

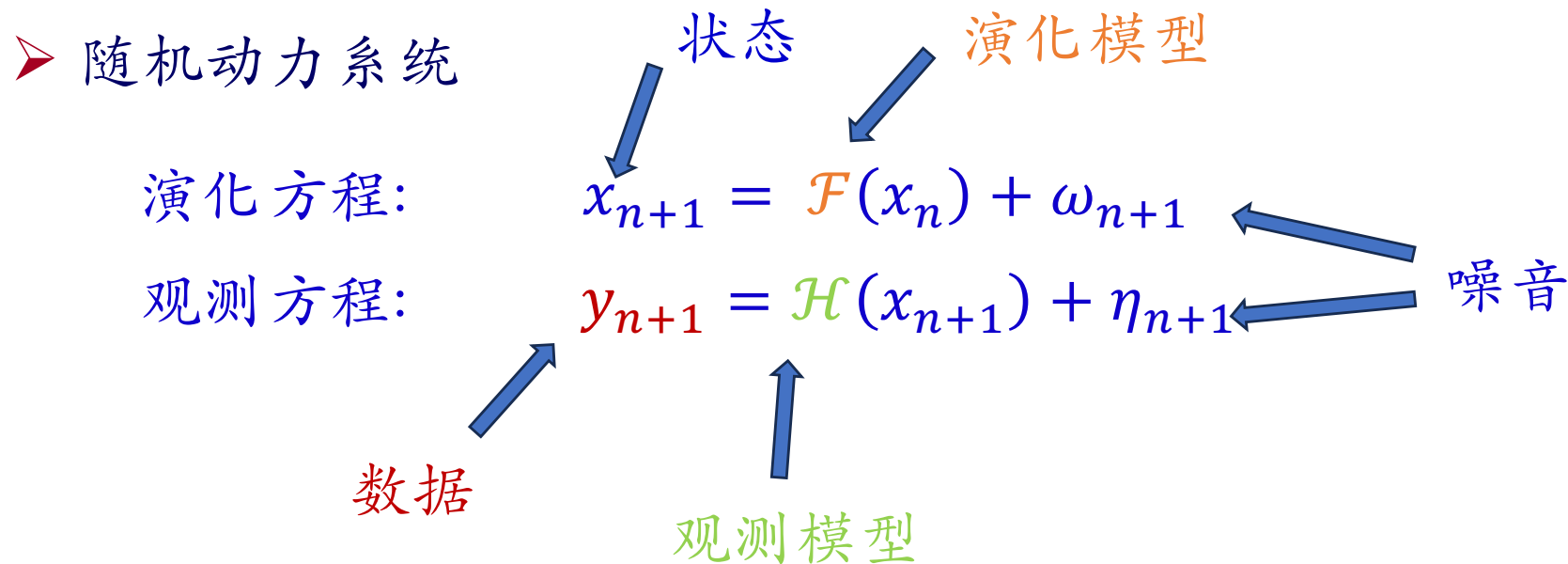
贝叶斯滤波和平滑问题的 适定性

黄政宇

北京大学北京国际数学研究中心
北京大学国际机器学习研究中心



数据同化



隐马尔科夫模型

- 初值 : $x_0 \sim \rho_0(x) = \mathcal{N}(x; m_0, C_0)$
- 模型噪音 : $\omega_j \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\omega)$
- 观测噪音 : $\eta_j \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\eta)$
- 独立性假设 : $x_0 \perp \omega_j \quad x_0 \perp \eta_j \quad \omega_j \perp \eta_k$



平滑 (smoothing) 问题

➤ 平滑问题 (给定 N 线下处理)

参数: $X = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$

观测: $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$

反问题: $Y = \mathcal{G}(X) + \eta \quad \eta \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\eta \otimes I)$

$\mathcal{G}(X) := [\mathcal{H}(x_1); \mathcal{H}(x_2) \cdots \mathcal{H}(x_N)]$

后验分布: $\rho(X|Y)$



平滑问题

➤ 平滑问题（给定 N 线下处理）

$$\begin{aligned}\text{先验分布: } \rho_{\text{prior}}(X) &= \rho(x_N, x_{N-1}, \dots, x_0) \\ &= \rho(x_N | x_{N-1}) \rho(x_{N-1}, \dots, x_0) \\ &= \rho(x_0) \prod_{n=0}^{N-1} \rho(x_{n+1} | x_n) \\ &\propto e^{-R(X)}\end{aligned}$$

$$R(X) = \frac{1}{2} \| C_0^{-\frac{1}{2}} (x_0 - m_0) \|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \| \Sigma_{\omega}^{-\frac{1}{2}} (x_{n+1} - \mathcal{F}(x_n)) \|^2$$



