

线性数据同化问题

黄政宇

北京大学北京国际数学研究中心
北京大学国际机器学习研究中心



线性数据同化问题

➤ 线性数据同化问题

演化方程: $x_{n+1} = \mathcal{F}(x_n) + \omega_{n+1}$

观测方程: $y_{n+1} = \mathcal{H}(x_{n+1}) + \eta_{n+1}$

➤ 假设

线性演化方程: $\mathcal{F}(x) = F \cdot x \quad F \in R^{N_x \times N_x}$

高斯演化噪音: $\rho_\omega = \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\omega)$

线性观测方程: $\mathcal{H}(x) = H \cdot x \quad H \in R^{N_y \times N_x}$

高斯观测噪音: $\rho_\eta = \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\eta)$

高斯先验分布: $\rho_{\text{prior}}(x) = \mathcal{N}(x; r_0, \Sigma_0)$

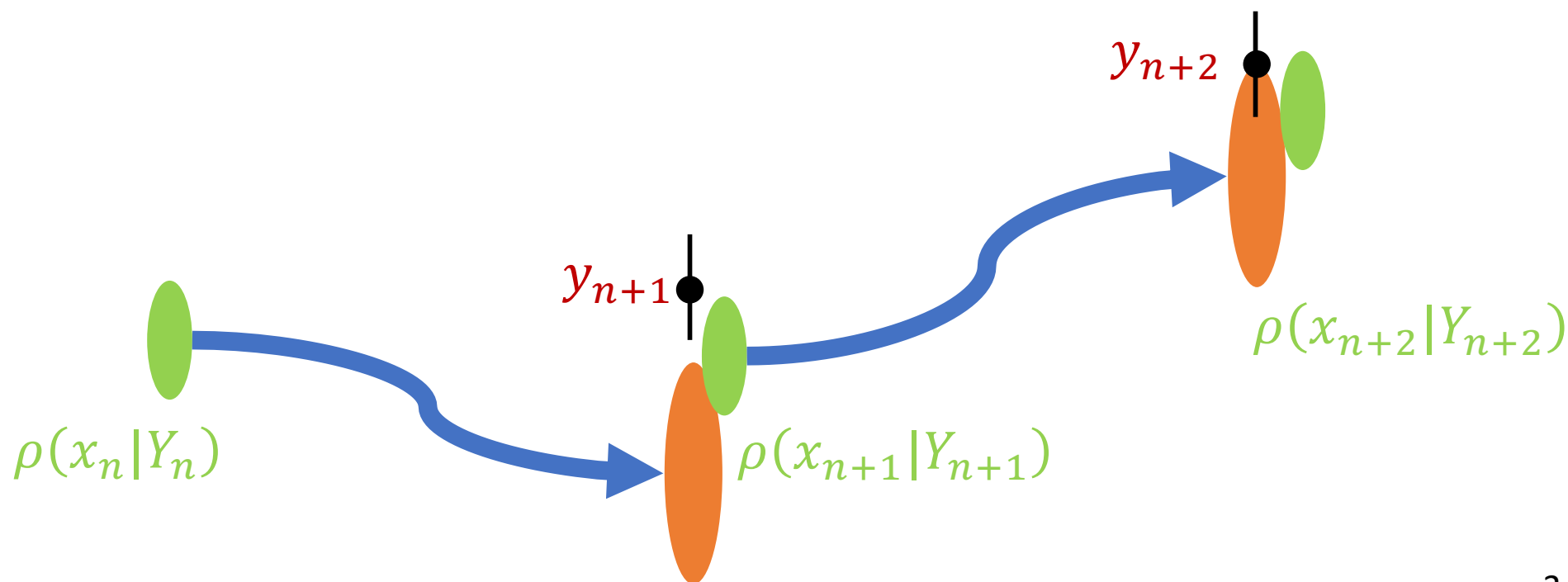


线性滤波问题

➤ 线性滤波问题（线上处理）

时刻 $n + 1$ 的观测集: $Y_{n+1} = \{y_0, y_1, \dots, y_{n+1}\}$

时刻 $n + 1$ 的滤波分布: $\rho(x_{n+1} | Y_{n+1})$





线性滤波问题

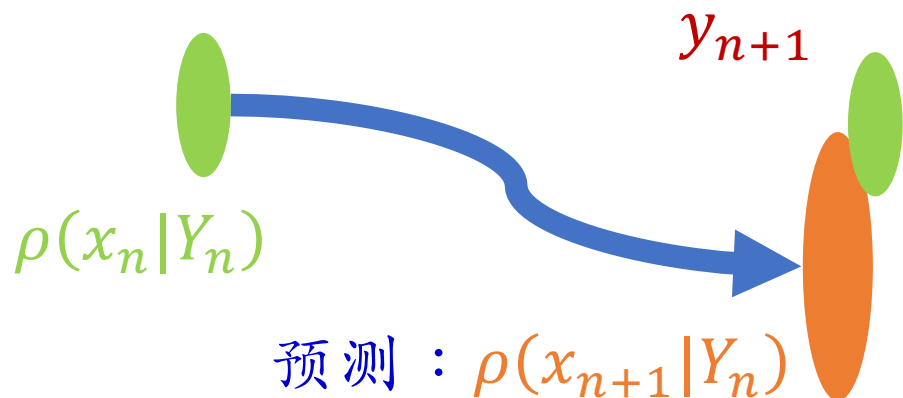
➤ 滤波问题（线上处理）

预测：

$$\rho(x_{n+1}|Y_n) \propto \int \exp\left(\frac{1}{2} \|\Sigma_{\omega}^{-\frac{1}{2}} (x_{n+1} - Fx_n)\|^2\right) \rho(x_n|Y_n) dx_n$$

分析：

$$\rho(x_{n+1}|Y_{n+1}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \|\Sigma_{\eta}^{-\frac{1}{2}} (y_{n+1} - Hx_{n+1})\|^2\right) \rho(x_{n+1}|Y_n)$$



