基于矩匹配的降阶模型

黄政宇
北京大学北京国际数学研究中心
北京大学国际机器学习研究中心

线性动力系统

线性模型

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t) + Bw(t)$$
$$y(t) = C\boldsymbol{u}(t) + \mathrm{D}w(t)$$
$$\boldsymbol{u}(-\infty) = \mathbf{0}$$

显示解

$$\boldsymbol{u}(t, w; -\infty, \mathbf{0}) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, w(\tau) d\tau$$

$$y(t) = C\int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, w(\tau) d\tau + Dw(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau) w(\tau) d\tau$$

$$h(t) = \begin{cases} Ce^{At}B + \delta(t)D, & t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

线性动力系统

- Laplace变化

$$H(\xi) = (\mathcal{L}h)(\xi) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-\xi t}d\tau$$

$$h(t) = (\mathcal{L}^{-1}H)(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} H(\xi)e^{\xi t}d\xi$$

- 输入输出映射

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)w(\tau)d\tau = (h*w)(t)$$

$$(\mathcal{L}h)(\xi) = h_0 + h_1\xi^{-1} + h_2\xi^{-2} + h_3\xi^{-3}\cdots h_k\xi^{-k}\cdots$$

$$(\mathcal{L}y)(\xi) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)w(\tau)d\tau e^{-\xi t}dt$$

$$= (\mathcal{L}h)(\xi)\,(\mathcal{L}w)(\xi)$$

- 传递函数(Transfer function)

$$H(\xi) = \int_0^\infty e^{-\xi t} h(t)\, dt$$

$$\eta_m(\xi_0) = \int_0^\infty t^m e^{\xi_0 t} h(t)\, dt = (-1)^m \frac{d^m}{d\xi^m} H(\xi_0)$$

$$\begin{aligned} H(\xi) &= H(\xi_0) + (-1)\frac{d}{d\xi} H(\xi_0)\frac{\xi-\xi_0}{1!} + \cdots \\ &\quad +(-1)^m \frac{d^m}{d\xi^m} H(\xi_0)\frac{(\xi-\xi_0)^m}{m!} + \cdots \\ &= \eta_0(\xi_0) + \eta_1(\xi_0)\frac{\xi_0-\xi}{1!} + \cdots \eta_m(\xi_0)\frac{(\xi_0-\xi)^m}{m!} + \cdots \end{aligned}$$

线性动力系统

- 线性模型

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t) + Bw(t)$$
$$y(t) = C\boldsymbol{u}(t) + \mathrm{D}w(t)$$
$$\boldsymbol{u}(-\infty) = \boldsymbol{0}$$

- 传递函数

$$H(\xi) = C(\xi I - A)^{-1}B + D$$

$$\eta_0(\xi) = C(\xi_0 I - A)^{-1}B + D$$
$$\eta_m(\xi) = m!\, C(\xi_0 I - A)^{-m-1}B$$

- 传递函数(Transfer function)

$$H(\xi)=\int_0^{\infty} e^{-\xi t} h(t)\, dt$$

$$H(\xi)\ =\eta_0(\infty)+\ \eta_1(\infty)\frac{1}{\xi}+\cdots\ \eta_m(\infty)\frac{1}{\xi^m}+\cdots$$

- 传递函数

$$\begin{aligned} H(\xi) &= C(\xi I\ -A)^{-1}B+D \\ &= C\left(\frac{1}{\xi}+\frac{A}{\xi^2}+\frac{A^2}{\xi^3}\cdots\cdots\right)B+D \end{aligned}$$

$$\eta_0(\xi)=D$$
$$\eta_m(\xi)=CA^{m-1}B$$

线性动力系统

- 线性模型

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) = A\boldsymbol{u}(t) + Bw(t)$$
$$y(t) = C\boldsymbol{u}(t) + Dw(t)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

- 基于 Petrov-Galerkin 投影的降阶模型

$$\frac{d\boldsymbol{q}(t)}{dt} = (W^T V)^{-1} W^T \left(AV\boldsymbol{q}(t) + Bw(t)\right)$$

$$y(t) \approx CV\boldsymbol{q}(t) + Dw(t)$$

$$\begin{pmatrix} A_{\mathrm{r}} & B_{\mathrm{r}} \\ C_{\mathrm{r}} & D_{\mathrm{r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (W^T V)^{-1} W^T AV & (W^T V)^{-1} W^T B \\ CV & D \end{pmatrix}$$

