线性数据同化问题

黄政宇
北京大学北京国际数学研究中心
北京大学国际机器学习研究中心

线性数据同化问题

线性数据同化问题

演化方程: $x_{n+1} = \mathcal{F}(x_n) + \omega_{n+1}$

观测方程: $y_{n+1} = \mathcal{H}(x_{n+1}) + \eta_{n+1}$

假设

线性演化方程：$\mathcal{F}(x) = F \cdot x \quad F \in R^{N_x \times N_x}$

高斯演化噪音: $\rho_\omega = \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\omega)$

线性演化方程：$\mathcal{H}(x) = H \cdot x \quad H \in R^{N_y \times N_x}$

高斯观测噪音: $\rho_\eta = \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\eta)$

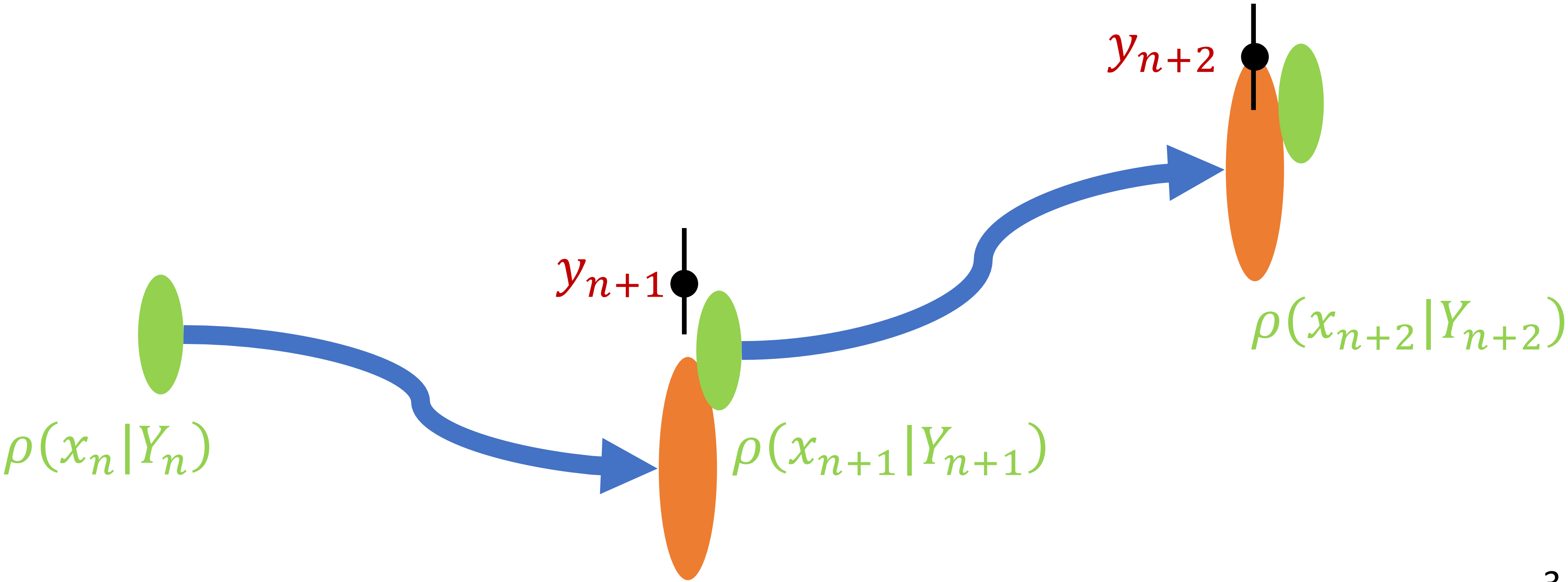
高斯先验分布: $\rho_{\text{prior}}(x) = \mathcal{N}(x; r_0, \Sigma_0)$

