

# 非线性数据同化问题

黄政宇

北京大学北京国际数学研究中心  
北京大学国际机器学习研究中心



# 数据同化问题

## ➤ 非线性数据同化问题

演化方程:  $x_{n+1} = \mathcal{F}(x_n) + \omega_{n+1}$

观测方程:  $y_{n+1} = \mathcal{H}(x_{n+1}) + \eta_{n+1}$

## ➤ 假设

高斯演化噪音:  $\rho_\omega = \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\omega)$

高斯观测噪音:  $\rho_\eta = \mathcal{N}(x; 0, \Sigma_\eta)$

高斯先验分布:  $\rho_{\text{prior}}(x) = \mathcal{N}(x; r_0, \Sigma_0)$



# 数据同化问题

► 优化方法 (weak constraint 4D variational data assimilation, w4D-Var )

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_X & \frac{1}{2} \| C_0^{-\frac{1}{2}} (x_0 - m_0) \|^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \| \Sigma_\omega^{-\frac{1}{2}} (x_{n+1} - \mathcal{F}(x_n)) \|^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \| \Sigma_\eta^{-\frac{1}{2}} (y_{n+1} - \mathcal{H}(x_{n+1})) \|^2 \end{aligned}$$

$$X = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$$



# 数据同化问题

➤ 优化方法 (4D variational data assimilation, 4D-Var )

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_X & \frac{1}{2} \| C_0^{-\frac{1}{2}} (x_0 - m_0) \|^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \| \Sigma_\eta^{-\frac{1}{2}} (y_{n+1} - \mathcal{H}(x_{n+1})) \|^2 \end{aligned}$$

Constraints:  $x_{n+1} = \mathcal{F}(x_n)$

$X = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$



# 数据同化问题

► 优化方法 ( 3D variational data assimilation, 3D-Var )

$$x_0 = m_0$$

对  $n = 0, 1, \dots, N - 1$

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{x_{n+1}} & \frac{1}{2} \|\Sigma_{\omega}^{-\frac{1}{2}} (x_{n+1} - \mathcal{F}(x_n))\|^2 \\ & + \frac{1}{2} \|\Sigma_{\eta}^{-\frac{1}{2}} (y_{n+1} - \mathcal{H}(x_{n+1}))\|^2 \end{aligned}$$

当  $\mathcal{H}(x) = Hx$ , 我们有

$$x_{n+1} = (I - KH)\mathcal{F}(x_n) + Ky_{n+1}$$

$$S = H\Sigma_{\omega}H^T + \Sigma_{\eta}$$

$$K = \Sigma_{\omega}H^T S^{-1}$$



# Lorenz63 系统

## ► 常微分方程系统

$$\frac{dx_1}{dt} = \sigma(x_2 - x_1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1(r - x_3) - x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - \beta x_3$$

