



2-Cycles sur les hypersurfaces cubiques de dimension 5

Lie Fu¹ · Zhiyu Tian²

Received: 16 January 2018 / Accepted: 8 November 2018 / Published online: 4 December 2018
© Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2018

Résumé

On étudie les cycles algébriques de codimension 3 sur les hypersurfaces cubiques lisses de dimension 5. Pour une telle hypersurface, on démontre d’une part que son groupe de Griffiths des cycles de codimension 3 est trivial et d’autre part que l’application d’Abel–Jacobi induit un isomorphisme entre son groupe de Chow des cycles de codimension 3 algébriquement équivalents à zéro et sa jacobienne intermédiaire.

Abstract

We study 2-cycles of a smooth cubic hypersurface of dimension 5. We show that the Griffiths group of 2-cycles is trivial and the Abel–Jacobi map induces an isomorphism between the Chow group of algebraically trivial 2-cycles and the intermediate Jacobian.

1 Introduction

On s’intéresse dans cet article à l’étude des cycles algébriques des hypersurfaces cubiques (lisses) de dimension 5 définie sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes. L’objet central est leurs anneaux de Chow, qui consistent en des combinaisons linéaires formelles de sous-schémas fermés intègres modulo l’équivalence rationnelle, munis d’un produit d’intersection bien défini [13].

Soit $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^6$ une telle hypersurface. Ses groupes de Chow sont bien compris sauf en codimension 3:

Lie Fu et Zhiyu Tian sont soutenus par le projet HodgeFun (ANR-16-CE40-0011) et par “Projet Inter-laboratoire 2017” financé par Fédération de Recherche en Mathématiques Rhône-Alpes/Auvergne CNRS 3490. Lie Fu est aussi soutenu par le projet ECOVA (ANR-15-CE40-0002) et LABEX MILYON (ANR-10-LABEX-0070). Zhiyu Tian est aussi soutenu par les financements “Recruitment of Global Experts”, NSFC N° 11871155 et N° 11831013.

✉ Lie Fu
fu@math.univ-lyon1.fr

Zhiyu Tian
zhiyutian@bicmr.pku.edu.cn

¹ Institut Camille Jordan UMR 5208, Université Claude Bernard Lyon 1, 69622 Villeurbanne Cedex, France

² Centre International de la Recherche Mathématique de Pékin, Pékin Université, Beijing 100871, China

- $\text{CH}^0(X) \cong \mathbb{Z}$, engendré par la classe fondamentale de X .
- $\text{CH}^1(X) \cong \mathbb{Z}$, engendré par la classe de section hyperplane $h := c_1(\mathcal{O}_X(1))$, grâce au théorème classique de Lefschetz sur les sections hyperplanes.
- $\text{CH}^2(X) \cong \mathbb{Z}$, engendré par h^2 . Ceci résulte de la décomposition de la diagonale de Bloch–Srinivas [6]. Donnons quelques détails: X étant rationnellement connexe, Théorème 1 *loc. cit.* implique que $\text{CH}^2(X)_{\text{hom}} = \text{CH}^2(X)_{\text{alg}}$ et que le dernier est faiblement représentable. Comme $H^3(X, \mathbb{Z})$ est nul, par [22, Theorem 1.9], le représentant algébrique de $\text{CH}^2(X)_{\text{alg}}$ est zéro. Par conséquent, $\text{CH}^2(X)$ est isomorphe à son image par l’application classe de cycle.
- $\text{CH}^4(X) \cong \mathbb{Z}$, engendré par la classe d’une droite projective contenue dans X . D’une part, par [24], le groupe de Chow des courbes de X est engendré par les droites; d’autre part, toutes les droites sont rationnellement équivalentes car la variété de Fano des droites de X est de Fano et donc rationnellement connexe.
- $\text{CH}^5(X) \cong \mathbb{Z}$, engendré par la classe d’un point de X , car X est unirationnelle.

Dans le travail présent, on complète la liste ci-dessus par le calcul de $\text{CH}^3(X)$. Rappelons que l’on dispose d’une filtration

$$\text{CH}^3(X) \supset \text{CH}^3(X)_{\text{hom}} \supset \text{CH}^3(X)_{\text{alg}} \supset 0$$

par les sous-groupes des cycles algébriques *homologiquement, resp. algébriquement* triviaux (cf. [1]). Regardons les trois gradués associés à cette filtration :

- Le quotient $\text{CH}^3(X) / \text{CH}^3(X)_{\text{hom}}$ est isomorphe, *via* l’application classe, à $H^6(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, qui est engendré par la classe d’un plan projectif contenu dans X .
- Le quotient $\text{CH}^3(X)_{\text{hom}} / \text{CH}^3(X)_{\text{alg}}$ est par définition le troisième *groupe de Griffiths* [31, §20.3], noté $\text{Griff}^3(X)$.
- Pour comprendre $\text{CH}^3(X)_{\text{alg}}$, on considère l’application d’Abel–Jacobi (cf. [31, §12.1])

$$\Phi : \text{CH}^3(X)_{\text{alg}} \rightarrow J^5(X),$$

où $J^5(X) := \frac{H^5(X, \mathbb{C})}{F^3 H^5(X) \oplus H^5(X, \mathbb{Z})}$ est la *jacobienne intermédiaire* de X , qui est une variété abélienne principalement polarisée de dimension 21.

Notre résultat principal est d’identifier les deux derniers gradués et de calculer le groupe $\text{CH}^3(X)$:

Théorème 1 *Soit X une hypersurface cubique lisse de dimension 5 définie sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} . Alors*

- (1) $\text{Griff}^3(X) = 0$, i.e. $\text{CH}^3(X)_{\text{hom}} = \text{CH}^3(X)_{\text{alg}}$.
- (2) L’application d’Abel–Jacobi induit un isomorphisme $\Phi : \text{CH}^3(X)_{\text{alg}} \xrightarrow{\cong} J^5(X)(\mathbb{C})$.

Par conséquent, on a une suite exacte courte scindée

$$0 \rightarrow J^5(X)(\mathbb{C}) \xrightarrow{\Phi^{-1}} \text{CH}^3(X) \xrightarrow{\text{cl}} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

dont un scindage est fourni par la classe d’un plan projectif contenu dans X .

René Mboro [18, Proposition 0.1 et Theorem 0.9] avait déjà établi que le noyau de Φ est annulé par 18.

Remarque 2 La partie (1) du théorème 1 est l’analogue du théorème de Bloch–Srinivas [6, Theorem 1 (ii)] qui dit que pour une variété projective lisse complexe, si le groupe CH_0 est supporté sur un sous-ensemble algébrique de dimension 2, alors le deuxième groupe de Griffiths s’annule.

La partie (2) du théorème 1 est l’analogue du théorème de Murre [22] (annoncé dans [21]), basé sur les résultats de Merkurjev–Suslin en K-théorie [19] et Bloch–Ogus sur la conjecture de Gersten [5], qui dit que pour une variété projective lisse complexe, si le groupe CH_0 est supporté sur un sous-ensemble algébrique de dimension 1, alors le groupe de Chow des cycles de codimension 2 algébriquement triviaux est isomorphe, par l’application d’Abel–Jacobi, à la jacobienne intermédiaire en degré 3.

On remarque aussi que le résultat ci-dessus pour $CH^3(X)$ est compatible, en ignorant sa torsion, avec la conjecture de Bloch–Beilinson–Murre (cf. [23], [31, §23.2], [1, §11.2]), car les structures de Hodge $H^i(X, \mathbb{Q})$, pour $3 \leq i \leq 6$, sont de coniveau de Hodge ≥ 2 .