分析： $\rho(x_{n+1}|Y_{n+1})$



线性滤波问题

线性滤波问题（卡尔曼滤波）

对于线性滤波问题

$$x_{n+1} = Fx_n + \omega_{n+1} \quad \omega_{n+1} \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\omega)$$

$$y_{n+1} = Hx_{n+1} + \eta_{n+1} \quad \eta_{n+1} \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\eta)$$

那么预测分布和滤波分布都是高斯。

预测分布： $\rho(x_{n+1}|Y_n) = \mathcal{N}(x; \hat{m}_{n+1}, \hat{C}_{n+1})$

$$\hat{m}_{n+1} = Fm_n \quad \hat{C}_{n+1} = FC_nF^T + \Sigma_\omega$$

滤波分布： $\rho_{n+1}(x_{n+1}) = \mathcal{N}(x; m_{n+1}, C_{n+1})$

$$m_{n+1} = (H^T \Sigma_\eta^{-1} H + \hat{C}_{n+1}^{-1})^{-1} (H^T \Sigma_\eta^{-1} y_{n+1} + \hat{C}_{n+1}^{-1} \hat{m}_{n+1})$$

$$C_{n+1} = (H^T \Sigma_\eta^{-1} H + \hat{C}_{n+1}^{-1})^{-1}$$



线性滤波问题

卡尔曼滤波算法 ($N_x > N_y$)

对于 $n = 0, 1, \dots, N - 1$

预测：

$$\hat{m}_{n+1} = Fm_n \quad \hat{C}_{n+1} = FC_nF^T + \Sigma_\omega$$

分析：

$$m_{n+1} = \hat{m}_{n+1} + K_{n+1}d_{n+1} \quad C_{n+1} = (I - K_{n+1}H)\hat{C}_{n+1}$$

