

Homework for “Algorithms for Big-Data Analysis”

Beijing International Center for Mathematical Research
Peking University

March 20, 2024

Note: Please write up your solutions independently. If you get significant help from others, write down the source of references. A formal mathematical proof for all your claims is required.

1. 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 向量 $b \in \mathbb{R}^m$. 考虑优化问题:

$$(1) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_1, \text{ s.t. } Ax = b,$$

其中 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

- (a) 写出问题(1)的对偶问题。
- (b) 写出问题(1)的最优性(KKT)条件。
- (c) 假设 z 是问题(1)的最优解。如何进一步加强(b)里给出的最优性条件, 使得 z 是唯一最优解并给出证明。
- (d) 假设 z 是方程组 $Ax = b$ 非零元最少的解。证明 z 也是(1)的最优解的充要条件是: 对所有满足 $Ah = 0$ 的向量 h 有

$$\sum_{i \in T} \text{sign}(z_i) h_i \leq \sum_{i \in T^c} |h_i|,$$

其中 $T = \{i \mid z_i \neq 0\}$, T^c 是 T 的补集, 以及

$$\text{sign}(z_i) = \begin{cases} 1, & \text{if } z_i > 0, \\ 0, & \text{if } z_i = 0, \\ -1, & \text{if } z_i < 0. \end{cases}$$