其中  $\sigma = 10$ ,  $\beta = \frac{8}{3}$ ,  $r = 10$  或者 28。

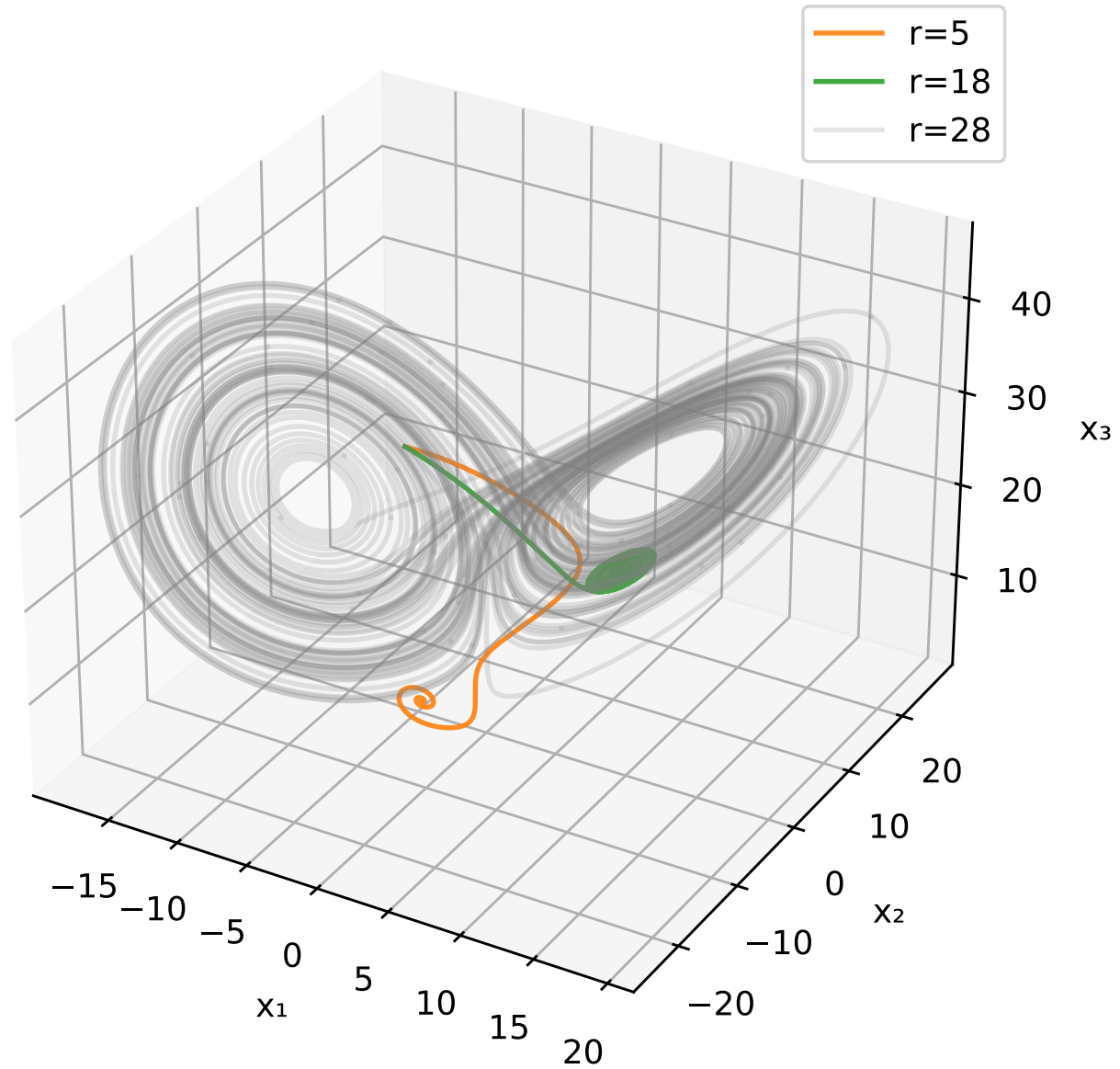
其中  $\sigma, r, \beta \in R^+$ , 吸引子(平衡点) 包括  $(0,0,0)$ ,  
 $(\pm\sqrt{\beta(r-1)}, \pm\sqrt{\beta(r-1)}, r-1)$ 。

