2024年秋季《最优化方法》期末考试试题

要求：请写出详细的推导过程或证明过程。

1. (30分，当且仅当分别15分) 证明：d^*是信赖域子问题

$$\min_{d} \quad m(d) = f + g^{\mathrm{T}}d + \frac{1}{2}d^{\mathrm{T}}Bd, \quad \text{s.t.} \quad \|d\|_2 \le \varDelta \tag{1}$$

的全局极小解当且仅当d^*是可行的且存在$\lambda \ge 0$使得

$$(B + \lambda I)d^* = -g, \tag{2a}$$
$$\lambda(\varDelta - \|d^*\|) = 0, \tag{2b}$$
$$B + \lambda I \succeq 0. \tag{2c}$$

2. (30分) 令$h(x)$为适当闭凸函数，定义邻近算子：

$$\mathrm{prox}_h(x) = \arg\min_u \left(h(u) + \frac{1}{2}\|u - x\|_2^2 \right).$$

(a) (15分) 证明Moreau分解

$$x = \mathrm{prox}_h(x) + \mathrm{prox}_{h^*}(x).$$

(b) (15分) 令$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为梯度L_f-利普希茨连续函数。固定任意$t > L_f$，对于任何$x \in \mathrm{dom}\, h$和定义

$$x^+ = \mathrm{prox}_{h/t}\left(x - \frac{1}{t}\nabla f(x) \right),$$

我们有

$$f(x^+) + h(x^+) \le f(x) + h(x) - \frac{t - L_f}{2}\|x^+ - x\|_2^2.$$

3. (40分) 给定对称矩阵$C, A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$，向量$b \in \mathbb{R}^m$。考虑半定规划：

$$\begin{aligned} \min_X \quad & \langle C, X\rangle \\ \text{s.t.} \quad & \langle A_1, X\rangle = b_1, \\ & \cdots \\ & \langle A_m, X\rangle = b_m, \\ & X \succeq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

其中$\langle C, X\rangle = \sum_{i,j} C_{ij}X_{ij}$，$X \succeq 0$指$X$为半正定矩阵。

(a) (5分) 写出问题(3)的对偶问题。

(b) (5分) 写出问题(3)的最优性(KKT)条件（需写出充要条件，注意分别写清楚假设条件）。

(c) (30分) 考虑求解问题(3)的对偶问题:

i. (15分) 写出交替方向乘子法(ADMM)，要求写出每一个子问题的最优解和乘子更新格式。

ii. (15分) 写出增广拉格朗日函数算法，要求: 1) 将半定变量消掉，写出具体的增广拉格朗日函数形式和乘子更新格式。2) 计算该增广拉格朗日函数的梯度，并验证是否二次可微?