平滑问题

➤ 平滑问题（给定 N 线下处理）

$$\begin{aligned}\text{似然函数: } \rho(Y|X) &= \rho(y_N, y_{N-1}, \dots, y_1 \mid x_N, x_{N-1}, \dots, x_0) \\ &= \prod_{n=1}^N \rho(y_n \mid x_N, x_{N-1}, \dots, x_0) \\ &\propto e^{-\Phi(X,Y)}\end{aligned}$$

$$\Phi(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\| \Sigma_{\eta}^{-\frac{1}{2}} (y_{n+1} - \mathcal{H}(x_{n+1})) \right\|^2$$

$$\text{求后验分布: } \rho_{\text{post}}(X; Y) = \rho(X|Y) \propto e^{-\Phi_R(X,Y)}$$

$$\Phi_R(X, Y) = \Phi(X, Y) + R(X)$$

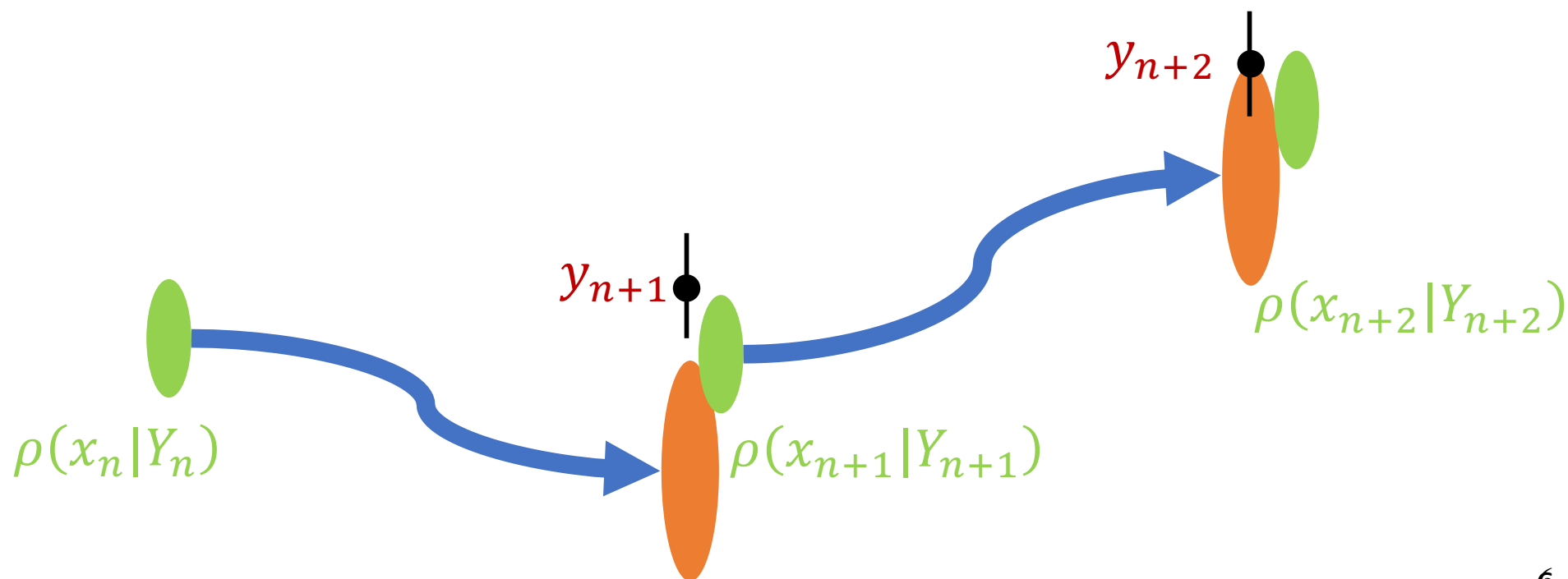


滤波 (filtering) 问题

➤ 滤波问题 (线上处理)