Un outil important utilisé dans la preuve du théorème 1 est la *cohomologie non ramifiée* (cf. §2), qui est un invariant birationnel pour les variétés projectives lisses. Avec l’intérêt potentiel pour le problème de rationalité des hypersurfaces cubiques de dimension 5, on peut se demander si les groupes de cohomologie non ramifiée fournissent une vraie obstruction dans cette situation. Malheureusement, le résultat suivant, qui est probablement connu par les experts, montre que toutes ces obstructions s’annulent.¹ Pour un groupe abélien A , notons par $\mathcal{H}^i(A)$ le faisceau pour la topologie de Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto H^i(U, A)$, où l’ouvert de Zariski U est munie de la topologie classique et $H^i(-, A)$ est la cohomologie singulière à coefficients dans A .

Théorème 3 *Soit X une hypersurface cubique lisse de dimension 5 définie sur \mathbb{C} . Alors*

(1)

$$H^p(X_{\text{Zar}}, \mathcal{H}^q(\mathbb{Z})) \cong \begin{cases} H^{2p}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} & \text{si } 0 \leq p = q \leq 5 \\ H^5(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 42} & \text{si } p = 2 \text{ et } q = 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(2) *De manière similaire,*

$$H^p(X_{\text{Zar}}, \mathcal{H}^q(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \cong \begin{cases} H^{2p}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \text{si } 0 \leq p = q \leq 5 \\ H^5(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\oplus 42} & \text{si } p = 2 \text{ et } q = 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, $H_{\text{nr}}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^} H_{\text{nr}}^i(X, \mathbb{Z}/n) = 0$ pour tout $i > 0$.*

(3) *La suite spectrale de coniveau*

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{Y \in X^{(p)}} H^{q-p}(\mathbb{C}(Y), \mathbb{Z}(-p)) \implies H^{p+q}(X, \mathbb{Z})$$

est dégénérée en E_2 avec le terme $E_2^{p,q} = E_{\infty}^{p,q} = H^p(X_{\text{Zar}}, \mathcal{H}^q(\mathbb{Z}))$, précisé dans (1).

La valeur de la plupart des groupes de cohomologie dans le théorème 3 était connue (cf. [12]). L’ingrédient le plus important, en plus de [5] et [12], pour avoir le résultat complet ci-dessus est l’annulation de $H_{\text{nr}}^4(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, qui résultera directement du travail de Kahn–Sujatha [15], cf. [18, P.4] et Lemme 8 pour les détails. Ceci répond une question de Voisin [34, P.144, Question 11.2]. Certains de nos arguments sont inspirés de [32] et [12].

¹ On ignore aussi s’il existe une hypersurface cubique lisse de dimension 5 rationnelle.

Remarque 4 Les annulations de cohomologie non ramifiée dans le théorème 3 laissent ouverte la question de savoir si $H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est *universellement triviale*, i.e. si la flèche

$$H^i(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H_{nr}^i(X_K/K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour toute extension du corps K/\mathbb{C} . Pour $i = 0, 1, 2$, c’est un isomorphisme pour des raisons générales. Pour $i = 3$, c’est encore un isomorphisme, comme établi par Colliot-Thélène dans [10, Théorème 5.6 (vii)].

Donnons la structure de l’article : au §2, après un rappel de quelques résultats de base en cohomologie non ramifiée dont nous aurons besoin, on montre les annulations de $H_{nr}^4(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et $H_{nr}^5(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$; le §3 contient deux ingrédients cruciaux pour la preuve du théorème 1, à savoir, le fait que $H^5(X, \mathbb{Z})$ est supporté en codimension 2 et une décomposition de la diagonale de X ; les démonstrations de la partie (1) et la partie (2) du théorème 1 sont données aux §4 et §5 respectivement ; finalement au §6 on montre le théorème 3.

Remerciements : L’idée de ce travail est issue du groupe de travail que nous avons coorganisé à Lyon en 2016-2017. Nous remercions la Fédération de Recherche en Mathématiques Rhône-Alpes-Auvergne (FR 3490) pour le support de financement *Projets Inter-laboratoires*. L’article a été préparé durant les deux rencontres *Géométrie Algébrique et Géométrie Complexe* au CIRM en janvier et décembre 2017. On remercie Olivier Benoist, Alberto Collino, Jean-Louis Colliot-Thélène et les rapporteurs pour leurs questions et nombreuses suggestions qui améliorent beaucoup cet article.

2 Cohomologie non ramifiée

2.1 Rappels

Nous renvoyons les lecteurs à [11], [9], [12] pour plus de détails sur la cohomologie non ramifiée. Certains des résultats rappelés ci-dessous (le lemme 6 par exemple) reposent sur la conjecture de Bloch–Kato, étudiée par Merkurjev–Suslin [19], [20], Rost [26] et Voevodsky [29], montrée par Voevodsky [30] et Rost (cf. [28]).

Soit X une variété complexe projective lisse connexe. On considère l’application ‘identité’

$$\pi : X_{cl} \rightarrow X_{Zar}$$

qui est un morphisme (continu) entre le site de la topologie classique et celui de la topologie de Zariski.

Pour tout groupe abélien A et tout entier positif i , on définit un faisceau pour la topologie de Zariski sur X par l’image directe dérivée du faisceau constant A :

$$\mathcal{H}^i(A) := \mathcal{H}_X^i(A) := R^i \pi_* A.$$

Autrement-dit, $\mathcal{H}^i(A)$ est le faisceau pour la topologie de Zariski associé au préfaisceau $U \mapsto H^i(U, A)$, où U est un ouvert de Zariski de X , muni de la topologie classique et H^i signifie la cohomologie singulière (Betti).

Par définition, la i -ème *cohomologie non ramifiée* de X à coefficient dans A est

$$H_{nr}^i(X, A) := H^0(X, \mathcal{H}^i(A)).$$

Pour toute sous-variété fermée intègre Y de X , on note $H^j(\mathbb{C}(Y), A) := \varinjlim_U H^j(U, A)$ où U parcourt les ouverts de Zariski non vides de Y . Grâce au travail de Bloch–Ogus sur la conjecture de Gersten [5], on a une résolution flasque suivante du faisceau $\mathcal{H}^i(A)$ pour la topologie de Zariski :

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^i(A) \rightarrow H^i(\mathbb{C}(X), A) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{Y \in X^{(1)}} i_{Y*} H^{i-1}(\mathbb{C}(Y), A(-1)) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{Y \in X^{(i)}} i_{Y*} A(-i) \rightarrow 0, \tag{1}$$

où les flèches ∂ sont données par le résidu topologique ([31, P. 417]) et i_{Y*} signifie l’image directe pour un faisceau constant par l’immersion fermée naturelle de Y vers X .

