

代数几何1

第二次测验试卷

注意事项:

1. 本次考试为闭卷考试，共2道题目，满分30分。
2. 考试中不得使用参考资料，笔记，可以使用电脑阅读试卷题目，但不可以使用电脑阅读或者搜索考试相关资料。
3. 答题时间为2021年11月24日（周四）12点至12月1日（周四）10点之间任何连续的2个小时。
4. 本次考试由考生自行决定考试时间地点。考试计时从考生阅读考试题目开始。考生需要在2021年12月1日上课10点前提交试题解答。过期未交则期成绩为不及格。同时提交平时作业完成证明（45道题）。
5. 要求使用LaTeX编辑解答，生成pdf文件，将pdf文件以附件形式发给助教。邮件标题：姓名 学号 代数几何1测验2。使用LaTeX时间不计入答题时间。
6. 本次考试无人现场监督。考生在考试过程中应遵守北京大学所有关于闭卷考试的规定。如有违反，本次考试成绩为0。
7. 请考生将答题纸装订完整，解答誊写清楚，如有遗失或者解答无法辨认的情况，后果自负。考生所提交的答案以任课教师和助教所见纸质解答版本为准。
8. 如果不能做出一般情况下问题的解答，可以适当增加合理条件。如果只有思路而不能完整解答，可以明确写出思路及遇到困难。在此情况下会酌情给分。
9. 如果发生在关键步骤以“显然有”等类似词语试图蒙混过关的情况，或者经批卷老师认定所写内容只是罗列结果而且与问题不相关的情况，相关题目可能会倒扣分，题目最终得分不排除为负分的可能。
10. 原则上本次考试所有题目均可以使用课本讲过的定理解决。如果需要使用课本没有的代数几何结果，需要给予证明。如果需要使用课本没有的交换代数结果，需要完整陈述该结果。

QUIZ 2: ALGEBRAIC GEOMETRY I, FALL 2022

To be finished in consecutive 2 hours.

Problem 1 (15 points)

Let X be a noetherian scheme and F a coherent sheaf on X . For each point $x \in X$, define

$$\phi(x) = \dim_{\kappa(x)} F_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x).$$

Prove :

- (1) ϕ is upper-semi-continuous on X .
- (2) Assume that X is reduced, and that ϕ is constant. Prove F is locally free.
- (3) Give an example of non-reduced scheme X and a coherent sheaf F such that ϕ is constant but F is not locally free.

Problem 3 (15 points)

Let X be a noetherian scheme. Prove that X is affine if and only if for every integral closed subscheme $Y \subset X$ (Y could equal X if X is itself an integral scheme) Y is affine.