时刻 $n + 1$ 的观测集: $Y_{n+1} = \{y_1, \dots, y_{n+1}\}$

时刻 $n + 1$ 的滤波分布: $\rho(x_{n+1}|Y_{n+1})$



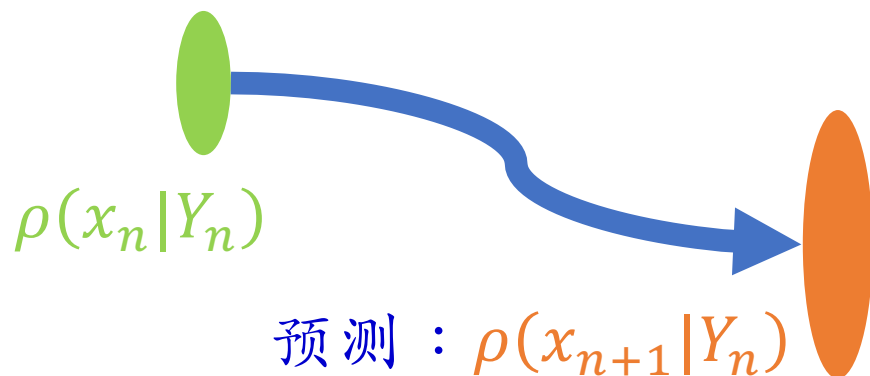


滤波问题

➤ 滤波问题（线上处理）

预测：

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1}|Y_n) &= \int \rho(x_{n+1}|x_n, Y_n) \rho(x_n|Y_n) dx_n \\ &= \int \rho(x_{n+1}|x_n) \rho(x_n|Y_n) dx_n \\ &\propto \int \exp\left(\frac{1}{2} \|\Sigma_\omega^{-\frac{1}{2}} (x_{n+1} - \mathcal{F}(x_n))\|^2\right) \rho(x_n|Y_n) dx_n\end{aligned}$$





滤波问题

➤ 滤波问题（线上处理）

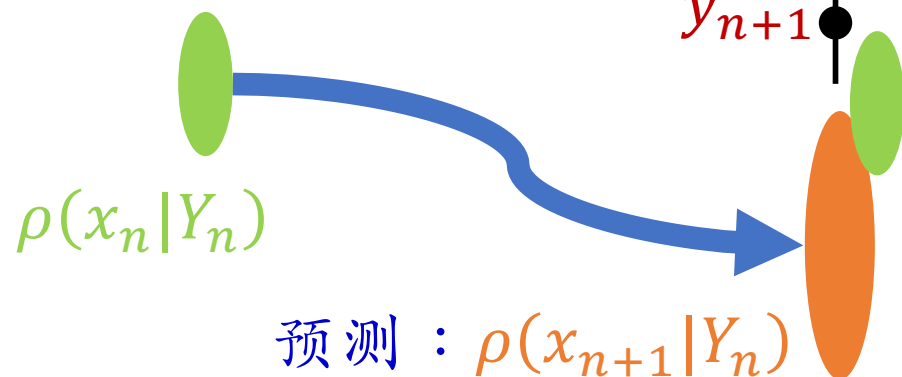
分析:

$$\rho(x_{n+1}|Y_{n+1}) = \rho(x_{n+1}|Y_n, y_{n+1})$$

$$= \frac{\rho(y_{n+1}|Y_n, x_{n+1})\rho(x_{n+1}|Y_n)}{\rho(y_{n+1}|Y_n)}$$

$$= \frac{\rho(y_{n+1}|x_{n+1})\rho(x_{n+1}|Y_n)}{\rho(y_{n+1}|Y_n)}$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2} \left\| \Sigma_{\eta}^{-\frac{1}{2}} (y_{n+1} - \mathcal{H}(x_{n+1})) \right\|^2\right) \rho(x_{n+1}|Y_n)$$



分析: $\rho(x_{n+1}|Y_{n+1})$

预测: $\rho(x_{n+1}|Y_n)$



贝叶斯平滑和滤波

贝叶斯平滑: $\rho_{\text{post}}(X; Y_N) = \rho(X|Y_N)$

贝叶斯滤波: $\rho(x_n|Y_n)$

$$\rho(x_N|Y_N) = \int \rho(x_N, x_{N-1}, \dots, x_0|Y_N) dx_0 dx_1 \cdots dx_{N-1}$$

$$\rho(x_n|Y_n) \neq \int \rho(x_N, x_{N-1}, \dots, x_0|Y_N) dx_0 \cdots dx_{n-1} dx_{n+1} \cdots dx_N$$