- $r < 24.74$ , 系统不是混沌的, 会收敛到一个吸引子
- $24.74 < r < 148.4$ , 系统变得混沌。



# Lorenz63 系统

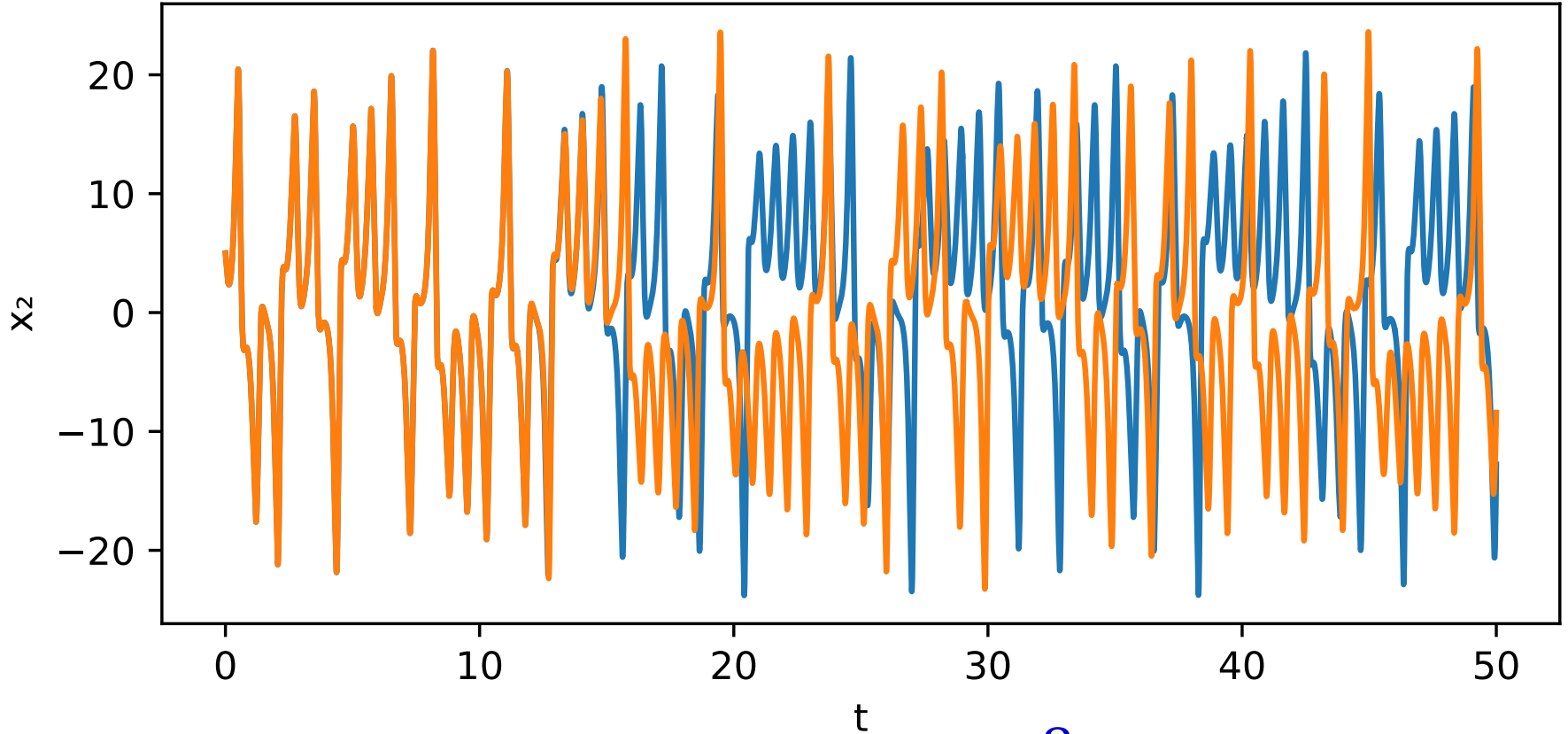
► 混沌系统





# Lorenz63 系统

## ▶ 初值不连续依赖



$$\sigma = 10, r = 28, \beta = \frac{8}{3}$$

$$x(0) = [-8.0; 5.0; 25] \quad \delta x_2(0) = 10^{-6}$$





# Lorenz63 系统

## ➤ 导数“爆炸”

考虑  $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$ ，混沌Lorenz63系统，

$$\frac{dx_1}{dt} = \sigma(x_2 - x_1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1(r - x_3) - x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - \beta x_3$$

考虑任意初值，比如  $[-8.0; 5.0; 25]$ ，定义

$$G(r) = \int_{30}^{50} x_3(t; r) dt$$

计算  $G(r)$ ，并用伴随求解器计算  $\frac{dG(r)}{dr}$ 。



# Lorenz63 系统

➤ 导数“爆炸”

