pi}_0$ admet un caractère infinitésimal ξ , alors pour tout $\nabla \in Z(\mathfrak{gl}_2)$, le morphisme $\nabla - \xi(\nabla) : \tilde{\pi} \rightarrow \tilde{\pi}$ se factorise à travers $\tilde{\pi}/\tilde{\pi}_0 \simeq \pi(\nu_{1,2}, \eta)/\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \rightarrow \tilde{\pi}$. Comme le socle $\text{soc}_{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \pi(\nu_{1,2}, \eta)$ de $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ est $\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$, le morphisme $\nabla - \xi(\nabla)$ est nul. Le sens “si” en découle. La seconde partie de (i) découle alors de [14, Lem. 3.17(2)] et du (ii) du Lemme 6.2.1.

(ii) Si $\tilde{\pi} \in \text{Ext}_g^1(\pi(\nu_{1,2}, \eta), \pi(\nu_{1,2}, \eta))$, on voit facilement que $\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$ a multiplicité 2 dans la sous-représentation localement algébrique $\tilde{\pi}^{\text{alg}}$ de $\tilde{\pi}$. Pour tout $\nabla \in Z(\mathfrak{gl}_2)$, $\nabla - \xi(\nabla)$ annule $\tilde{\pi}^{\text{alg}}$ (où ξ est le caractère infinitésimal). Utilisant (encore) $\text{soc}_{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} \pi(\nu_{1,2}, \eta) \simeq \text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$, on en déduit que $\nabla - \xi(\nabla)$ annule tout $\tilde{\pi}$. \square

On note $\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}}$ l’unique extension non scindée de $\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$ par $\pi(\nu_{1,2}, \eta)$ (à isomorphisme près) avec un caractère central et un caractère infinitésimal donnée par le (iii) du Lemme 6.2.1. La représentation localement analytique $\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1$ de $P_1(\mathbb{Q}_p)$ est en particulier un $U(\mathfrak{p}_1)$ -module.

Lemme 6.2.3. — *Pour tout $u \in \text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$, il existe :*

$$\tilde{u} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=0}^{k_2+1} \eta_2^i \eta_3^{k_2+1-i} \otimes \tilde{u}_i \in H^0(\mathfrak{n}_1, U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} (\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1))$$

tel que \tilde{u}_{k_2+1} a pour image u via la surjection naturelle $\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \twoheadrightarrow \text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$.

Démonstration. — Soit $v \in \text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$ tel que $(\prod_{j=1}^i (-\frac{k_2+2-j}{2j})) (\prod_{j=1}^{k_2+1} (\mathfrak{h} + (k_1 - k_2) + 2j)) v = u$ (en notant que $\mathfrak{h} + k_1 - k_2 + 2j$ est une bijection sur $\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$ pour $1 \leq j \leq k_2 + 1$). Soit \tilde{v} un relevé arbitraire de v dans $\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}}$ via $\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \twoheadrightarrow \text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$. Le résultat suit du Lemme 6.1.2 appliqué à $u = \tilde{v}$. \square

Soit $\text{Rep}_E^{\text{an}, z}(L_1(\mathbb{Q}_p))$ la sous-catégorie pleine de $\text{Rep}_E^{\text{an}}(L_1(\mathbb{Q}_p))$ des représentations qui sont unions croissantes de BH -sous-espaces stables sous $Z_{L_1}(\mathbb{Q}_p)$ (cf. [33]). Pour V dans $\text{Rep}_E^{\text{an}, z}(L_1(\mathbb{Q}_p))$, suivant [33] on note $I_{P_1}^{\text{GL}_3}(V)$ la sous-représentation fermée de $(\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V)^{\text{an}}$ engendrée par l’image de $V \otimes_E \delta_{P_1} \hookrightarrow J_{P_1}((\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V)^{\text{an}})$ ([33, Lem. 0.3]) dans $(\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V)^{\text{an}}$ via le relèvement canonique :

$$(261) \quad J_{P_1}((\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V)^{\text{an}}) \longrightarrow (\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V)^{\text{an}}$$

où δ_{P_1} est le caractère module de $P_1(\mathbb{Q}_p)$ et J_{P_1} le foncteur de Jacquet-Emerton relativement à P_1 . Rappelons que l’application (261) dépend du choix d’un sous-groupe ouvert compact de $N_1(\mathbb{Q}_p) = N_{P_1}(\mathbb{Q}_p)$ mais pas la représentation $I_{P_1}^{\text{GL}_3}(V)$. Le lemme facile suivant sera utile.