Comme la longueur de la résolution (1) est i , on a la conséquence suivante :

Corollaire 5 ([5, 0.3]) *Pour tout $j > i$, $H^j(X, \mathcal{H}^i(A)) = 0$.*

Pour comparer la cohomologie à coefficients de torsion et celle à coefficients dans \mathbb{Z} , on a besoin souvent du résultat suivant :

Lemme 6 *Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a une suite exacte courte*

$$0 \rightarrow H^j(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}))/n \rightarrow H^j(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}/n)) \rightarrow H^{j+1}(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}))/n \rightarrow 0.$$

Prenant la limite inductive sur n ,

$$0 \rightarrow H^j(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow H^j(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \rightarrow H^{j+1}(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}))_{\text{tor}} \rightarrow 0.$$

Démonstration Par [12, Théorème 3.1], on a une suite exacte courte de faisceaux pour la topologie de Zariski sur X

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times n} \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}/n) \rightarrow 0.$$

La conclusion découle directement de la suite exacte longue associée. □

Nous aurons besoin du résultat suivant, dû à Deligne dans un cadre plus général, qui compare deux suites spectrales :

Proposition 7 ([25], cf. [5, Proposition 6.4], [4, Remark 4.19]) *Soit X une variété projective lisse complexe connexe. La suite spectrale de coniveau*

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{Y \in X^{(p)}} H^{q-p}(\mathbb{C}(Y), A(-p)) \implies H^{p+q}(X, A)$$

coïncide à partir de la page E_2 avec la suite spectrale de Leray associée au morphisme continu $\pi : X_{\text{cl}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^q(A)) \implies H^{p+q}(X, A).$$

En particulier, la filtration d’aboutissement N^\bullet sur $H^k(X, A)$ est celle par le coniveau algébrique :

$$N^c H^k(X, A) = \sum_Z \ker \left(H^k(X, A) \rightarrow H^k(X \setminus Z, A) \right),$$

où Z parcourt les sous-ensembles algébriques fermés de X de codimension $\geq c$.

2.2 Quelques annulations de cohomologie non ramifiée

Dans la suite de cet article, X est une hypersurface cubique lisse de dimension 5 définie sur \mathbb{C} . On calcule sans difficulté par [31, Proposition 18.2] les nombres de Hodge de X : $h^{i,i}(X) = 1$ pour tout $0 \leq i \leq 5$, $h^{2,3}(X) = 21$ et les autres $h^{p,q}(X)$ sont nuls.

D’après [12, Proposition 3.3], $H_{nr}^{-0}(X, \mathbb{Z})$ s’annule comme X est une variété rationnellement connexe. On s’intéresse alors aux groupes de cohomologie non ramifiée à coefficients de torsion

$$H_{nr}^*(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} H_{nr}^i(X, \mathbb{Z}/n).$$

Notons que l’union ici a bien un sens car pour tous entiers positifs n, m , on a l’injectivité de la flèche $H^i(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/n) \rightarrow H^i(\mathbb{C}(X), \mathbb{Z}/nm)$ grâce aux théorèmes de Voevodsky [29,30].

Le groupe $H_{nr}^*(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ étaient bien compris sauf en degrés 4 et 5:

- $H_{nr}^0(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
- $H_{nr}^1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong H^1(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.
- $H_{nr}^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \text{Br}(X) \cong H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tor}} = 0$. (cf. [9, Proposition 4.2.3]).
- $H_{nr}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$, car d’après l’interprétation [12, Théorème 1.1], il mesure exactement le défaut de la conjecture de Hodge entière; or $H^4(X, \mathbb{Z})$ est bien engendré par la classe algébrique h^2 , où $h = c_1(\mathcal{O}_X(1))$ la classe d’une section hyperplane.
- $H_{nr}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ pour tout $i > \dim(X) = 5$, car le faisceau $\mathcal{H}^i(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$ par le théorème de Lefschetz pour les variétés affines ([2]).

Traisons les deux cas restant:

Lemme 8 ([18], P.4) *Le groupe $H_{nr}^4(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(4))$ est nul.*

Démonstration On fixe un plan projectif Π contenu dans X . Alors la projection depuis Π fournit une application rationnelle $X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$. L’éclatement de X le long de Π résout le lieu d’indétermination et donne une fibration en quadriques

$$\pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^3.$$

Notons Q la fibre générique de π , qui est une surface quadrique lisse sur le corps des fonctions $K := \mathbb{C}(\mathbb{P}^3)$.

Par [15, Theorem 3], pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a une application surjective

$$H^4(K, \mu_n^{\otimes 4}) \rightarrow H_{nr}^4(Q/K, \mu_n^{\otimes 4}), \tag{2}$$

où le groupe à gauche est la cohomologie galoisienne et le groupe à droite est la cohomologie non ramifiée, qui est plus généralement bien définie pour une variété sur un corps quelconque (cf. [12, §2.2]).

Observons que $H^4(K, \mu_n^{\otimes 4})$ est nul car la dimension cohomologique du corps K est 3 [27, Chapitre II, §4.2, Proposition 11]. Donc $H_{nr}^4(Q/K, \mu_n^{\otimes 4}) = 0$ par la surjectivité de (2). Comme $H_{nr}^i(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un invariant birationnel des variétés projectives lisses [11], on a $H_{nr}^4(X, \mu_n^{\otimes 4}) \cong H_{nr}^4(\tilde{X}, \mu_n^{\otimes 4})$, qui est nul car c’est un sous-groupe de $H_{nr}^4(Q/K, \mu_n^{\otimes 4})$. Finalement, $H_{nr}^4(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(4))$ est l’union de ses sous-groupes $H_{nr}^4(X, \mu_n^{\otimes 4})$, donc est également nul. □

Lemme 9 *Le groupe $H_{nr}^5(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(5))$ est nul.*

Démonstration La preuve est similaire à celle du lemme 8 précédent : on choisit une droite Λ contenue dans X et l'éclatement \tilde{X} de X le long de Λ admet une structure de fibration en coniques sur \mathbb{P}^4 , par la projection depuis Λ :

$$\pi : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^4.$$

Soit C la conique générique sur le corps des fonctions $K := \mathbb{C}(\mathbb{P}^4)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a une application surjective (cf. [14, Proposition A.1])

$$H^5(K, \mu_n^{\otimes 5}) \rightarrow H_{nr}^5(C/K, \mu_n^{\otimes 5}).$$

Comme la dimension cohomologique de K est 4, ces deux groupes sont nuls [27, Chapitre II, §4.2, Proposition 11]. Donc par [11], le groupe $H_{nr}^5(X, \mu_n^{\otimes 5}) \cong H_{nr}^5(\tilde{X}, \mu_n^{\otimes 5})$, qui est un sous-groupe de $H_{nr}^5(C/K, \mu_n^{\otimes 5})$, est aussi nul. \square

3 Préparations de la preuve

Rappelons que $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^6$ est toujours une hypersurface cubique lisse.

3.1 Coniveau algébrique 2

Comme $H^{5,0}(X) = H^{4,1}(X) = 0$ et $H^{3,2}(X) = 21$ (cf. [31, Proposition 18.2]), le coniveau de Hodge de $H^5(X, \mathbb{Z})$ est égal à 2. Nous montrons que son coniveau algébrique est aussi 2. Plus précisément, on a l'observation suivante :

Proposition 10 (1) *Si X est générale,² il existe une famille de plans projectifs contenus dans X paramétrée par une courbe projective lisse C , telle que l'application d'Abel–Jacobi $H^1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(X, \mathbb{Z})$ est un morphisme surjectif de structures de Hodge.*

(2) *Si X est arbitraire (lisse), alors $H^5(X, \mathbb{Z})$ est de coniveau algébrique 2, i.e. il existe un sous-ensemble algébrique fermé Z de codimension 2 dans X , tel que l'application de restriction $H^5(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(X \setminus Z, \mathbb{Z})$ est nulle.*

Démonstration Soient F le schéma de Fano des plans contenus dans X et $P \rightarrow F$ la famille universelle des plans.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{q} & X \\ \downarrow p & & \\ F & & \end{array}$$