线性滤波问题

➢ 线性滤波问题（线上处理）

时刻$n+1$的观测集：　　$Y_{n+1}=\{y_1,\cdots,y_{n+1}\}$

时刻$n+1$的滤波分布：　　$\rho(x_{n+1}|Y_{n+1})$



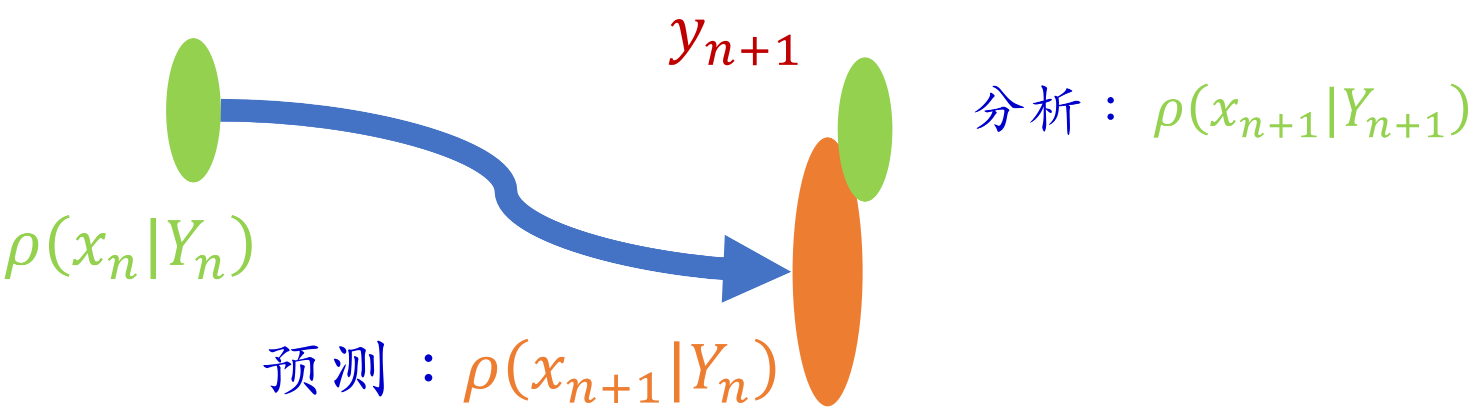
- 滤波问题（线上处理）

预测:

$$\rho(x_{n+1}|Y_n) \propto \int \exp(\frac{1}{2} \| \Sigma_\omega^{-\frac{1}{2}} (x_{n+1} - Fx_n) \|^2) \, \rho(x_n|Y_n) dx_n$$

分析：

$$\rho(x_{n+1}|Y_{n+1}) \propto \exp(-\frac{1}{2} \| \Sigma_\eta^{-\frac{1}{2}} (y_{n+1} - Hx_{n+1}) \|^2) \, \rho(x_{n+1}|Y_n)$$



线性滤波问题

线性滤波问题（卡尔曼滤波）

对于线性滤波问题

$$x_{n+1} = Fx_n + \omega_{n+1} \qquad \omega_{n+1} \sim \mathcal{N}(x;0,\Sigma_\omega)$$

$$y_{n+1} = Hx_{n+1} + \eta_{n+1} \qquad \eta_{n+1} \sim \mathcal{N}(x;0,\Sigma_\eta)$$

那么预测分布和滤波分布都是高斯。

预测分布：$\rho(x_{n+1}|Y_n) = \mathcal{N}(x;\widehat{m}_{n+1},\hat{C}_{n+1})$

$$\widehat{m}_{n+1} = Fm_n \qquad \hat{C}_{n+1} = FC_nF^T + \Sigma_\omega$$

滤波分布：$\rho_{n+1}(x_{n+1}) = \mathcal{N}(x;m_{n+1},C_{n+1})$

$$m_{n+1} = \left(H^T\Sigma_\eta^{-1}H + \hat{C}_{n+1}^{-1}\right)^{-1}\left(H^T\Sigma_\eta^{-1}y_{n+1} + \hat{C}_{n+1}^{-1}\widehat{m}_{n+1}\right)$$

$$C_{n+1} = \left(H^T\Sigma_\eta^{-1}H + \hat{C}_{n+1}^{-1}\right)^{-1}$$

线性滤波问题

卡尔曼滤波算法 ($N_x > N_y$)

对于 $n = 0,1,\cdots,N-1$

预测：

$$\widehat{m}_{n+1} = Fm_n \qquad \hat{C}_{n+1} = FC_nF^T + \Sigma_\omega$$

分析：

$$m_{n+1} = \widehat{m}_{n+1} + K_{n+1}d_{n+1} \qquad C_{n+1} = (I - K_{n+1}H)\hat{C}_{n+1}$$