Lemme 6.2.4. — Soit $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow 0$ une suite exacte courte dans $\text{Rep}_E^{\text{an},z}(L_1(\mathbb{Q}_p))$.

(i) L'injection naturelle $(\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V_1)^{\text{an}} \hookrightarrow (\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V_2)^{\text{an}}$ induit une injection $I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(V_1) \hookrightarrow I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(V_2)$.

(ii) La surjection naturelle $(\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V_2)^{\text{an}} \twoheadrightarrow (\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V_3)^{\text{an}}$ induit une surjection $I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(V_2) \twoheadrightarrow I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(V_3)$.

Démonstration. — Le lemme suit facilement des définitions et du diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_1 \otimes_E \delta_{P_1} & \longrightarrow & V_2 \otimes_E \delta_{P_1} & \longrightarrow & V_3 \otimes_E \delta_{P_1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V_1)^{\text{an}} & \longrightarrow & (\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V_2)^{\text{an}} & \longrightarrow & (\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V_3)^{\text{an}} \longrightarrow 0. \end{array}$$

□

Soit $\nu \stackrel{\text{déf}}{=} (k_1, k_2, k_3)$ vu comme poids dominant (par rapport au Borel supérieur de GL_3), on utilise dans la suite les notations de [14, §§ 3.2.2, 3.3.1 & 3.3.3], sauf que l'on remplace $\lambda, \lambda_{1,2}$ par $\nu, \nu_{1,2}$ et que la “dot action” est ici par rapport au Borel inférieur (cf. § 3.1) alors que dans *loc. cit.* elle est par rapport au Borel supérieur. Ainsi par exemple la représentation $I(s \cdot \lambda_{1,2})$ de [14, § 3.2.2] devient ici $I(-s \cdot (-\nu_{1,2}))$, le $U(\mathfrak{gl}_3)$ -module $\bar{L}(-s_1 \cdot \lambda)$ de [14, § 3.3.1] devient $L^-(s_1 \cdot (-\nu))$, etc. Pour $i \in \{1, 3, 5\}$ on note aussi $C_{1,i} \stackrel{\text{déf}}{=} C_{e_1-e_2,i}$ et $C_{2,i} \stackrel{\text{déf}}{=} C_{e_2-e_3,i}$ (cf. (223)).

On note $\mathcal{V}_1 \stackrel{\text{déf}}{=} L(\nu) \otimes_E (\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \text{St}_2^\infty \boxtimes 1)^\infty$ (cf. [10, (53)]), \mathcal{V}_2 l'unique sous-représentation de $(\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3})^{\text{an}}$ donnée par $\mathcal{F}_{P_2^-}^{\text{GL}_3}(L^-(s_1 \cdot (-\nu)), 1 \boxtimes (\text{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty)$ (une extension non scindée de $C_{1,1} = \mathcal{F}_{P_2^-}^{\text{GL}_3}(L^-(s_1 \cdot (-\nu)), 1 \boxtimes \text{St}_2^\infty)$ par $\mathcal{F}_{P_2^-}^{\text{GL}_3}(L^-(s_1 \cdot (-\nu)), 1)$), $\mathcal{V}_3 \stackrel{\text{déf}}{=} L(\nu) \otimes_E (\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} 1)^\infty$ et :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_4 \stackrel{\text{déf}}{=} C_{1,3} &= \mathcal{F}_{P_2^-}^{\text{GL}_3}(L^-(s_1 \cdot (-\nu)), |\cdot|^{-1} \boxtimes (\text{Ind}_{B_2^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)} |\cdot| \otimes 1)^\infty) \\ &\simeq \text{soc}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} (\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \tilde{I}(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3})^{\text{an}} \end{aligned}$$

où $B_2^-(\mathbb{Q}_p)$ est le Borel des matrices triangulaires inférieures dans $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.

Lemme 6.2.5. — On a $\mathcal{V}_1 \simeq I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \boxtimes x^{k_3})$, $\mathcal{V}_2 \simeq I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(I(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3})$, $\mathcal{V}_3 \simeq I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(L(\nu_{1,2}) \boxtimes x^{k_3})$ et $\mathcal{V}_4 \simeq I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(\tilde{I}(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3})$.

