1.练习

考虑如下统计模型 (比如神经网络)

$$y = f(x, \theta)$$

我们有数据 $(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \cdots N$ 但是y_i的误差是 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

如何用反问题或者数据同化的方法，来更好预测新的x对应的y?

反问题方法

当我们同时使用所用数据

$$y = [y_1, y_2, \cdots y_N] \qquad \mathcal{G}(\theta) = [f(x_1, \theta), f(x_2, \theta), \cdots f(x_N, \theta)] \qquad \eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$$

数据同化方法

数据是在线接受的

$$\begin{aligned}
&\theta = \theta \qquad \mathcal{F} = identity \\
&y = f(x, \theta) + \eta \quad \eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \qquad \mathcal{H}(\theta) = f(x, \theta)
\end{aligned}$$

2. 练习

考虑如下常微分方程描述的系统

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \qquad x \in R^{N_x}$$

我们知道函数 $f(\cdot, \cdot)$, 以及在时刻 $t_i = i(i = 1, 2, \cdots N)$ 的观测 $x[i \bmod N_x]$，即 x 向量的某个分量的信息，观测误差是 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

如何用反问题或者数据同化的方法，来更好预测时间t_N后的系统状态 x？

反问题方法

假设我们在时刻 t_i 的观测是 y_i, 我们的反问题需要同时反演参数u和初始状态x_0

$$y = \mathcal{G}(\theta) + \eta$$

其中 $y = [y_1, y_2 \cdots, y_T], \theta = [x_0; u]$， 噪音满足 $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I)$。 给定$\theta$, 我们可以求解常微分方程，假设解是 $x(t)$，我们的模型 $\mathcal{G}$ 是常微分方程求解器，我们需要求解$t \in [0, t_N]$:

$$\mathcal{G}(\theta) = \Big[x(t_1)[1 \bmod N_x],\ x(t_2)[2 \bmod N_x] \ \cdots\ x(t_N)[N \bmod N_x]\Big]$$

给定先验分布，求解了反问题后，我们就有参数u和初始状态x_0的估计，可以更好预测时间t_N后的系统状态 x。

数据同化方法

假设我们在时刻 t_i 的观测是 y_i, 根据参数u和初始状态x_0的先验分布，生成参数$u(0)$和初始状态$x(0)$, 用数据同化方法同时修正 参数u_t和状态x_t:

$$\begin{bmatrix} x(t_{n+1}) \\ u(t_{n+1}) \end{bmatrix} = \mathcal{F}\Big(\begin{bmatrix} x(t_n) \\ u(t_n) \end{bmatrix}\Big)$$
$$y_{n+1} = \mathcal{G}_{n+1}\Big(\begin{bmatrix} x(t_{n+1}) \\ u(t_{n+1}) \end{bmatrix}\Big) + \eta$$

其中 $n = 0, 1, \cdots N-1$, 观测噪音满足 $\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$。 对于预测步：给定$x(t_n)$ 和 $u(t_n)$, 我们的演化算子$\mathcal{F}$ 用 $x(t_n)$ 作为当前状态，$u(t_n)$作为参数，求解常微分方程，得到t_{n+1}时刻的解 $x(t_{n+1})$， $u(t_{n+1}) = u(t_n)$ 保持不变。 对于分析步：我们的观测算子 $\mathcal{G}_{n+1}$ 从 $\begin{bmatrix} x(t_{n+1}) \\ u(t_{n+1}) \end{bmatrix}$ 得到第$n+1 \bmod N_x$ 维的分量信息。

在时刻 t_N 时，我们就有参数$u := u(t_N)$和状态$x(t_N)$的估计，可以更好预测时间t_N后的系统状态 x。

思考

上述算法中的观测算子$\mathcal{G}$和演化算子$\mathcal{F}$都是假设我们能精确求解常微分方程。 而现实中，我们通常会进行时间离散，比如采用向前欧拉方法求解这个系统，

$$x_{n+1} = x_n + \delta f(x_n, u)$$

其中时间步长是 δ, 因此我们需要把反问题方法中的观测算子$\mathcal{G}$替换为对应的离散后的算子$\mathcal{G}_\delta$， 数据同化的演化算子$\mathcal{F}$替换为对应的离散后的算子$\mathcal{F}_\delta$，这会引入一些误差，稍微改变我们的问题。