其中

$$d_{n+1} = y_{n+1} - H\widehat{m}_{n+1}$$

$$S_{n+1} = H\hat{C}_{n+1}H^T + \Sigma_\eta$$

$$K_{n+1} = \hat{C}_{n+1}H^TS_{n+1}^{-1}$$

卡尔曼增益：K_{n+1}

$$m_{n+1} = (I - K_{n+1}H)\widehat{m}_{n+1} + K_{n+1}y_{n+1}$$

线性滤波问题

卡尔曼滤波的最优性

对于线性滤波问题

$$x_{n+1} = Fx_n + \omega_{n+1} \qquad \omega_{n+1} \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\omega)$$

$$y_{n+1} = Hx_{n+1} + \eta_{n+1} \qquad \eta_{n+1} \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\eta)$$

滤波分布是

$$\rho(x_{n+1}|Y_{n+1}) = \mathcal{N}(x; m_{n+1}, C_{n+1})$$

对于任意序列 $\{z_n\}$，我们有

$$\mathbb{E}[|x_n - m_n|^2 \, |Y_n] \leq \mathbb{E}[|x_n - z_n|^2 \, |Y_n]$$

线性平滑问题

- 线性平滑问题（线下处理）

参数: $X=\{x_0,x_1,\cdots,x_N\}$

观测: $Y=\{y_1,\cdots,y_N\}$

后验分布: $\rho_{\text{post}}(X;Y)=\rho(X|Y)\propto e^{-\Phi_R(X,Y)}$

$$\Phi_R(X,Y)=\Phi(X,Y)+R(X)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\|\Sigma_\eta^{-\frac{1}{2}}(y_{n+1}-Hx_{n+1})\|^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\|\Sigma_\omega^{-\frac{1}{2}}(x_{n+1}-Fx_n)\|^2$$
$$+\frac{1}{2}\|C_0^{-\frac{1}{2}}(x_0-m_0)\|^2$$

线性平滑问题

线性平滑问题

后验分布: $\rho_{\text{post}}(X;Y)=\mathcal{N}(x;m_{\text{post}},C_{\text{post}})$

三对角：$C_{\text{post}}^{-1}=\Omega=\begin{bmatrix}\Omega_{00} & \Omega_{01} & 0 & & & \\ \Omega_{10} & \Omega_{11} & \Omega_{12} & & & \\ 0 & \Omega_{12} & \Omega_{22} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & \Omega_{N-1N-2} & \Omega_{N-1N-1} & \Omega_{N-1N} \\ & & & 0 & \Omega_{NN-1} & \Omega_{NN}\end{bmatrix}$

$m_{\text{post}}=\Omega^{-1}r$

$\Omega_{00}=C_0^{-1}+F\Sigma_\omega^{-1}F^T$
$\Omega_{nn}=\Sigma_\omega^{-1}+F\Sigma_\omega^{-1}F^T+H\Sigma_\eta^{-1}H^T\ (0<n<N)$
$\Omega_{NN}=\Sigma_\omega^{-1}+H\Sigma_\eta^{-1}H^T$
$\Omega_{nn+1}=-\Sigma_\omega^{-1}F$

$r_0=C_0^{-1}m_0$
$r_n=H\Sigma_\eta^{-1}y_n\ (0<n<N)$

卡尔曼平滑算法（高斯消元法）

行变换

$$\Omega_0 = \Omega_{00} \quad z_0 = r_0$$

对于 $n = 1,2,\cdots,N$

$$\Omega_n = \Omega_{nn} - F^T\Sigma_\omega^{-1}\Omega_{n-1n-1}^{-1}\Sigma_\omega^{-1}F$$

$$z_n = H\Sigma_\eta^{-1}y_n - F^T\Sigma_\omega^{-1}\Omega_{n-1n-1}^{-1}H\Sigma_\eta^{-1}y_{n-1}$$

下三角矩阵求解

$$\Omega_N\, m_N = z_N$$

对于 $n = N-1,\cdots,0$

$$\Omega_n m_n = z_n - \Omega_{n+1}m_{n+1}$$

后验期望

$$m_{\text{post}} = [m_0; m_1; \cdots, m_N]$$

线性平滑问题

- 练习

- 对于线性卡尔曼平滑 Ω_n 是对称正定矩阵。
- 线性卡尔曼平滑求得的m_N和线性卡尔曼滤波求得的m_N一样，但是$m_n(0 \le n < N)$就不一致了。