适定性

➤ 物理现象中的数学模型

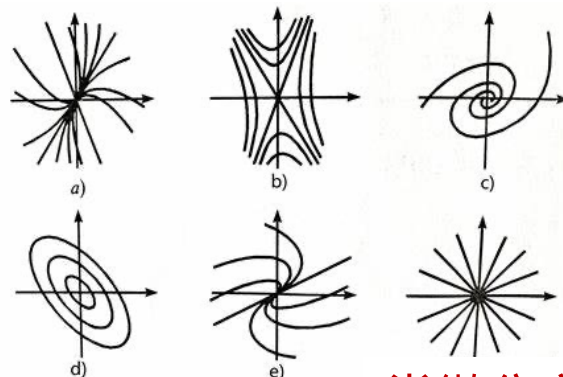
- 解的存在性
- 解的唯一性
- 解连续地取决于初边值条件

➤ 贝叶斯反问题

- 后验分布的存在性
- 后验分布的唯一性
- 后验分布连续地取决于 $y, \mathcal{G}, \rho_\eta, \rho_{\text{prior}}$

➤ 贝叶斯滤波和平滑问题

- 分布的存在性
- 分布的唯一性
- 分布连续地取决于 $Y, \mathcal{H}, \mathcal{F}, \rho_\eta, \rho_\omega, \rho_{\text{prior}}$



常微分方程



适定性

适定性定理

对于贝叶斯反问题

$$y = \mathcal{G}(\theta) + \eta \quad \eta \sim \rho_\eta \quad \theta \sim \rho_{\text{prior}}$$

定义

$$L(\theta) := \rho_\eta(y - \mathcal{G}(\theta)) \quad L_\delta(\theta) := \rho_\eta(y - \mathcal{G}_\delta(\theta))$$

假设存在 $K_1, K_2 > 0, \delta^+ > 0$, 对任意 $\delta \in (0, \delta^+)$

$$\text{i) } \left| \sqrt{L(\theta)} - \sqrt{L_\delta(\theta)} \right| \leq \varphi(\theta)\delta, \quad \mathbb{E}_{\theta \sim \rho_{\text{prior}}}[\varphi(\theta)^2] \leq K_1^2$$

$$\text{ii) } \sup_{\theta} \left(\sqrt{L(\theta)} + \sqrt{L_\delta(\theta)} \right) \leq K_2$$

那么存在 $\Delta > 0, c > 0$, 后验分布满足

$$\mathcal{D}_H \left(\rho_{\text{post}}(\theta; \mathcal{G}_\delta), \rho_{\text{post}}(\theta; \mathcal{G}) \right) < c\delta \quad \forall \delta \in (0, \Delta)$$



适定性

贝叶斯平滑问题对数据的适定性定理

对于贝叶斯平滑问题， $Y = Y_N$ ，假设

i) $\|Y\|_2, \|Y'\|_2 \leq R < \infty$

ii) $\varphi(X) := \sqrt{\sum_{n=1}^N \|\mathcal{H}(x_n)\|_2^2}$ ， $\mathbb{E}_{X \sim \rho_{\text{prior}}(X)}[\varphi(X)^2] < \infty$

那么存在 $c > 0$ ，后验分布满足

$$\mathcal{D}_H \left(\rho_{\text{post}}(X; Y), \rho_{\text{post}}(X; Y') \right) < c \|Y - Y'\|_2$$



适定性

贝叶斯滤波问题对数据的适定性定理

对于贝叶斯滤波问题，给定 N ，假设

$$\text{i) } \|Y_N\|_2, \|Y'_N\|_2 \leq R < \infty$$

$$\text{ii) } \varphi(X) := \sqrt{\sum_{n=1}^N \|\mathcal{H}(x_n)\|_2^2}, \quad \mathbb{E}_{X \sim \rho_{\text{prior}}(X)}[\varphi(X)^2] < \infty$$

那么存在 $c > 0$ ，滤波分布满足

$$\mathcal{D}_{TV}(\rho_N(x_N; Y_N), \rho_N(x_N; Y'_N)) < c \|Y_N - Y'_N\|_2$$