矩匹配方法（Moment matching）

- 线性模型的传递函数

$$H(\xi) = \eta(\xi_0) + \eta_1(\xi_0)\frac{\xi_0 - \xi}{1!} + \cdots \frac{d^m}{d\xi^m}\eta_m(\xi_0)\frac{(\xi_0 - \xi)^m}{m!} + \cdots$$

- 基于 Petrov-Galerkin 投影的降阶模型的传递矩阵

$$H_r(\xi) = \eta_{r0}(\xi_0) + \eta_{r1}(\xi_0)\frac{\xi_0 - \xi}{1!} + \cdots \eta_{rm}(\xi_0)\frac{(\xi_0 - \xi)^m}{m!} + \cdots$$

矩匹配方法

- 矩匹配

选定ξ_0，根据

$$\eta_m(\xi_0)=\eta_{rm}(\xi_0)\quad(m=0,1,\cdots k)$$

确定W和V

构造降阶模型

$$\begin{pmatrix} A_\mathrm{r} & B_\mathrm{r} \\ C_\mathrm{r} & D_\mathrm{r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (W^TV)^{-1}W^TAV & (W^TV)^{-1}W^TB \\ CV & D \end{pmatrix}$$

矩匹配方法

- 高维模型

$$H(\xi) = \mathrm{C}(\xi I - A)^{-1}B + D$$
$$= \eta_0(\infty) + \eta_1(\infty)\frac{1}{\xi} + \cdots \eta_m(\infty)\frac{1}{\xi^m} + \cdots$$

$$\eta_0(\infty) = D, \qquad \eta_m(\infty) = CA^{m-1}B \ \ \forall\, m \geq 1$$

- 降阶模型

$$\eta_{r0}(\infty) = D$$

$$\eta_{rm}(\infty) = CV((W^TV)^{-1}W^TAV)^{m-1}(W^TV)^{-1}W^TB \qquad \forall\, m \geq 1$$

矩匹配方法

矩匹配不变性

基于Petrov-Galerkin投影的降阶模型的传递函数的矩

$\eta_{r0}(\infty)$，$\eta_{rm}(\infty)\quad \forall\, m \geq 1$

或者

$\eta_{r0}(\xi_0)$，$\eta_{rm}(\xi_0)\ \forall\, m \geq 1$

仅依赖于子空间Range(W)和Range(V)，并不依赖于左右降阶基W或V的选取。

矩匹配方法

- 矩匹配目标

$$\eta_m(\xi_0) = \eta_{rm}(\xi_0), \qquad \forall\, 1 \le m \le k$$

为了简化起见，本章剩余部分将重点放在单输入-单输出的情况上，即

$$B = b \in R^N, \quad C^T = c^T \in R^N$$

矩匹配

矩匹配定理

选取右降阶基$V \in R^{N\times k}$使得其值域满足

$$\mathrm{Range}(V) = \mathcal{K}_n(A,b) = \mathrm{span}\{b, Ab, A^2b, \cdots\cdots A^{k-1}b\}$$