Si X est générale, alors par le résultat de Collino [8], F est une surface lisse et l'application d'Abel–Jacobi induit un isomorphisme entre la variété d'Albanese de F et la jacobienne intermédiaire de X :

$$\begin{aligned} F &\rightarrow \text{Alb}(F) \xrightarrow{\cong} J^5(X) \\ [\Pi] &\mapsto \Phi(\Pi - \Pi_0) \end{aligned}$$

² C'est-à-dire en dehors d'un sous-ensemble algébrique fermé propre convenable dans l'espace de modules des hypersurfaces cubiques de dimension 5.

où Π_0 est un plan projectif contenu dans X fixé. En particulier, par [31, Théorème 12.17], l'application

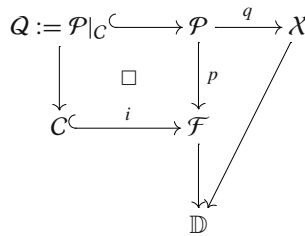
$$q_*p^* : H^3(F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^5(X, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme de structures de Hodge. On choisit $i : C \hookrightarrow F$ un diviseur lisse ample. Le théorème de Lefschetz implique que le composé

$$H^1(C, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H^3(F, \mathbb{Z}) \xrightarrow{q_*p^*} H^5(X, \mathbb{Z})$$

est bien un morphisme surjectif de structures de Hodge.

On passe dans le cadre holomorphe. Pour X arbitraire (lisse), il y a un disque analytique \mathbb{D} de petit rayon dans \mathbb{C} de centre 0 et une famille $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$ d'hypersurfaces cubiques lisses dont la fibre centrale $\mathcal{X}_0 \cong X$, tels que pour tout $t \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, \mathcal{X}_t est générale au sens ci-dessus. On considère le schéma de Fano relatif ainsi que la famille universelle :



où C est un diviseur ample général de \mathcal{F} . Donc $C \rightarrow \mathbb{D}$ est une famille de courbes qui paramètrent des plans dans les fibres de $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 H_5(Q_t, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{q_{t*}} & H_5(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z}) \\
 \downarrow & & \downarrow \cong \\
 H_5(Q, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{q_*} & H_5(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \\
 \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\
 H_5(Q_0, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{q_{0*}} & H_5(\mathcal{X}_0, \mathbb{Z})
 \end{array}$$

où $t \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, les flèches verticales sont induites par des inclusions naturelles.

Les flèches verticales entre la deuxième et la troisième ligne sont des isomorphismes car la fibre centrale Q_0 (resp. \mathcal{X}_0) est un rétract par déformation de l'espace total Q (resp. \mathcal{X}). L'autre flèche à droite est un isomorphisme car toutes les hypersurfaces cubiques lisses sont difféomorphes et la projection $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{D}$ est une submersion par le théorème de fibration d'Ehresmann (cf. [31, Proposition 9.3]). Par le paragraphe précédent, la flèche de la première ligne est la composée de

$$H_5(Q_t, \mathbb{Z}) \cong H^1(C_t, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(\mathcal{F}_t, \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z}) \cong H^5(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z}),$$

donc surjective. Il en est donc de même pour la deuxième et la troisième ligne. En particulier,

$$q_{0*} : H_5(Q_0, \mathbb{Z}) \rightarrow H_5(\mathcal{X}_0, \mathbb{Z})$$

est surjective. De manière équivalente, $H^5(\mathcal{X}_0, \mathbb{Z})$ est supportée sur la préimage de C_0 dans \mathcal{P}_0 , qui est un sous-ensemble algébrique de dimension 3. □

3.2 Décomposition de la diagonale

La technique de la *décomposition de la diagonale* est initiée par Bloch–Srinivas [6]. Nous avons besoin de la version raffinée suivante due à Paranjape [24] et Laterveer [17], cf. [31, §22] et [33, Theorem 3.18].

Théorème 11 ([33, Theorem 3.18]) *Soient Y une variété complexe projective lisse connexe de dimension n et c un entier positif. Suppose que pour tout $0 \leq k < c$, l’application de classe*

$$\text{cl}: \text{CH}_k(Y)_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow H^{2n-2k}(Y, \mathbb{Q})$$

est injective. Alors il existe un entier non nul m et une décomposition dans $\text{CH}^n(Y \times Y)$

$$m\Delta_Y = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_{c-1} + Z', \tag{3}$$

tels que Z_i est supporté sur $W_i \times W'_i$ avec $\dim W_i = i$ et $\dim W'_i = n - i$, et Z' est supporté sur $Y \times T$ avec T un sous-ensemble algébrique fermé de codimension $\geq c$ dans Y .

Pour les hypersurfaces cubiques de dimension 5, le théorème général ci-dessus donne le résultat suivant :

Corollaire 12 *Soit $X \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^6$ une hypersurface cubique lisse. Alors il existe un entier non nul m et une décomposition dans $\text{CH}^5(X \times X)$*

$$m\Delta_X = m x \times X + m l \times h + Z' \tag{4}$$

où x est un point arbitraire de X , l est une droite projective contenue dans X arbitraire, $h = c_1(\mathcal{O}_X(1))$ est la classe de section hyperplane et Z' est supporté sur $X \times T$ avec T un sous-ensemble algébrique fermé de codimension ≥ 2 dans X .

Démonstration L’hypothèse du théorème 11 est vérifiée pour $c = 2$ car $\text{CH}_0(X)$ et $\text{CH}_1(X)$ sont des groupes cycliques infinis engendrés respectivement par un point et une droite dans X (cf. §1 Introduction). On a donc une décomposition (3) avec $c = 2$. Pour déterminer Z_0 et Z_1 , on utilise encore une fois les descriptions de $\text{CH}_0(X)$ et $\text{CH}_1(X)$ plus le fait que $\text{CH}^1(X) \cong \mathbb{Z} \cdot h$, pour obtenir que $Z_0 = m_1 x \times X$ et $Z_1 = m_2 l \times h$ avec deux entiers m_1, m_2 . Finalement, pour voir que $m_1 = m_2 = m$, on fait agir (3) par correspondances sur la classe d’un point x et la classe d’une droite l . D’une part, Δ_X agit toujours par l’identité et d’autre part, $(x \times X)^*(x) = x$, $(x \times X)^*(l) = 0$, $(l \times h)^*(x) = 0$, $(l \times h)^*(l) = l$ et $Z'^*(x) = Z'^*(l) = 0$ par raison de dimension, on obtient $m x = m_1 x$ et $m l = m_2 l$. D’où, $m = m_1 = m_2$. □

4 Preuve de l’annulation de Griff³(X)

On démontre dans cette section le théorème 1 (1). Commençons par la réinterprétation cohomologique suivante du groupe de Griffiths des cycles de codimension 3. On utilise les notations du §2.

Proposition 13 *Soit X une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^6$. On a un isomorphisme $H^1(X, \mathcal{H}^4(\mathbb{Z}(4))) \cong \text{Griff}^3(X)$.*

Démonstration Considérons la suite spectrale de Leray associée au morphisme continu de sites $\pi : X_{cl} \rightarrow X_{Zar}$:

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^q(\mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{Z}).$$

D’une part, rappelons les annulations du corollaire 5: $H^p(X, \mathcal{H}^q(\mathbb{Z})) = 0$ pour tout $p > q$; d’autre part, d’après [12, Proposition 3.3 (i)], on a $H^0(X, \mathcal{H}^q(\mathbb{Z})) = 0$ pour tout $q > 0$. En regardant la suite spectrale, on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow H^2(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Z})) \rightarrow H^5(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}^4(\mathbb{Z})) \xrightarrow{d_2} H^3(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Z})) \rightarrow H^6(X, \mathbb{Z}) \tag{5}$$

Grâce à la proposition 7, la filtration d’aboutissement est celle de coniveau algébrique, donc l’image de la première flèche $H^2(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Z})) \rightarrow H^5(X, \mathbb{Z})$ est

$$N^2 H^5(X, \mathbb{Z}) := \sum_{\substack{Z \subset X \text{ Zariski fermé} \\ \text{codim } Z \geq 2}} \ker \left(H^5(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(X \setminus Z, \mathbb{Z}) \right),$$

qui est simplement $H^5(X, \mathbb{Z})$, par la proposition 10. Autrement dit, le morphisme $H^2(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Z})) \rightarrow H^5(X, \mathbb{Z})$ est surjectif (en fait un isomorphisme).