Démonstration. — On montre l'énoncé pour \mathcal{V}_2 , les autres cas étant analogues ou plus simples. Pour tout constituant irréductible W de $(\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3})^{\text{an}} / \mathcal{V}_2$

(cf. la liste [14, (3.70)]), on montre que $(I(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3}) \otimes_E \delta_{P_1}$ n'est pas une sous-représentation de $J_{P_1}(W)$. En effet, si l'on a $(I(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3}) \otimes_E \delta_{P_1} \hookrightarrow J_{P_1}(W)$, alors en appliquant $J_{B \cap L_1}$ puis [40, Th. 5.3(2)], on en déduit une injection $T(\mathbb{Q}_p)$ -équivariante :

$$(262) \quad \delta_{-(s_1 \cdot (-\nu))}(| \cdot |^2 \otimes 1 \otimes | \cdot |^{-2}) \hookrightarrow J_B(W).$$

Mais on déduit facilement de [13, Th. 4.3] et [53, Cor. 3.2.11] (et de la structure des modules de Verma pour \mathfrak{gl}_3) que (262) ne peut exister. Cela implique que l'image de $(I(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3}) \otimes_E \delta_{P_1} \hookrightarrow J_{P_1}((\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} I(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3})^{\text{an}})$ tombe dans $J_{P_1}(\mathcal{V}_2)$, et donc par définition $I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(I(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3}) \hookrightarrow \mathcal{V}_2$. Un argument analogue montre aussi que $(I(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3}) \otimes_E \delta_{P_1}$ ne peut se plonger dans $J_{P_1}(\mathcal{F}_{P_2^-}^{\text{GL}_3}(L^-(s_1 \cdot (-\nu)), 1))$. On en déduit $I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(I(-s \cdot (-\nu_{1,2})) \boxtimes x^{k_3}) \simeq \mathcal{V}_2$. \square

Soit $\mathcal{W} \stackrel{\text{déf}}{=} \ker((\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes x^{k_3})^{\text{an}} \twoheadrightarrow \widetilde{\Pi}^1(\nu, \eta))$ (cf. la discussion qui suit [14, Rem. 3.41]), alors \mathcal{W} est isomorphe à une extension de $L(\nu)$ par $v_{P_2^-}^{\text{an}}(\nu)$. On note \mathcal{V} l'unique sous-représentation de $(\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes x^{k_3})^{\text{an}}$ qui est une extension de $\Pi^1(\nu, \eta)$ par \mathcal{W} (cf. [14, Lem. 3.40 & Rem. 3.41] pour $\Pi^1(\nu, \eta)$).

Lemme 6.2.6. — *On a une injection $I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes x^{k_3}) \hookrightarrow \mathcal{V}$ qui est un isomorphisme si η n'est pas lisse.*

Démonstration. — Par le même argument que celui dans la preuve du Lemme 6.2.5, on montre que, pour tout constituant irréductible W de $(\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes x^{k_3})^{\text{an}}/\mathcal{V}$, aucun des constituants irréductibles de $\pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes x^{k_3}$ ne peut s'injecter dans $J_{P_1}(W)$. On en déduit que l'injection $\pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes x^{k_3} \hookrightarrow J_{P_1}((\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes x^{k_3})^{\text{an}})$ se factorise par $J_{P_1}(\mathcal{V})$ et donc $I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes x^{k_3}) \subseteq \mathcal{V}$. Par le Lemme 6.2.4 et le Lemme 6.2.5, on montre facilement que tous les \mathcal{V}_i pour $i = 1, \dots, 4$ apparaissent comme sous-quotients de $I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes x^{k_3})$. Lorsque η n'est pas lisse, par la structure de \mathcal{V} (cf. [14, § 3.3.3], cf. aussi [14, Rem. 3.41] avec [55, Lem. 4.31 & Lem. 4.34] pour la structure de $\Pi^1(\nu, \eta)$), il n'est pas difficile de montrer que \mathcal{V} est la plus petite sous-représentation de $(\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes x^{k_3})^{\text{an}}$ contenant le constituant \mathcal{V}_4 . Cela termine la preuve. \square

