

## 1. 贝叶斯平滑问题对数据的适定性定理

对于贝叶斯平滑问题,  $Y = Y_N$ , 假设

- $\|Y\|_2, \|Y'\|_2 \leq R < \infty$
- 定义  $\varphi(X) := \left(\sum_{n=1}^N \|\mathcal{H}(x_n)\|_2^2\right)^{1/2}$ , 满足  $\mathbb{E}_{\rho_{\text{prior}}(X)}[\varphi^2(X)] < \infty$ .

那么存在  $c > 0$ , 后验分布满足

$$\mathcal{D}_H(\rho_{\text{post}}(X; Y), \rho_{\text{post}}(X; Y')) \leq c\|Y - Y'\|_2$$

## 证明

对于贝叶斯平滑问题, 我们有

$$\begin{aligned}\rho_{\text{post}}(X; Y) &= \frac{1}{Z} e^{-\Phi(X, Y)} \rho_{\text{prior}}(X) \\ \rho_{\text{post}}(X; Y') &= \frac{1}{Z'} e^{-\Phi(X, Y')} \rho_{\text{prior}}(X)\end{aligned}$$

其中似然函数满足

$$\begin{aligned}L(X) &= e^{-\Phi(X, Y)} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \|\Sigma_\eta^{-1/2}(y_{n+1} - \mathcal{H}(x_{n+1}))\|^2\right\} \\ L'(X) &= e^{-\Phi(X, Y')} = \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \|\Sigma_\eta^{-1/2}(y'_{n+1} - \mathcal{H}(x_{n+1}))\|^2\right\}\end{aligned}$$

我们仅需要验证关于贝叶斯反问题的适定性定理的假设。由于  $\Phi(X, Y) > 0$ , 我们有

$$\sup_X \left| \sqrt{L(X)} \right| + \left| \sqrt{L'(X)} \right| \leq 2$$

由于  $|e^{-w_1} - e^{-w_2}| \leq |w_1 - w_2|$ , 我们有

$$\begin{aligned}\left| \sqrt{L(X)} - \sqrt{L'(X)} \right| &\leq \frac{1}{2} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left( \|\Sigma_\eta^{-1/2}(y_{n+1} - \mathcal{H}(x_{n+1}))\|^2 - \|\Sigma_\eta^{-1/2}(y'_{n+1} - \mathcal{H}(x_{n+1}))\|^2 \right) \right| \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} (y_{n+1} - y'_{n+1}) \Sigma_\eta^{-1} (y_{n+1} + y'_{n+1} - 2\mathcal{H}(x_{n+1})) \\ &\leq \frac{1}{4} \|\Sigma_\eta^{-1}\|_2 \|Y - Y'\|_2 \sum_{n=0}^{N-1} (\|y_{n+1}\|_2 + \|y'_{n+1}\|_2 + 2\|\mathcal{H}(x_{n+1})\|_2) \\ &\leq c\|Y - Y'\|_2 (R + \varphi(X))\end{aligned}$$

我们记  $\delta = \|Y - Y'\|_2$ , 我们有

$$\mathbb{E}_{\rho_{\text{prior}}(X)}[c^2(R + \varphi)^2] \leq 2c^2(R^2 + \mathbb{E}_{\rho_{\text{prior}}(X)}[\varphi(X)^2]) \leq \infty$$

## 2. 贝叶斯滤波问题对数据的适定性定理

- $\|Y\|_2, \|Y'\|_2 \leq R < \infty$
- 定义  $\varphi(X) := \left(\sum_{n=1}^N \|\mathcal{H}(x_n)\|_2^2\right)^{1/2}$ , 满足  $\mathbb{E}_{\rho_{\text{prior}}(X)}[\varphi^2(X)] < \infty$ .

那么存在  $c > 0$ , 后验分布满足

$$\mathcal{D}_{TV}(\rho_N(x_N; Y_N), \rho_N(x_N; Y'_N)) \leq c\|Y - Y'\|_2$$

## 证明

根据贝叶斯平滑问题的适定性, 我们有

$$\mathcal{D}_H(\rho_{\text{post}}(X_N; Y_N), \rho_{\text{post}}(X_N; Y'_N)) \leq c\|Y_N - Y'_N\|_2$$

我们定义  $F(x_1, x_2, \dots, x_N) = F(X_N) := f(x_N)$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{TV}(\rho_N(x_N; Y_N), \rho_N(x_N; Y'_N)) &= \frac{1}{2} \sup_{|f|_\infty \leq 1} \left| \mathbb{E}_{\rho_N(x_N; Y_N)}[f(x_N)] - \mathbb{E}_{\rho_N(x_N; Y'_N)}[f(x_N)] \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{|F|_\infty \leq 1} \left| \mathbb{E}_{\rho_{\text{post}}(X_N; Y_N)}[F(X_N)] - \mathbb{E}_{\rho_{\text{post}}(X_N; Y'_N)}[F(X_N)] \right| \\ &= \mathcal{D}_{TV}(\rho_{\text{post}}(X_N; Y_N), \rho_{\text{post}}(X_N; Y'_N)) \\ &\leq \sqrt{2} \mathcal{D}_H(\rho_{\text{post}}(X_N; Y_N), \rho_{\text{post}}(X_N; Y'_N)) \\ &\leq c\|Y_N - Y'_N\|_2\end{aligned}$$

这里我们用了  $\mathcal{D}_{TV} \leq \mathcal{D}_H$ .