Par conséquent, la suite exacte (5) se simplifie et implique que d_2 induit un isomorphisme

$$H^1(X, \mathcal{H}^4(\mathbb{Z})) \simeq \ker \left(H^3(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Z})) \rightarrow H^6(X, \mathbb{Z}) \right).$$

Or [5, Corollary 7.4] établit un isomorphisme $H^3(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Z})) \cong CH^3(X)/alg$, le groupe des cycles de codimension 3 modulo l’équivalence algébrique. De plus, l’application $H^3(X, \mathcal{H}^3(\mathbb{Z})) \rightarrow H^6(X, \mathbb{Z})$ s’identifie, via cet isomorphisme, à l’application classe de cycles, dont le noyau est $Griff^3(X)$ par définition. On en déduit l’isomorphisme cherché. \square

Corollaire 14 *Le troisième groupe de Griffiths $Griff^3(X)$ est sans torsion.*

Démonstration Par le lemme 6 on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_{nr}^4(X, \mathbb{Z}(4))/n \rightarrow H_{nr}^4(X, \mu_n^{\otimes 4}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}^4(\mathbb{Z}(4)))[n] \rightarrow 0.$$

Comme $H_{nr}^4(X, \mathbb{Z}(4)) = 0$ par [12, Proposition 3.3 (i)], on a que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{nr}^4(X, \mu_n^{\otimes 4}) \simeq H^1(X, \mathcal{H}^4(\mathbb{Z}(4)))[n].$$

Il en résulte que $H_{nr}^4(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(4))$ est le sous-groupe de torsion du groupe $H^1(X, \mathcal{H}^4(\mathbb{Z}(4)))$, qui s’identifie à celui du groupe $Griff^3(X)$ par la proposition 13. Donc le lemme 8 nous permet de conclure. \square

Remarque 15 Les arguments dans la proposition 13 et le corollaire 14 sont essentiellement dus à Voisin [32, Corollary 1.3].

Proposition 16 *Le troisième groupe de Griffiths $Griff^3(X)$ est de torsion.*

Démonstration On utilise la décomposition raffinée de la diagonale (4) dans le corollaire 12. On peut supposer que T est de dimension pure 3, en général réductible. Soient $\tilde{T} \rightarrow T$ une désingularisation et $\tilde{Z}' \in CH_5(X \times \tilde{T})$ tel que son image dans $CH_5(X \times X)$ est $m'Z'$ avec certain entier m' . Notons $\tilde{i} : \tilde{T} \rightarrow X$ le composé de la désingularisation et l’inclusion. On écrit $\tilde{T} = \coprod_j \tilde{T}_j$ la décomposition en composantes connexes.

Soit $\alpha \in \text{CH}^3(X)_{\text{hom}}$ un 2-cycle homologiquement trivial quelconque. Faisons agir sur α les correspondances apparaissant dans (4): on a $\Delta_*(\alpha) = \alpha$, $(x \times X)_*(\alpha) = (l \times h)_*(\alpha) = 0$ par raison de dimension, et $m'Z'_*(\alpha) = \tilde{i}_* \circ \tilde{Z}'_*(\alpha)$. On obtient

$$mm'\alpha = \tilde{i}_*(\tilde{Z}'_*(\alpha)).$$

Comme $\tilde{Z}'_*(\alpha)$ est un diviseur homologue à 0 sur \tilde{T} , il est algébriquement équivalent à 0 sur \tilde{T} . Donc $mm'\alpha$ est aussi algébriquement équivalent à 0, i.e. α est de torsion dans $\text{Griff}^3(X)$. □

La combinaison du corollaire 14 et de la proposition 16 implique que $\text{Griff}^3(X) = 0$. La partie (1) du théorème 1 est démontrée. □

5 Preuve de l'isomorphisme d'Abel–Jacobi

Cette section est consacrée à la preuve du théorème 1 (2) qui dit que l'application d'Abel–Jacobi

$$\Phi : \text{CH}^3(X)_{\text{alg}} \rightarrow J^5(X)$$

est un isomorphisme.

Rappelons que $\text{CH}^3(X)_{\text{alg}}$ est un groupe divisible par le lemme standard suivant:

Lemme 17 ([4, P.10 Lemma 1.3]) *Le groupe de Chow des cycles algébriquement triviaux est divisible.*

On démontre d'abord que Φ est une 'isogénie', ou, dans le langage de [6], que $\text{CH}^3(X)_{\text{alg}}$ est faiblement représentable.

Proposition 18 *L'application d'Abel–Jacobi $\Phi : \text{CH}^3(X)_{\text{alg}} \rightarrow J^5(X)$ est surjective avec un noyau fini.*

Démonstration On utilisera la décomposition raffinée de la diagonale (4) du corollaire 12. Comme dans la démonstration de la proposition 16, on suppose que T est de dimension pure 3 et on choisit une désingularisation $\tilde{T} \rightarrow T$ équipée d'un cycle $\tilde{Z}' \in \text{CH}^3(X \times \tilde{T})$ dont l'image dans $\text{CH}_5(X \times T)$ est un multiple $m'Z'$ de Z' . On note $\tilde{i} : \tilde{T} \rightarrow X$ le composé de la désingularisation et l'inclusion. Notons que \tilde{T} n'est pas forcément connexe et on écrit $\text{Pic}^0(\tilde{T}) = \prod \text{Pic}^0(\tilde{T}_i)$ et $\text{Alb}(\tilde{T}) = \prod \text{Alb}(\tilde{T}_i)$, où $\tilde{T} = \coprod_i \tilde{T}_i$ est la décomposition en composantes connexes.

Montrons la surjectivité de Φ . Par la compatibilité entre les applications d'Abel–Jacobi et les actions des correspondances (cf. [31, §12.2]), on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{CH}^3(X)_{\text{alg}} & \xrightarrow{\Phi} & J^5(X) \\
 \downarrow \tilde{i}_* & & \downarrow \tilde{i}_* \\
 \text{CH}^3(\tilde{T})_{\text{alg}} & \xrightarrow{\text{alb}} & \text{Alb}(\tilde{T}) \\
 \downarrow \tilde{Z}'_* & & \downarrow [\tilde{Z}']_* \\
 \text{CH}^3(X)_{\text{alg}} & \xrightarrow{\Phi} & J^5(X)
 \end{array}
 \tag{6}$$

$\times mm'$ (sur la gauche) et $\times mm'$ (sur la droite)

où les flèches à droite sont induites par les morphismes indiqués sur les structures de Hodge. La décomposition (4) implique que les deux composées des flèches verticales dans (6) sont

toutes la multiplication par mm' , car les deux premiers termes de (4) agissent par zéro par raison de dimension. Elles sont donc surjectives par la divisibilité. Du coup la flèche verticale du carré inférieur est surjective. Or l'application d'Albanese alb est aussi surjective, on peut conclure que Φ est surjective.