Notons \mathcal{V}' l'unique sous-représentation de $(\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes x^{k_3})^{\text{an}}$ qui est une extension de $\Pi^1(\nu, \eta)^+$ par \mathcal{W} (cf. [14, § 3.3.4] pour $\Pi^1(\nu, \eta)^+$). La représentation \mathcal{V}' est donc aussi une extension de $C_{2,1} = \mathcal{F}_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(L^-(s_2 \cdot (-\nu)), \text{St}_2^\infty \boxtimes 1)$ par \mathcal{V} . Par [64, Cor. 4.9, (4.41), (4.42) & (4.44)], il n'est pas difficile de vérifier que l'on a :

$$(263) \quad \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(\text{St}_3^\infty(\nu), C_{2,1}) = \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(\text{St}_3^\infty(\nu), \mathcal{F}_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(L^-(s_2 \cdot (-\nu)), 1)) = 0.$$

scindé, on obtient facilement que $\iota(V)^+$ est la plus petite sous-représentation fermée de $(\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} V \boxtimes x^{k_3})^{\text{an}}$ qui contient (en sous-quotient) \mathcal{V}_4 et deux copies de \mathcal{V}_1 , d'où $I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(V \boxtimes x^{k_3}) \simeq \iota(V)^+$. Cela montre (i) \Rightarrow (ii) (et aussi (ii) \Rightarrow (iii)). Réciproquement, supposons ce sous-quotient de $\iota(V)$ scindé. Avec (263) on en déduit $\iota(V)^+/\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}_1 \oplus C_{2,1}$ et en particulier que $\iota(V)^+$ contient une sous-représentation de la forme $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1$, qui doit contenir $I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(V \boxtimes x^{k_3})$ par le même argument que pour la première assertion du Lemme 6.2.6. Cela montre (iii) \Rightarrow (ii) et termine la preuve. \square

Remarque 6.2.8. — Si η est lisse, on peut encore montrer par des arguments similaires que les (ii) et (iii) du Lemme 6.2.7 sont équivalents.

Lemme 6.2.9. — Si η n'est pas lisse, alors $C_{2,1}$ n'est pas un constituant de $I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes x^{k_3})$ (cf. avant le Lemme 6.2.3 pour $\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}}$).

Démonstration. — En tordant par $x^{-k_3} \circ \det$, on peut supposer $k_3 = 0$ (et $k_1 \geq k_2 \geq 0$). Les injections naturelles (cf. par exemple (64) pour la seconde) :

$$\begin{aligned} C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1) &\hookrightarrow C_c^{\text{an}}(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1) \\ &\hookrightarrow (\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)^{\text{an}} \end{aligned}$$

induisent par [33, (2.8.7) & (2.5.27)] un morphisme $(U(\mathfrak{gl}_3), P_1(\mathbb{Q}_p))$ -équivariant :

$$(265) \quad \iota_1 : U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1) \longrightarrow (\text{Ind}_{P_1^-(\mathbb{Q}_p)}^{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)} \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)^{\text{an}}$$

dont l'image tombe dans $I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)$. De plus par [33, (2.8.7)] le morphisme ι_1 se factorise comme suit (cf. [33, Def. 2.5.21] pour C_c^{lp}) :

$$(266) \quad \begin{aligned} U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1) &\longrightarrow C_c^{\text{lp}}(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1) \\ &\hookrightarrow C_c^{\text{an}}(N_1(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E (\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1), \end{aligned}$$

où \mathfrak{n}_1 agit sur $C_c^{\text{an}}(N_1(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E (\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)$ via l'action diagonale avec l'action triviale sur le deuxième facteur. Comme $H^0(\mathfrak{n}_1, C_c^{\text{an}}(N_1(\mathbb{Q}_p), E)) \simeq C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), E)$ on a :

$$\begin{aligned} H^0(\mathfrak{n}_1, C_c^{\text{an}}(N_1(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E (\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)) &\simeq C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), E) \otimes_E (\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1) \\ &\simeq C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1). \end{aligned}$$

Appliquant $H^0(\mathfrak{n}_1, -)$ à (266) et comme \mathfrak{n}_1 annule $C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)$, on déduit que (265) induit un morphisme encore noté ι_1 :

$$\begin{aligned} \iota_1 : H^0(\mathfrak{n}_1, U(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{U(\mathfrak{p}_1)} C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)) &\longrightarrow C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1) \\ &\hookrightarrow I_{P_1^-}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1). \end{aligned}$$