选取左降阶基$W \in R^{N\times k}$ 满足

$$W^T V = I$$

那么，利用 W和 V通过Petrov-Galerkin投影方法从高维模型(A,B,C,D)得到的降阶模型，将满足以下性质：

$$\eta_{rm}(\infty) = \eta_m(\infty) \ \forall\, 0 \le m \le k-1$$

Arnoldi方法

- Arnoldi方法

  -输入：$A \in R^{N\times N}$， $b \in R^N$

  -输出：$\mathcal{K}_k(A,b)$的正交基$V_k \in R^{N\times k}$

- 基本想法

  $V_m \Leftrightarrow \mathrm{span}\{b, Ab, A^2 b, \cdots\cdots A^{m-1} b\}$

  $v_{m+1} = Av_m - V_m(V_m^T A v_m)$

- Arnoldi方法

  -输入：$A \in R^{N\times N}$， $b \in R^N$

  -输出：$\mathcal{K}_k(A,b)$的正交基$V_k \in R^{N\times k}$

$$v_1 = \frac{b}{\|b\|}$$

$$V_1 = [v_1]$$

$$\alpha_1 = v_1^T A v_1 H_1 = [\alpha_1] w = A v_1$$

$$f_1 = A v_1 - V_1\,(V_1^T A v_1)$$

For $j = 1{:}\,k-1$ do

$$v_{j+1} = \frac{f_j}{\|f_j\|}$$

$$V_{j+1} = [V_j，\ v_{j+1}]$$

$$f_{j+1} = A v_{j+1} - V_{j+1}(V_{j+1}^T A v_{j+1})$$

Arnoldi 方法

➢ Hessenberg 矩阵

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & * & * & & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & * & \cdots & & * & \\ & \beta_2 & * & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & \alpha_{k-1} & & * \\ & & & \cdots & \beta_{k-1} & & \alpha_k \end{bmatrix}$$

$V_k^T V_k = I$

$H_k = V_k^T A V_k$ 是上Hessenberg矩阵，$V_k^T b = \|b\| e_1$

$AV_j = V_j H_j + f_j e_j^T$

$V_j^T V_j = I \qquad V_j^T f_j = 0 \qquad v_{j+1} = \dfrac{f_j}{\|f_j\|}$

Arnoldi方法

- Arnoldi方法

$$v_1 = \frac{b}{\|b\|}$$
$$V_1 = [v_1]$$
$$\alpha_1 = v_1^T A v_1 H_1 = [\alpha_1]$$
$$f_1 = A v_1 - \alpha_1 v_1$$

For $j = 1 : m - 1$ do

$$\beta_j = \|f_j\| \quad v_{j+1} = \frac{f_j}{\beta_j} \quad V_{j+1} = [V_j, \ v_{j+1}]$$
$$h = V_{j+1}^T (A v_{j+1})$$
$$f_{j+1} = A v_{j+1} - V_{j+1} h$$
$$H_{j+1} = \begin{bmatrix} H_j & h \\ \beta_j e_j^T & \end{bmatrix}$$

矩匹配

矩匹配定理

定义 $\mathrm{R_j} = [b\ Ab\ A^2b\ \cdots\cdots A^{k-1}b]$

$$O_j^T = [c^T\ A^Tc^T\ {A^T}^2c^T \cdots\cdots {A^T}^{k-1}c^T]$$

假设$H_j = Q_jR_j(1 \le j \le k)$均非奇异。那么可以选取右降阶基$V \in R^{N\times k}$使其满足

$$\mathrm{Range}(V) = \mathcal{K}_k(A, b)$$

选取左降阶基$W \in R^{N\times k}$使其满足

$$\mathrm{Range}(W) = \mathcal{K}_k(A^T, c^T) \qquad W^TV = I$$

利用 W和 V通过Petrov-Galerkin投影方法从高维模型(A, B, C, D)得到的降阶模型，将满足以下性质：

$$\eta_{rm}(\infty) = \eta_m(\infty) \qquad \forall\ 0 \le m \le 2k-1$$

双侧Lanczos方法

- 双侧Lanczos方法

  -输入：$A \in R^{N\times N}$， $b \in R^N$

  -输出：$\mathcal{K}_k(A,b)$ 的基$V_k \in R^{N\times k}$, $\mathcal{K}_n(A^T,c^T)$的基

  $W_k \in R^{N\times k}$，满足$W_k^T V_k = I$。

- 基本想法

$$V_m \Leftrightarrow \mathrm{span}\{b, Ab, A^2 b, \cdots\cdots, A^{m-1}b\}$$

$$W_m \Leftrightarrow \mathrm{span}\left\{c^T, A^T c^T, {A^T}^2 c^T, \cdots\cdots, {A^T}^{k-1} c^T\right\}$$

$$v_{m+1} = Av_m - \alpha_m v_m - \gamma_m v_{m-1}$$

$$w_{m+1} = A^T w_m - \alpha_m w_m - \beta_m w_{m-1}$$

$$v_{m+1} \perp w_m，\ \ w_{m+1} \perp v_m \rightarrow \alpha_m = w_m^T A v_m$$

$$v_{m+1} \perp w_{m-1} \rightarrow \gamma_m = w_{m-1}^T A v_m$$

$$w_{m+1} \perp v_{m-1} \rightarrow \beta_m = w_m^T A v_{m-1}$$

双侧Lanczos方法

- 双侧Lanczos方法

-输入：$A \in R^{N \times N}$， $b \in R^N$

-输出：$\mathcal{K}_k(A,b)$ 的基$V_k \in R^{N \times k}$, $\mathcal{K}_n(A^T, c^T)$的基 $W_k \in R^{N \times k}$，满足$W_k^T V_k = I$。

$$\beta_1 = \sqrt{|b^T c^T|},\ \gamma_1 = \mathrm{sign}(b^T c^T)\beta_1,\ v_1 = \frac{b}{\beta_1},\ w_1 = \frac{c^T}{\gamma_1}$$