Montrons ensuite la finitude du noyau de Φ . À nouveau, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \text{CH}^3(X)_{\text{alg}} & \xrightarrow{\Phi} & J^5(X) \\
 \downarrow \tilde{Z}'_* & & \downarrow [\tilde{Z}']_* \\
 \text{CH}^1(\tilde{T})_{\text{alg}} & \xrightarrow{\cong} & \text{Pic}^0(\tilde{T}) \\
 \downarrow \tilde{i}'_* & & \downarrow \tilde{i}'_* \\
 \text{CH}^3(X)_{\text{alg}} & \xrightarrow{\Phi} & J^5(X)
 \end{array}
 \quad (7)$$

$\times mm'$ (curved arrow from top-left to bottom-left) and $\times mm'$ (curved arrow from top-right to bottom-right)

De manière similaire, (4) implique que les composées des flèches verticales dans (7) sont toutes deux la multiplication par mm' . Maintenant pour tout $\alpha \in \ker \Phi$, par la divisibilité de $\text{CH}^3(X)_{\text{alg}}$, rappelée dans le lemme 17, il existe un $\beta \in \text{CH}^3(X)_{\text{alg}}$, tel que $\alpha = mm'\beta$. Donc $\Phi(\beta) \in J^5(X)[mm']$. Comme la flèche au milieu de (7) est un isomorphisme, on trouve que $\tilde{Z}'_*(\beta) \in \text{CH}^1(\tilde{T})_{\text{alg}}[mm']$. D'où,

$$\alpha = mm'\beta = \tilde{i}'_* \circ \tilde{Z}'_*(\beta) \in \tilde{i}'_*(\text{CH}^1(\tilde{T})_{\text{alg}}[mm']),$$

qui est un ensemble fini. □

On peut en déduire le théorème 1 (2) pour une hypersurface cubique *générale*:

Proposition 19 *Si X est générale, alors l'application d'Abel–Jacobi $\Phi : \text{CH}^3_{\text{alg}} \rightarrow J^5(X)$ est un isomorphisme de groupes.*

Démonstration Par la proposition 10 (1), il existe une famille de plans contenu dans X paramétrée par une courbe projective lisse C , telle que l'application d'Abel–Jacobi $H^1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(X, \mathbb{Z})$ est surjective. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \text{CH}^1(C)_{\text{alg}} & \xrightarrow{\cong} & J(C) \\
 \downarrow & & \downarrow \text{fib. conn.} \\
 \text{CH}^3(X)_{\text{alg}} & \xrightarrow{\Phi} & J^5(X)
 \end{array}
 \quad (8)$$

dont la flèche verticale de droite est surjective à fibres connexes par la surjectivité de $H^1(C, \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(X, \mathbb{Z})$. On note A le noyau de cette flèche, qui est une sous-variété abélienne de $J(C)$.

Par la proposition 18, Φ est surjective avec un noyau fini. Comme tout morphisme d'un groupe divisible vers un groupe fini est trivial, l'image de A dans $\ker(\Phi)$ est triviale. Il en résulte que l'image du groupe $\text{CH}^1(C)_{\text{alg}}$ dans $\text{CH}^3(X)_{\text{alg}}$ est isomorphe à $J^5(X)$. Donc on a un scindage de Φ et $\text{CH}^3(X)_{\text{alg}} \cong J^5(X) \oplus \ker(\Phi)$. Or le groupe $\text{CH}^3(X)_{\text{alg}}$ est divisible (Lemme 17), et donc $\ker(\Phi) = 0$. □

Pour démontrer le théorème 1 (2) pour une hypersurface cubique lisse *arbitraire*, on a besoin du lemme suivant pour faire un argument de déformation. Voir [13, §20.3] pour l'application de spécialisation.

Lemme 20 (cf. [18, Corollaire 1.5]) *Soit $X \rightarrow T$ une famille d’hypersurfaces cubiques lisses de dimension 5 sur une courbe et $X_{\bar{\eta}}$ la fibre générique géométrique. Alors pour tout point fermé $t \in T$, l’application de spécialisation $\text{CH}^3(X_{\bar{\eta}}) \rightarrow \text{CH}^3(X_t)$ est surjective.*

Démonstration La démonstration est quasiment la même que celle de [18, Corollaire 1.5], sauf qu’on montre la surjectivité pour le groupe des cycles modulo l’équivalence rationnelle au lieu de l’équivalence algébrique, en utilisant un résultat plus fort sur la déformation des courbes d’une variété rationnellement connexe.

Soit $F(X) \rightarrow T$ la famille des schémas de Fano des droites de la famille $X \rightarrow T$. Alors l’application $\text{CH}_1(F(X_t)) \rightarrow \text{CH}_2(X_t)$ induite par la famille universelle des droites est surjective pour chaque point fermé t de T ([18, Proposition 1.4]). Donc il suffit de montrer que l’application de spécialisation $\text{CH}_1(F(X_{\bar{\eta}})) \rightarrow \text{CH}_1(F(X_t))$ est surjective pour tout $t \in T$. Notons $\mathcal{Y}_t := F(X_t)$ et $\mathcal{Y}_{\bar{\eta}} := F(X_{\bar{\eta}})$ respectivement. Ce sont des variétés de Fano et donc rationnellement connexes par [16] et [7].

Soit $f_0 : C_0 \rightarrow \mathcal{Y}_t$ un morphisme, où C_0 est une courbe. Gr ce à la connexité rationnelle de \mathcal{Y}_t , on peut construire un *peigne* $f : C \rightarrow \mathcal{Y}_t$ (voir par exemple [3, Paragraph 25 et Theorem 27]) tel que

- (1) La courbe $C = C_0 \cup \bigcup_{i=1}^k C_i$ est une courbe nodale, et chaque point nodal est le seul point d’intersection de C_0 avec une des courbes C_1, \dots, C_k .
- (2) Les courbes C_1, \dots, C_k sont des courbes rationnelles, et le faisceau localement libre $f_i^* T_{\mathcal{Y}_t}$ est ample pour tout $1 \leq i \leq k$.
- (3) La déformation du peigne $f : C \rightarrow \mathcal{Y}_t$ est non obstruée.

Par conséquent, il existe des courbes

$$\mathcal{F} : C \rightarrow \mathcal{Y}_{\bar{\eta}}, \quad \mathcal{F}_i : C_i \rightarrow \mathcal{Y}_{\bar{\eta}}, \quad i = 1, \dots, k,$$

dont les spécialisations sont des courbes

$$f : C \rightarrow \mathcal{Y}_t, \quad f_i : C_i \rightarrow \mathcal{Y}_t, \quad i = 1, \dots, k.$$

Alors la classe $f_{0,*}(C_0)$ dans $\text{CH}_1(\mathcal{Y}_t)$, qui est $C - \sum_{i=1}^k C_i$, est dans l’image de l’application de spécialisation $\text{CH}_1(\mathcal{Y}_{\bar{\eta}}) \rightarrow \text{CH}_1(\mathcal{Y}_t)$. □

Démonstration du théorème 1(2) La surjectivité de l’application d’Abel–Jacobi Φ est prouvée dans la proposition 18. Il reste à montrer son injectivité. Soit $X \rightarrow T$ une famille d’hypersurfaces cubiques lisses de dimension 5 telle que la fibre sur un point $0 \in T$ est isomorphe à X et pour tout $t \in T \setminus \{0\}$, l’application d’Abel–Jacobi $\Phi_t : \text{CH}^3(X_t)_{\text{alg}} \rightarrow J^5(X_t)$ est un isomorphisme. L’existence d’une telle famille est garantie par la proposition 19.