L'énoncé du Lemme 6.2.3 est encore valable, par la même preuve, en remplaçant $\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$ par $C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \boxtimes 1)$ et le \mathfrak{p}_1 -module $\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1$ par

$C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)$ (en remarquant que le facteur en plus $C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), E)$ n'affecte pas l'action de \mathfrak{p}_1). Donc, pour tout $u \in C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \boxtimes 1)$, il existe \tilde{u} dans la source de ι_1 vérifiant les conditions du Lemme 6.2.3. Soit $v = \iota_1(\tilde{u}) \in C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)$, on a donc $\iota_1(\tilde{u} - 1 \otimes v) = 0$. On a par ailleurs un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (\pi(\nu_{1,2}, \eta) \boxtimes 1) \otimes_E \delta_{P_1} & \longrightarrow & (\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1) \otimes_E \delta_{P_1} & \longrightarrow & (\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \boxtimes 1) \otimes_E \delta_{P_1} \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & J_{P_1}(\mathcal{V}) & \longrightarrow & J_{P_1}(I_{P_1}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)) & \longrightarrow & J_{P_1}(I_{P_1}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)/\mathcal{V}) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{V} & \longrightarrow & I_{P_1}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1) & \longrightarrow & I_{P_1}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)/\mathcal{V}
\end{array}$$

qui induit un diagramme commutatif avec flèches horizontales surjectives :

$$\begin{array}{ccc}
\text{U}(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{\text{U}(\mathfrak{p}_1)} C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1) & \xrightarrow{\text{pr}} & \text{U}(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{\text{U}(\mathfrak{p}_1)} C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \boxtimes 1) \\
\downarrow \iota_1 & & \downarrow \iota_2 \\
I_{P_1}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1) & \longrightarrow & I_{P_1}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)/\mathcal{V}
\end{array}$$

où ι_2 est induit par la composée verticale de droite du diagramme juste avant. Soit $0 \neq u \in C_c^\infty(N_1(\mathbb{Q}_p), \text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \boxtimes 1)$, comme $\iota_1(\tilde{u} - 1 \otimes v) = 0$ on a $\iota_2(\text{pr}(\tilde{u} - 1 \otimes v)) = 0$. Mais $\text{pr}(\tilde{u} - 1 \otimes v) \neq 0$ puisque, par construction (cf. Lemme 6.2.3), il contient le terme non nul $\eta_2^{k_2+1} \otimes u$. On en déduit que l'application ι_2 n'est pas injective.

Supposons maintenant que $C_{2,1}$ apparaisse dans $I_{P_1}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)$. Par l'équivalence entre (ii) et (iii) dans le Lemme 6.2.7 et le fait que l'unique extension non scindée de \mathcal{V}_1 par $C_{2,1}$ est isomorphe à $\mathcal{F}_{P_1}^{\text{GL}_3}((\text{U}(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{\text{U}(\mathfrak{p}_1^-)} L^-(-\nu)_{P_1})^\vee, \text{St}_2^\infty \boxtimes 1)$ où $(-)^\vee$ est la dualité en [41, § 3.2] (car d'une part on a $\dim_E \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(\mathcal{V}_1, C_{2,1}) \leq 1$ par [14, Lem. 3.42(2)] et (263), d'autre part $\mathcal{F}_{P_1}^{\text{GL}_3}((\text{U}(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{\text{U}(\mathfrak{p}_1^-)} L^-(-\nu)_{P_1})^\vee, \text{St}_2^\infty \boxtimes 1)$ est une telle extension non scindée par [53, Cor. 3.2.11]), on obtient :

$$I_{P_1}^{\text{GL}_3}(\pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}} \boxtimes 1)/\mathcal{V} \simeq \mathcal{F}_{P_1}^{\text{GL}_3}((\text{U}(\mathfrak{gl}_3) \otimes_{\text{U}(\mathfrak{p}_1^-)} L^-(-\nu)_{P_1})^\vee, \text{St}_2^\infty \boxtimes 1).$$

Mais alors il suit de [13, Prop. 3.4] que l'application ι_2 doit être injective, ce qui est une contradiction. \square

Proposition 6.2.10. — *Si η n'est pas lisse, alors la composée :*

$$\begin{aligned}
\text{Ext}_{\text{inf}}^1(\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) &\hookrightarrow \text{Ext}_{\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)}^1(\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \\
&\xrightarrow{\iota} \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta)^+)
\end{aligned}$$

se factorise en un isomorphisme :

$$(267) \quad \text{Ext}_{\text{inf}}^1(\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta)) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta)).$$