For j $= 1{:}\,k-1$ do

$$\alpha_j = w_j^T A v_j$$

$$f_{j+1} = A v_j - \alpha_j v_j - \gamma_j v_{j-1}$$

$$g_{j+1} = A^T w_j - \alpha_j w_j - \beta_j w_{j-1}$$

$$\beta_{j+1} = \sqrt{|{f_{j+1}}^T g_{j+1}|},\ \gamma_{j+1} = \mathrm{sign}({f_{j+1}}^T g_{j+1})\beta_{j+1}$$

$$v_{j+1} = \frac{f_{j+1}}{\beta_{j+1}},\ w_{j+1} = \frac{g_{j+1}}{\gamma_{j+1}}$$

双侧Lanczos方法

- 三对角矩阵

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_3 & \cdots & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ & & & & \alpha_{k-1} & \gamma_k \\ & & & \cdots & \beta_k & \alpha_k \end{bmatrix}$$

$W_k^T V_k = I$

$H_k = W_k^T A V_k$ 是三对角矩阵，$W_k^T b = \beta_1 e_1$，$cV_k = \gamma_1 e_1^T$

矩匹配方法

矩匹配定理

选取$\xi_0 \in \mathbb{C}$和右降阶基$V \in R^{N\times k}$使得其值域满足

$$\begin{aligned}\mathrm{Range}(V) &= \mathcal{K}_k((\xi_0 I - A)^{-1}, (\xi_0 I - A)^{-1} b) \\ &= \mathrm{span}\{(\xi_0 I - A)^{-1} b, (\xi_0 I - A)^{-2} b, \cdots\cdots (\xi_0 I - A)^{-k} b\}\end{aligned}$$

选取左降阶基$W \in R^{N\times k}$ 满足

$$W^T V = I$$

那么，利用 W和 V通过Petrov-Galerkin投影方法从高维模型(A, B, C, D)得到的降阶模型，将满足以下性质：

$$\eta_{rm}(\xi_0) = \eta_m(\xi_0) \qquad \forall\, 0 \le m \le k-1$$

矩匹配方法

多点矩匹配定理

选取$\xi_{\mathrm{i}} \in \mathbb{C}\ (1 \le i \le l)$和右降阶基$V \in R^{N\times k}$使得其值域满足

$$\mathrm{Range}(V) = \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{K}_k((\xi_i I - A)^{-1}, (\xi_i I - A)^{-1} b)$$

选取左降阶基$W \in R^{N\times n}$ 满足

$$W^T V = I$$

那么，利用 W和 V通过Petrov-Galerkin投影方法从高维模型(A, B, C, D)得到的降阶模型，将满足以下性质：

$$\eta_{rm}(\xi_i) = \eta_m(\xi_i) \quad \forall\ 1 \le i \le l, 0 \le m \le k-1$$

矩匹配方法

多点矩匹配定理

选取$\xi_{\mathrm{i}} \in \mathbb{C}\ (1 \le i \le 2l)$和左右降阶基$V, W \in R^{N \times n}$使得其值域满足

$$\mathrm{Range}(V) = \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{K}_k((\xi_i I - A)^{-1}, (\xi_i I - A)^{-1} b)$$

$$\mathrm{Range}(W) = \bigcup_{i=l+1}^{2l} \mathcal{K}_k((\xi_i I - A)^{-T}, (\xi_i I - A)^{-T} c^T)$$

并且$W^T V$非奇异。

那么，利用 W 和 V 通过Petrov-Galerkin投影方法从高维模型(A, B, C, D)得到的降阶模型，将满足以下性质：

$$\eta_{rm}(\xi_i) = \eta_m(\xi_i)\ \forall 1 \le i \le 2l, 0 \le m \le 2k - 1$$

应用

➢ 固体力学、声学问题