Pour un cycle $\alpha \in \ker(\Phi : \text{CH}^3(X)_{\text{alg}} \rightarrow J^5(X))$ quelconque, par le lemme 20, quitte à faire un changement de base de la famille X/T , on peut supposer qu’il existe un cycle $Z \in \text{CH}^3(X)$ tel que Z_0 est rationnellement équivalent à α dans $X_0 = X$. On considère la fonction normale (cf. [31, Définition 19.5 et Théorème 19.9]) induite par Z , notée σ , qui est une section de la fibration en jacobienes intermédiaires $\pi : \mathcal{J}^5(X/T) =: \mathcal{J} \rightarrow T$. Le fait que $\alpha \in \ker(\Phi)$ dit que $\sigma(0) = 0$ dans \mathcal{J}_0 .

Comme la surjectivité de l’application d’Abel–Jacobi vaut pour toute hypersurface cubique lisse, le morphisme suivant de T -schémas est surjectif :

$$\coprod_{d \in \mathbb{N}} \text{Chow}^{2,d}(X/T) \times_T \text{Chow}^{2,d}(X/T) \rightarrow \mathcal{J}$$

$$(z_1, z_2) \mapsto \Phi(z_1 - z_2),$$

où $\text{Chow}^{2,d}(X/T)$ est la variété de Chow du T -schéma X des cycles (effectifs) de dimension 2 et de degré d par rapport à certaine polarisation. Par la dénombrabilité du nombre des composantes de la variété de Chow et la non-dénombrabilité du corps de base \mathbb{C} , il existe un d , tel que la restriction à la composante

$$\mathcal{W} := \text{Chow}^{2,d}(X/T) \times_T \text{Chow}^{2,d}(X/T) \rightarrow \mathcal{J}$$

est déjà un T -morphisme surjectif. Quitte à faire encore un changement de base qu'on notera toujours par \mathcal{W}/T , on peut supposer que le morphisme structural $p : \mathcal{W} \rightarrow T$ a une section $r : T \rightarrow \mathcal{W}$. On dispose donc d'une famille de 2-cycles Z' dans les fibres de X/T , paramétrée par \mathcal{W}/T , telle que l'application d'Abel–Jacobi

$$\begin{aligned} AJ_t : \mathcal{W}_t &\rightarrow \mathcal{J}_t \\ w &\mapsto \Phi(Z'_w - Z'_{r(p(w))}) \end{aligned}$$

est surjective pour tout $t \in T$. De plus, on peut supposer que \mathcal{W}_t est irréductible pour tout $t \in T$ général et que le morphisme $\mathcal{W} \rightarrow T$ est propre et plat.

On peut donc trouver une courbe S dans \mathcal{W} , passant par $r(0) \in \mathcal{W}_0$, plate sur T , telle que $AJ_{p(s)}(s) = \sigma(s)$ dans $\mathcal{J}_{p(s)}$ pour tout $s \in S$. Par le changement de base $p : S \rightarrow T$, on obtient une nouvelle famille d'hypersurfaces cubiques lisses X_S/S et une famille de 2-cycles homologiquement triviaux

$$\Gamma := Z \times_T S - (Z' \times_W S - Z'|_{r(T)} \times_T S) \in \text{CH}^3(X_S),$$

tels que la nouvelle fonction normale est la section nulle de la nouvelle fibration en jacobiniennes intermédiaires $\mathcal{J}^3(X_S/S) \rightarrow S$. Grâce à la proposition 19, pour tout $s \notin p^{-1}(0)$, Γ_s est rationnellement équivalent à zéro. Par la spécialisation [13, §20.3], $\Gamma_s = 0$ dans $\text{CH}^3(X_{p(s)})$ pour tout $s \in S$. En particulier,

$$\alpha = \Gamma_{r(0)} = 0$$

dans $\text{CH}^3(X)$. D'où l'injectivité de Φ . La partie (2) du théorème 1 est établie. □

6 Preuve du théorème 3

Lemme 21 *Pour tout $i \geq 2$, le groupe $H^1(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}))$ est nul.*

Démonstration Par le lemme 6, on a une suite exacte courte

$$0 \rightarrow H_{\text{nr}}^i(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow H_{\text{nr}}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}))_{\text{tor}} \rightarrow 0.$$

Donc $H^1(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}))$ est sans torsion par l'annulation de $H_{\text{nr}}^i(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (§2.2, lemmes 8 et 9). Il reste à voir qu'il est de torsion. On fait agir les deux côtés de la décomposition de la diagonale (4), modulo l'équivalence algébrique (cf. [12, Appendice A]), sur $H^1(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}))$ et on trouve que

- l'action $\Delta_{X,*}$ est l'identité;
- l'action $(x \times X)_*$ se factorise par $H^1(\{x\}, \mathcal{H}_{\{x\}}^i(\mathbb{Z}))$, or le faisceau $\mathcal{H}_{\{x\}}^i(\mathbb{Z}) = 0$ par [2], pour tout $i \geq 1$;
- l'action $(l \times h)_*$ se factorise par $H^1(l, \mathcal{H}_l^i(\mathbb{Z}))$, or le faisceau $\mathcal{H}_l^i(\mathbb{Z}) = 0$ par [2], pour tout $i \geq 2$;
- l'action $(Z')_*$ se factorise par $H^{-1}(\tilde{T}, \mathcal{H}_{\tilde{T}}^{i-2}(\mathbb{Z})) = 0$, où \tilde{T} est une résolution des singularités de T , comme dans le début de la démonstration de la proposition 16.

Par conséquent, $H^1(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z}))$ est annulé par la multiplication par m . □

Lemme 22 *Pour tout $0 \leq i \leq 5$, l'application classe*

$$H^i(X, \mathcal{H}^i(\mathbb{Z})) \cong \text{CH}^i(X)/\text{alg} \rightarrow H^{2i}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$$

est un isomorphisme.

Démonstration La surjectivité est équivalente à la conjecture de Hodge entière, qui vaut pour X par l'existence des droites et des plans dans X . L'injectivité est équivalente à l'annulation du groupe de Griffiths $\text{Griff}^i(X)$, qui est prouvée dans §4 pour $i = 3$ et facile pour les autres i (cf. §1). □

Démonstration du théorème 3 On regarde la suite spectrale de Leray

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^q(\mathbb{Z})) \implies H^{p+q}(X, \mathbb{Z}).$$

En tenant compte les annulations

- $H^p(X, \mathcal{H}^q(\mathbb{Z})) = 0$ pour tout $q > \dim X = 5$, par [2];
- $H^p(X, \mathcal{H}^q(\mathbb{Z})) = 0$ pour tout $p > q$, par [5, 0.3];
- $H^0(X, \mathcal{H}^q(\mathbb{Z})) = 0$ pour tout $q > 0$, par [12, Proposition 3.3(i)];
- $H^1(X, \mathcal{H}^q(\mathbb{Z})) = 0$ pour tout $q > 1$, par le lemme 21,

on voit que dans cette suite spectrale, il n'y qu'une seule flèche $d_2: H^2(X, \mathcal{H}^5(\mathbb{Z})) \rightarrow H^4(X, \mathcal{H}^4(\mathbb{Z}))$ qui pourrait être non nulle. Montrons que $H^2(X, \mathcal{H}^5(\mathbb{Z}))$ est un groupe de torsion par un argument similaire à celui du lemme 21: on fait agir les deux côtés de (4) sur le groupe $H^2(X, \mathcal{H}^5(\mathbb{Z}))$:

- l'action Δ_X^* est l'identité;
- l'action $(x \times X)^*$ se factorise par $H^{-3}(\{x\}, \mathcal{H}_{\{x\}}^0(\mathbb{Z})) = 0$;
- l'action $(l \times h)^*$ se factorise par $H^{-2}(l, \mathcal{H}_l^1(\mathbb{Z})) = 0$;
- l'action $(Z')^*$ se factorise par $H^2(\tilde{T}, \mathcal{H}_{\tilde{T}}^5(\mathbb{Z}))$, où \tilde{T} est une résolution des singularités de T , comme dans le début de la démonstration de la proposition 16. Or le faisceau $\mathcal{H}_{\tilde{T}}^5(\mathbb{Z}) = 0$ par [2], car $\dim \tilde{T} = 3 < 5$.

