2022 秋: 代数学一 (实验班) 期中考试

姓名: _____   院系: _____   学号: _____   分数:

时间: 110 分钟 满分: 110 分, 总分不超过 100 分

判断题 在下表中填写 T 或 F (10 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

1. 任意两个群 G 和 G' 之间都存在一个同态 $\phi: G \to G'$.

For any two groups G and G', there exists a homomorphism $\phi: G \to G'$.

2. 用 $\mathbb{R}$ 表示所有实数构成的加法群, 取一个正整数 n, 记 $n\mathbb{R} = \{nr \mid r \in \mathbb{R}\}$. 那么 $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$ 是一个 n 阶的循环群.

Let $\mathbb{R}$ denote the group of real numbers, n a positive integer, and put $n\mathbb{R} = \{nr \mid r \in \mathbb{R}\}$. Then $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$ is a cyclic group of order n.

3. S_9 中存在一个元素的阶恰好是 18.

S_9 contains an element of order exactly 18.

4. 如果 G 的交换子群 (或导出子群) 是它自己, 那么 G 是单群.

If the commutator subgroup of a group G is G itself, then G is a simple group.

5. 如果 H 是群 G 的正规子群且 H' 是群 G' 的正规子群, 假设 H 同构于 H' 且 G 同构于 G'. 那么 G/H 同构于 G'/H'.

If H is a normal subgroup of G and H' is a normal subgroup of G', and suppose that H is isomorphic to H' and G is isomorphic to G', then G/H is isomorphic to G'/H'.

6. 一个有限幂零群是它所有西罗子群 (对不同的素数) 的直积.

A finite nilpotent group is the direct product of its Sylow subgroups (of different primes).

7. 每一个阶为素数幂的群是可解的.

Every group of prime-power order is solvable.

8. 设 p 为一个素数, P 是一个有限群 G 的西罗 p-子群. 那么, 对 G 的任一子群 H, $H \cap P$ 是 H 的西罗 p-子群.

Let p be a prime number and P a Sylow p-subgroup of a finite group G. Then for any subgroup H of G, $H \cap P$ is a Sylow p-subgroup of H.

9. 设 G 是一个有限交换群. 则 G 的每个有限维不可约表示都是一维的.

Let G be a finite abelian group. Every finite dimensional irreducible representation of G is one-dimensional.

10. 一个有限群 G 在一个有限集 X 上传递地作用. 则在 $\mathbb{C}[X] = \left\{ \sum_{x \in X} a_x[x] \,\middle|\, a_x \in \mathbb{C} \right\}$ 上诱导的 G 的表示是不可约的.

Let G be a finite group acting transitively on a finite set X. The induced representation of G on $\mathbb{C}[X] = \left\{ \sum_{x \in X} a_x[x] \,\middle|\, a_x \in \mathbb{C} \right\}$ is irreducible.

解答题一 (15 分) 证明: 阶为 175 的群一定是交换群. 给出所有 (互不同构的) 阶为 175 的群. (如果使用素数平方阶群是交换的这样的结论，请证明.)

Prove that a group of order 175 must be commutative. List all groups of order 175, up to isomorphisms. (If you need to use a statement that a group of prime square order is abelian, you need to provide a proof.)

解答题二 (15 分)

设 (ρ, V) 是一个有限群 G 的有限维 $\mathbb{C}$-表示. 考虑其中 G-不变子空间

$$V^G := \{v \in V \mid \rho(g)(v) = v \text{ for all } g \in G\}.$$

(1) 证明: $\dim V^G$ 等于平凡表示在 V 中的重数.

(2) 证明: $\dim V^G = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$.

(3) 请用 $\rho(g)$ ($g \in G$) 的线性组合构造一个满射 $\phi : V \to V^G$, 使得 $\phi^2 = \phi$ (即 ϕ 是一个投影) 且 ϕ 是表示同态.

Let (ρ, V) be a finite dimensional $\mathbb{C}$-representation of a finite group G. Consider the G-invariant subspace

$$V^G := \{v \in V \mid \rho(g)(v) = v \text{ for all } g \in G\}.$$

(1) Show that $\dim V^G$ is the same as the multiplicity of the trivial representation appearing in V.

(2) Show that $\dim V^G = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)$.

(3) Construct a *surjective* map $\phi : V \to V^G$, expressed in terms of a linear combination of linear operators $\rho(g)$ for $g \in G$, such that $\phi^2 = \phi$ (i.e. ϕ is a projection) and ϕ is a homomorphism.

解答题三 (15 分) (1) 设 G 是一个群. 证明如下两个集合之间有一一对应:

(a) G 中指数为 2 的子群 H,

(b) 非平凡的同态 $\phi : G \to \mathbf{Z}_2$.