Démonstration. — On montre d’abord que pour $V \in \text{Ext}_{\text{inf}}^1(\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta))$, le sous-quotient $C_{2,1} - -v_{P_2^-}^\infty(\nu)$ de $\iota(V)$ est scindé. Si $V \in \text{Ext}_{\text{inf}, Z}^1(\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta))$, i.e. $V \simeq \pi(\nu_{1,2}, \eta)^{\text{inf}}$, cela suit du Lemme 6.2.9 et de l’équivalence entre (ii) et (iii) du Lemme 6.2.7. Si V est isomorphe au “push-forward” (le long de $\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}) \hookrightarrow \pi(\nu_{1,2}, \eta)$) de l’unique extension localement algébrique non scindée de $\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$ par $\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2})$, en utilisant l’argument dans la preuve de [14, Lem. 3.44(2)] et [14, Prop. 3.35] il n’est pas difficile de montrer que $\iota(V)$ est isomorphe au “push-forward” (le long de $\text{St}_3^\infty(\nu) \hookrightarrow \Pi^1(\nu, \eta)^+$) d’une extension de $v_{P_2^-}^\infty(\nu)$ par $\text{St}_3^\infty(\nu)$, et donc $C_{2,1} - -v_{P_2^-}^\infty(\nu)$ est encore scindé dans $\iota(V)$. Par le (ii) du Lemme 6.2.1, ces deux extensions V forment une base de $\text{Ext}_{\text{inf}}^1(\text{St}_2^\infty(\nu_{1,2}), \pi(\nu_{1,2}, \eta))$. L’application en (267) s’obtient donc en “oubliant le constituant $C_{2,1}$ ” dans $\iota(V)$ (ce que l’on peut faire car $C_{2,1} - -v_{P_2^-}^\infty(\nu)$ est scindé). Comme η n’est pas lisse, par [14, Lem. 3.44(2)] et la preuve du Lemme 6.2.1, on voit que l’application (267) est injective. Comme $\dim_E \text{Ext}_{\text{GL}_3(\mathbb{Q}_p)}^1(v_{P_2^-}^\infty(\nu), \Pi^1(\nu, \eta)) = 2$ (cf. la preuve de [14, Prop. 3.49]), elle est bijective en comparant les dimensions. \square

Remarque 6.2.11. — Si η est lisse, l’énoncé du Lemme 6.2.9 est encore vrai (et la preuve est bien plus facile). Par contre l’application (267) n’est plus injective.

Références

- [1] Amice Y., *Duals*, Proc. Conf. on p -adic Analysis, Nijmegen, 1978, 1-15.
- [2] Bellaïche J., Chenevier G., *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque 324, 2009.
- [3] Berger L., *Représentations p -adiques et équations différentielles*, Invent. Math. 148, 2002, 219-284.
- [4] Berger L., *Équations différentielles p -adiques et (φ, N) -modules filtrés*, Astérisque 319, 2008, 13-38.
- [5] Berger L., *Constructions de (φ, Γ) -modules : représentations p -adiques et B-paires*, Algebra Number Theory 2, 2008, 91-120.
- [6] Berger L., Schneider P., Xie B., *Rigid character groups, Lubin-Tate theory, and (φ, Γ) -modules*, Memoirs Amer. Math. Soc. 263, 2020, no. 1275.
- [7] Bernstein J., Zelevinsky A., *Induced representations of p -adic reductive groups I*, Ann. Scient. É. N. S. 10, 1977, 441-472.
- [8] Bourbaki N., *Algèbre commutative Chapitres 1 à 4*, Springer, 2006.
- [9] Bourbaki N., *Espaces vectoriels topologiques Chapitres 1 à 5*, Springer, 2007.
- [10] Breuil C., *Ext^1 localement analytique et compatibilité local-global*, Amer. J. of Math. 141, 2019, 611-703.
- [11] Breuil C., *Induction parabolique et (φ, Γ) -modules*, Algebra and Number Theory 9, 2015, 2241-2291.
- [12] Breuil C., *Vers le socle localement analytique I*, Ann. Institut Fourier 66, 2016, 633-685.