Par conséquent, $H^2(X, \mathcal{H}^5(\mathbb{Z}))$ est bien de torsion et donc n'admet pas de morphisme non nul vers le groupe abélien libre $H^4(X, \mathcal{H}^4(\mathbb{Z}))$. Par conséquent, la suite spectrale est dégénérée en E_2 . La partie (3) du théorème 3 est démontrée (cf. Proposition 7).

La dégénérescence de la suite spectrale étant prouvée, le lemme 22, avec les annulations ci-dessus, implique la partie (1) du théorème 3.

Finalement, la partie (2) du théorème 3 découle de la partie (1), en particulier du fait que tous les termes de la suite spectrale pour le faisceau \mathbb{Z} sont sans torsion, et du lemme 6. □

References

1. André, Y.: Une Introduction Aux Motifs (Motifs Purs, Motifs Mixtes, périodes). Panoramas et Synthèses (Panoramas and Syntheses), vol. 17. Société Mathématique de France, Paris (2004)
2. Andreotti, A., Frankel, T.: The Lefschetz theorem on hyperplane sections. Ann. Math. **2**(69), 713–717 (1959)
3. Araujo, C., Kollár, J.: Rational curves on varieties. In: Higher Dimensional Varieties and Rational Points (Budapest, 2001), vol. 12 of Bolyai Soc. Math. Stud., pp. 13–68. Springer, Berlin (2003)
4. Bloch, S.: Lectures on Algebraic Cycles, New Mathematical Monographs, vol. 16, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge (2010)

5. Bloch, S., Ogus, A.: Gersten's conjecture and the homology of schemes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **7**, 181–201 (1975)
6. Bloch, S., Srinivas, V.: Remarks on correspondences and algebraic cycles. *Am. J. Math.* **105**(5), 1235–1253 (1983)
7. Campana, F.: Connexité rationnelle des variétés de Fano. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **25**(5), 539–545 (1992)
8. Collino, A.: The Abel–Jacobi isomorphism for the cubic fivefold. *Pac. J. Math.* **122**(1), 43–55 (1986)
9. Colliot-Thélène, J.-L.: Birational invariants, purity and the Gersten conjecture. In: *K-Theory and Algebraic Geometry: Connections with Quadratic Forms and Division Algebras* (Santa Barbara, CA, 1992), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 58, pp. 1–64. American Mathematical Society, Providence, RI (1995)
10. Colliot-Thélène, J.-L.: Descente galoisienne sur le second groupe de Chow: mise au point et applications. *Doc. Math.* 195–220 (2015) (Extra vol.: Alexander S. Merkurjev's sixtieth birthday)
11. Colliot-Thélène, J.-L., Ojanguren, M.: Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford. *Invent. Math.* **97**(1), 141–158 (1989)
12. Colliot-Thélène, J.-L., Voisin, C.: Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière. *Duke Math. J.* **161**(5), 735–801 (2012)
13. Fulton, W.: *Intersection theory*, vol. 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics (Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics)*, 2nd edn.. Springer, Berlin (1998)
14. Kahn, B., Rost, M., Sujatha, R.: Unramified cohomology of quadrics. I. *Am. J. Math.* **120**(4), 841–891 (1998)
15. Kahn, B., Sujatha, R.: Unramified cohomology of quadrics. II. *Duke Math. J.* **106**(3), 449–484 (2001)
16. Kollár, J., Miyaoka, Y., Mori, S.: Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds. *J. Differ. Geom.* **36**(3), 765–779 (1992)
17. Laterveer, R.: Algebraic varieties with small Chow groups. *J. Math. Kyoto Univ.* **38**(4), 673–694 (1998)
18. Mboro, R.: Remarks on the CH_2 of cubic hypersurfaces. *Geom. Dedic.* (2018). <https://doi.org/10.1007/s10711-018-0355-0>
19. Merkurjev, A.S., Suslin, A.A.: K -cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46**(5), 1011–1046 (1982). (1135–1136)
20. Merkurjev, A.S., Suslin, A.A.: Norm residue homomorphism of degree three. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **54**(2), 339–356 (1990)
21. Murre, J.P.: Un résultat en théorie des cycles algébriques de codimension deux. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **296**(23), 981–984 (1983)
22. Murre, J.P.: Applications of algebraic K -theory to the theory of algebraic cycles. *Algebraic geometry, Sitges (Barcelona)*, 1983. *Lecture Notes in Math*, vol. 1124, pp. 216–261. Springer, Berlin (1985)
23. Murre, J.P.: On a conjectural filtration on the Chow groups of an algebraic variety. I. The general conjectures and some examples. *Indag. Math. (N.S.)* **4**(2), 177–188 (1993)
24. Paranjape, K.H.: Cohomological and cycle-theoretic connectivity. *Ann. of Math. (2)* **139**(3), 641–660 (1994)
25. Paranjape, K.H.: Some spectral sequences for filtered complexes and applications. *J. Algebra* **186**(3), 793–806 (1996)
26. Rost, M.: On Hilbert Satz 90 for K_3 for degree-two extensions. <http://www.math.uni-bielefeld.de/~rost/K3-86.html>. Accessed 28 Nov 2018
27. Serre, J.-P.: *Cohomologie Galoisienne*. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 5, 5th edn. Springer, Berlin (1994)
28. Suslin, A., Joukhovitski, S.: Norm varieties. *J. Pure Appl. Algebra* **206**(1–2), 245–276 (2006)
29. Voevodsky, V.: Motivic cohomology with $Z/2$ -coefficients. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **98**, 59–104 (2003)
30. Voevodsky, V.: On motivic cohomology with Z/l -coefficients. *Ann. of Math. (2)* **174**(1), 401–438 (2011)
31. Voisin, C.: *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe. Cours Spécialisés (Specialized Courses)*, vol. 10. Société Mathématique de France, Paris (2002)
32. Voisin, C.: Degree 4 unramified cohomology with finite coefficients and torsion codimension 3 cycles. *Geometry and arithmetic, EMS Ser. Congr. Rep.*, pp. 347–368. Soc., Zürich, Eur. Math (2012)
33. Voisin, C.: *Chow Rings, Decomposition of the Diagonal, and the Topology of Families*, vol. 187. Princeton University Press, Princeton (2014). (*Annals of Mathematics Studies*)
34. Voisin, C.: *Integral Hodge Classes, Decompositions of the Diagonal, and Rationality Questions*. *Trends in Contemporary Mathematics*, volume 8 of Springer INdAM Ser, pp. 137–149. Springer, Cham (2014)