(2) 对正整数 $n \geq 3$, 给出二面体群 D_{2n} 中所有指数为 2 的子群 (用生成元表出). 证明你的结论.

(1) Let G be a group. Show that there is a bijection between

(a) subgroups H of G of index 2; and

(b) nontrivial homomorphism $\phi : G \to \mathbf{Z}_2$.

(2) Let $n \geq 3$ be a positive integer. Describe all subgroups of the dihedral group D_{2n} of index 2, by providing their generators. Justify your answers.

解答题四 (15 分) 设 G 是一个有限群, H 是 G 的真子群 (即 $H \lneqq G$). 证明: 并集 $\bigcup\limits_{g \in G} gHg^{-1}$ 不是整个的群 G.

For G a finite group and H a proper subgroup (i.e. $H \lneqq G$). Show that the union $\bigcup\limits_{g \in G} gHg^{-1}$ cannot be equal to the entire G.

解答题五 (15 分) 假设群 G 在集合 X (可能是无限集) 上作用, H 是群 G 中指数有限的子群. 对 $x \in X$, 用 H_x 和 G_x 分别表示群 H 和 G 在 x 处的稳定子群.

(1) 证明: H 在 X 上有有限个轨道.

(2) 证明: 如果群 H 在 X 上的作用是传递的,且对某 $x \in X$ 有 $H_x = G_x$, 则 $H = G$.

(3) 证明: 如果 H 是一个正规子群, 则指数 $[G_x : H_x]$ (不管有限与否) 不依赖于 x 的选取.

Suppose that G is a group acting transitively on a set X (which may be infinite) and that H is a finite index subgroup of G. For $x \in X$, write H_x and G_x for its stabilizers in H and G, respectively.

(1) Show that H has finitely many orbits on X.

(2) Show that, if the action of H on X is transitive and for some $x \in X$, $H_x = G_x$; then H is all of G.

(3) Show that if H is normal, then $[G_x : H_x]$ (finite or not) is independent of x.

解答题六 (10 分)

一个群 G 在集合 X 上的作用称为**双传递的**, 如果这个作用是传递的，且 G 在 $X \times X - \Delta$ 上的作用是传递的, 这里 $\Delta \subset X \times X$ 是对角线集合 (即对 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$ ($x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$), 存在元素 $g \in G$ 使得 $gx_1 = x_2$ 且 $gy_1 = y_2$). 设 p 是一个素数, 记 $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$.

(1) 给出 G 的一个西罗 p-子群, 并计算它的正规化子.

(2) 证明: G 有 $p + 1$ 个不同的西罗 p-子群.

(3) 证明: G 在所有西罗 p-子群构成的集合 X 上的作用是双传递的.

Recall that a permutation action of a group G on a set X is *doubly transitive* if the action on X is transitive and the action on $X \times X - \Delta$ is transitive where $\Delta \subset X \times X$ is the diagonal (i.e., for $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$ with $x_1 \neq y_1$ and $x_2 \neq y_2$ there exists $g \in G$ such that $gx_1 = x_2$ and $gy_1 = y_2$). Let p be a prime number and let $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$.

(1) Find a Sylow p-subgroup of G and compute its normalizer.

(2) Show that G has $p + 1$ distinct Sylow p-subgroups.

(3) Show the action of G on the set X of Sylow p-subgroups is doubly transitive.

解答题七 (10 分)

设 G 是一个阶为 n 的有限群. 则左平移定义了一个同态 $\pi : G \to S_n$: 对 $g \in G$, 对应的在 G 上的置换为 $\pi_g(x) = gx$ $(x \in X)$.

(1) 证明: π_g 是一个奇置换当且仅当 g 的阶是偶数且 $[G : \langle g \rangle]$ 是奇数.

(2) 证明: 如果 G 的一个西罗 2-子群非平凡且是循环群, 则 G 有一个指数为 2 的子群.

Let G be a finite group of order n. There is a homomorphism $\pi : G \to S_n$, where $g \in G$ maps to the permutation π_g: for any $x \in G$, $\pi_g(x) = gx$.

(1) Show that π_g is an odd permutation if and only if g has even order and $[G : \langle g \rangle]$ is odd.

(2) Show that if a Sylow 2-subgroup of G is nontrivial and cyclic, then G has a subgroup H with $[G : H] = 2$.

解答题八 (5 分)

证明: 如果群 G 的中心是平凡的, 那么它的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 的中心也是平凡的.

Let G be a group. Show that if G has trivial center, then its automorphism group $\mathrm{Aut}(G)$ has trivial center.