- [13] Breuil C., *Vers le socle localement analytique II*, Math. Annalen 361, 2015, 741-785.
- [14] Breuil C., Ding Y., *Higher \mathcal{L} -invariants for $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ and local-global compatibility*, à paraître à Cambridge J. of Math.
- [15] Breuil C., Herzig F., *Ordinary representations of $G(\mathbb{Q}_p)$ and fundamental algebraic representations*, Duke Math. J. 164, 2015, 1271-1352.
- [16] Breuil C., Herzig F., *Towards the finite slope part for GL_n* , à paraître à Int. Math. Res. Not.
- [17] Breuil C., Schneider P., *First steps towards p -adic Langlands functoriality*, J. Reine Angew. Math. 610, 2007, 149-180.
- [18] Breuil C., Hellmann E., Schraen B., *A local model for the trianguline variety and applications*, Pub. Math. I. H. É. S. 129, 2019, 299-412.
- [19] Bushnell C., Henniart G., *The local Langlands Conjecture for $\mathrm{GL}(2)$* , Grundlehren der math. Wissenschaften 335, Springer, 2006.
- [20] Caraiani A., *Monodromy and local-global compatibility for $\ell = p$* , Algebra and Number Theory 8, 2014, 1597-1646.
- [21] Caraiani A., Emerton M., Gee T., Geraghty D., Paškūnas V., Shin S. W., *Patching and the p -adic local Langlands correspondence*, Cambridge J. Math. 4, 2016, 197-287.
- [22] Chojecki P., Sorensen C., *Weak local-global compatibility in the p -adic Langlands program for $U(2)$* , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 137, 2017, 101-133.
- [23] Chojecki P., Sorensen C., *Strong local-global compatibility in the p -adic Langlands program for $U(2)$* , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 137, 2017, 135-153.
- [24] Colmez P., *Représentations du mirabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$* , Astérisque 330, 2010, 61-153.
- [25] Colmez P., *Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules*, Astérisque 330, 2010, 281-509.
- [26] Colmez P., Dospinescu G., *Complétés universels de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$* , Algebra and Number Theory 8, 2014, 1447-1519.
- [27] Colmez P., Dospinescu G., Paškūnas V., *The p -adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$* , Cambridge J. Math. 2, 2014, 1-47.
- [28] Ding Y., *Simple \mathcal{L} -invariants for GL_n* , Transactions Amer. Math. Soc. 372, 2019, 7993-8042.
- [29] Dospinescu G., *Extensions de représentations de de Rham et vecteurs localement algébriques*, Comp. Math. 151, 2015, 1462-1498.
- [30] Dospinescu G., Le Bras A.-C., *Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands p -adique*, Annals of Math. 186, 2017, 321-411.
- [31] Emerton M., *Locally analytic vectors in representations of locally analytic p -adic groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. 248, 2017.
- [32] Emerton M., *Jacquet modules of locally analytic representations of p -adic reductive groups I. Construction and first properties*, Ann. Scient. É. N. S. 39, 2006, 775-839.
- [33] Emerton M., *Jacquet modules of locally analytic representations of p -adic reductive groups II. The relation to parabolic induction*, à paraître à J. Inst. Math. Jussieu.
- [34] Emerton M., *Local-global compatibility in the p -adic Langlands programme for GL_2/\mathbb{Q}* , prépublication 2011.
- [35] Erdélyi M., Zábrádi G., *Links between generalized Montréal functors*, Math. Zeitschrift 286, 2017, 1227-1275.