前向欧拉方法：

$$x(t_{n+1}; r) = x(t_n; r) + \Delta t f(x(t_n); r)$$

目标函数：

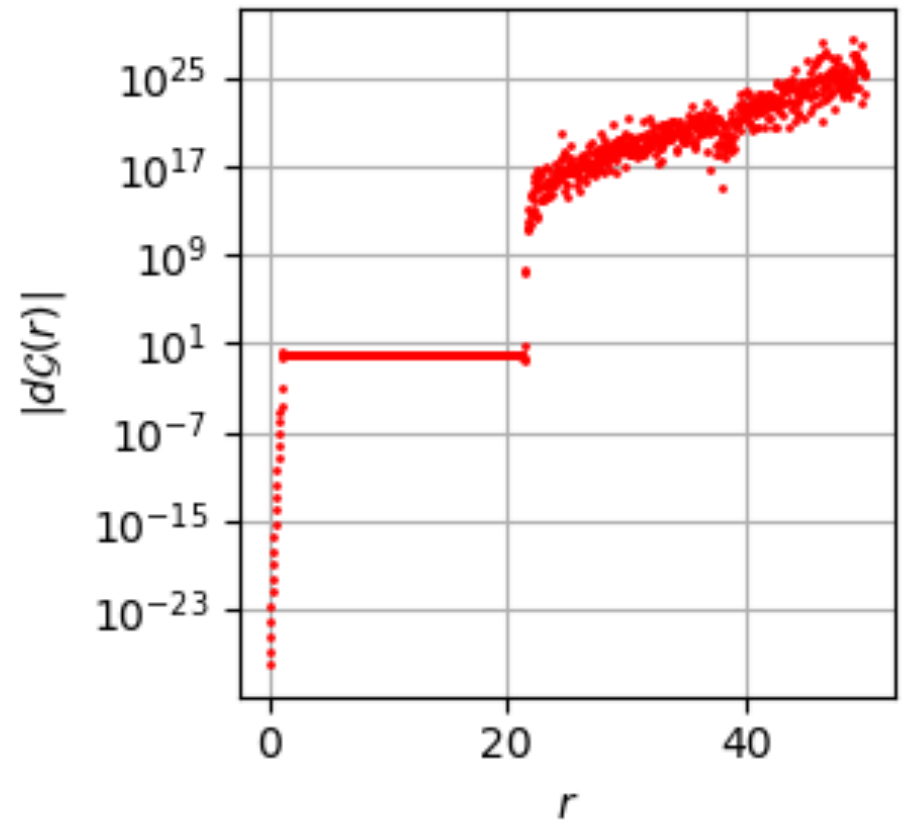
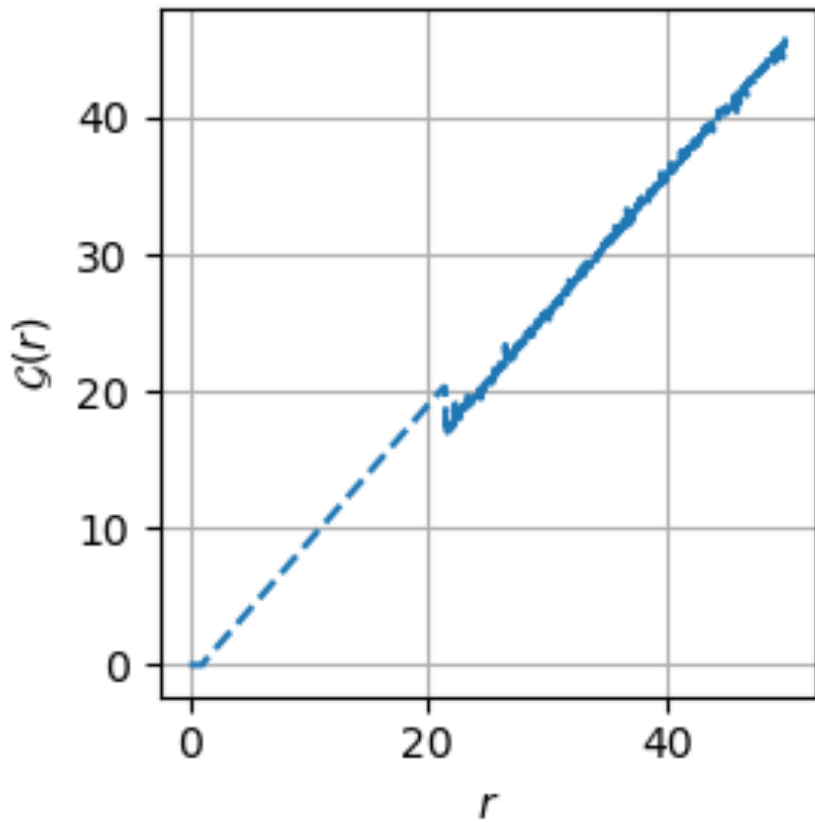
$$G(r) = \frac{1}{N_t - N_s} \sum_{n=N_s}^{N_t-1} x_3(t_n; r)$$

计算 $G(r)$ ，并用伴随求解器计算 $\frac{dG(r)}{dr}$ 。



# Lorenz63 系统

## ➤ 导数“爆炸”





# 数据同化问题

## ➤ 贝叶斯方法