其中

$$d_{n+1} = y_{n+1} - H\hat{m}_{n+1}$$

$$S_{n+1} = H\hat{C}_{n+1}H^T + \Sigma_\eta$$

$$K_{n+1} = \hat{C}_{n+1}H^T S_{n+1}^{-1}$$

卡尔曼增益： K_{n+1}

$$m_{n+1} = (I - K_{n+1}H)\hat{m}_{n+1} + K_{n+1}y_{n+1}$$



线性滤波问题

卡尔曼滤波的最优性

对于线性滤波问题

$$x_{n+1} = Fx_n + \omega_{n+1} \quad \omega_{n+1} \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\omega)$$

$$y_{n+1} = Hx_{n+1} + \eta_{n+1} \quad \eta_{n+1} \sim \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\eta)$$

滤波分布是

$$\rho(x_{n+1}|Y_{n+1}) = \mathcal{N}(x; m_{n+1}, C_{n+1})$$

对于任意序列 $\{z_n\}$ ，我们有

$$\mathbb{E}[|x_n - m_n|^2 | Y_n] \leq \mathbb{E}[|x_n - z_n|^2 | Y_n]$$



线性平滑问题

➤ 线性平滑问题（线下处理）

参数: $X = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$

观测: $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_N\}$

后验分布: $\rho_{\text{post}}(X; Y) = \rho(X|Y) \propto e^{-\Phi_R(X, Y)}$

$$\begin{aligned}\Phi_R(X, Y) &= \Phi(X, Y) + R(X) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\| \Sigma_{\eta}^{-\frac{1}{2}} (y_{n+1} - Hx_{n+1}) \right\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left\| \Sigma_{\omega}^{-\frac{1}{2}} (x_{n+1} - Fx_n) \right\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\| C_0^{-\frac{1}{2}} (x_0 - m_0) \right\|^2\end{aligned}$$



线性平滑问题

线性平滑问题

后验分布: $\rho_{\text{post}}(X; Y) = \mathcal{N}(x; m_{\text{post}}, C_{\text{post}})$

三对角: $C_{\text{post}}^{-1} = \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{00} & \Omega_{01} & 0 & & & \\ \Omega_{10} & \Omega_{11} & \Omega_{12} & & & \\ 0 & \Omega_{12} & \Omega_{22} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \Omega_{N-1N-2} & \Omega_{N-1N-1} & \Omega_{N-1N} \\ & & & & 0 & \Omega_{NN-1} & \Omega_{NN} \end{bmatrix}$

$m_{\text{post}} = \Omega^{-1}r$

$$\Omega_{00} = C_0^{-1} + F\Sigma_{\omega}^{-1}F^T$$

$$\Omega_{nn} = \Sigma_{\omega}^{-1} + F\Sigma_{\omega}^{-1}F^T + H\Sigma_{\eta}^{-1}H^T \quad (0 < n < N)$$

$$\Omega_{NN} = \Sigma_{\omega}^{-1} + H\Sigma_{\eta}^{-1}H^T$$

$$\Omega_{nn+1} = -\Sigma_{\omega}^{-1}F$$

$$r_0 = C_0^{-1}m_0$$

$$r_n = H\Sigma_{\eta}^{-1}y_n \quad (0 < n < N)$$



线性平滑问题

卡尔曼平滑算法 (高斯消元法)

行变换

$$\Omega_0 = \Omega_{00} \quad z_0 = r_0$$

对于 $n = 1, 2, \dots, N$

$$\Omega_n = \Omega_{nn} - F^T \Sigma_\omega^{-1} \Omega_{n-1n-1}^{-1} \Sigma_\omega^{-1} F$$

$$z_n = H \Sigma_\eta^{-1} y_n - F^T \Sigma_\omega^{-1} \Omega_{n-1n-1}^{-1} H \Sigma_\eta^{-1} y_{n-1}$$

下三角矩阵求解

$$m_N = z_N$$

对于 $n = N - 1, \dots, 0$

$$\Omega_n m_n = z_n - \Omega_{n+1} m_{n+1}$$

后验期望

$$m_{\text{post}} = [m_0; m_1; \dots, m_N]$$



线性平滑问题

➤ 练习

- 对于线性卡尔曼平滑 Ω_n 是对称正定矩阵。
- 线性卡尔曼平滑求得的 m_N 和线性卡尔曼滤波求得的 m_N 一样，但是 $m_n (0 \leq n < N)$ 就不一致了。