- [36] Féaux de Lacroix C. T., *Einige Resultate über die topologischen Darstellungen p -adischer Liegruppen auf unendlich dimensionalen Vektorräumen über einem p -adischen Körper*, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster 23, 1999.
- [37] Fontaine J.-M., *Arithmétique des représentations galoisiennes p -adiques*, Astérisque 295, 2004, 1-115.
- [38] Glaz S., *Commutative coherent rings*, Lecture Notes in Math. 1371, 1989.
- [39] Hauseux J., *Extensions entre séries principales p -adiques et modulo p de $G(F)$* , J. Inst. Math. Jussieu 15, 225-270, 2016.
- [40] Hill R., Loeffler D., *Emerton's Jacquet functors for non-Borel parabolic subgroups*, Documenta Math. 16, 1-31, 2011.
- [41] Humphreys J., *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category \mathcal{O}* , Graduate Studies in Math. 94, 2008.
- [42] Irving R. S., *Singular blocks of the category \mathcal{O}* , Math. Zeitschrift 204, 1990, 209-224.
- [43] Jantzen C. J., *Representations of algebraic groups*, Second Edition, Math. Surveys and Monographs 107, Amer. Math. Soc., 2003.
- [44] Kedlaya K., Pottharst J., Xiao L., *Cohomology of arithmetic families of (φ, Γ) -modules*, J. Amer. Math. Soc. 27, 2014, 1043-1115.
- [45] Kohlhaase J., *Invariant distributions on p -adic analytic groups*, Duke Math. J. 137, 2007, 19-62.
- [46] Kohlhaase J., *The cohomology of locally analytic representations*, J. Reine Angew. Math. 651, 2011, 187-240.
- [47] Liu R., *Cohomology and duality for (φ, Γ) -modules over the Robba ring*, Int. Math. Res. Not. 3, 2008.
- [48] Liu R., *Locally analytic vectors of some crystabelian representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$* , Comp. Math. 148, 2012, 28-64.
- [49] Liu R., Bingyong X., Zhang Y., *Locally analytic vectors of unitary principal series of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$* , Ann. Scient. É. N. S. 45, 2012, 167-190.
- [50] Mac Lane S., *Categories for the working mathematician*, Graduate Text in Math. 5, 1971.
- [51] Nakamura K., *Classification of two-dimensional split trianguline representations of p -adic fields*, Comp. Math. 145, 2009, 865-914.
- [52] Nakamura K., *Deformations of trianguline B -pairs and Zariski density of two dimensional crystalline representations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 20, 2013, 461-568.
- [53] Orlik S., *On some properties of the functor \mathcal{F}_P^G from Lie algebra to locally analytic representations*, prépublication 2020 (arXiv:1802.07514v2).
- [54] Orlik S., Strauch M., *On Jordan-Hölder series of some locally analytic representations*, J. Amer. Math. Soc. 28, 2015, 99-157.
- [55] Qian Z., *Dilogarithm and higher \mathcal{L} -invariants for $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$* , prépublication 2019 (arXiv:1902.00699).
- [56] Rodier F., *Whittaker models for admissible representations of reductive p -adic split groups*, Proc. Sympos. Pure Math. 26, 1973, 425-430.
- [57] Schneider P., *Nonarchimedean Functional Analysis*, Springer Monographs in Math., 2002.
- [58] Schneider P., *p -adic Lie groups*, Grundlehren der math. Wissenschaften 344, Springer, 2011.

- [59] Schneider P., Teitelbaum J., *Locally analytic distributions and p -adic representation theory, with applications to GL_2* , J. Amer. Math. Soc. 15, 2001, 443-468.
- [60] Schneider P., Teitelbaum J., *Algebras of p -adic distributions and admissible representations*, Invent. Math. 153, 2003, 145-196.
- [61] Schneider P., Teitelbaum J., *Duality for admissible locally analytic representations*, Repres. Theory 9, 2005, 297-326.
- [62] Schneider P., Teitelbaum J., *$U(\mathfrak{g})$ -finite locally analytic representations*, Repres. Theory 5, 2001, 111-128.
- [63] Schneider P., Vignéras M.-F., *A functor from smooth \mathcal{O} -torsion representations to (φ, Γ) -modules*, Clay Math. Proceedings 13, 525-601, 2011.
- [64] Schraen B., *Représentations localement analytiques de $GL_3(\mathbb{Q}_p)$* , Ann. Scient. É. N. S. 44, 2011, 43-145.
- [65] Weibel C., *An introduction to homological algebra*, Cambridge Univ. Press, 1994.
- [66] Zábřádi G., *Multivariable (φ, Γ) -modules and smooth \mathcal{O} -torsion representations*, Selecta Math. 24, 2018, 935-995.

C. BREUIL, CNRS, Université Paris-Saclay, Laboratoire de Mathématique d'Orsay, 91405 Orsay, France • *E-mail* : christophe.breuil@universite-paris-saclay.fr

Y. DING, Beijing Internat. Center for Math. Research, Peking University, No5 Yiheyuan Road Haidian District, Beijing, P.R. China 100871 • *E-mail* : yiwen.ding@bicmr.pku.edu.cn