原始– 对偶混合梯度算法

Zaiwen Wen

Beijing International Center For Mathematical Research

http://bicmr.pku.edu.cn/~wenzw/opt-2020-fall.html

Outline

鞍点问题

令f,h是适当的闭凸函数。考虑原始问题：

$$\min \quad f(x)+h(Ax),$$

- 由于h有自共轭性，我们将问题变形为

$$(\mathrm{L_{PD}}) \quad \min_x \ \max_z \quad \psi_{PD}(x,z) \xlongequal{\text{def}} f(x)-h^*(z)+z^{\mathrm{T}}Ax. \qquad (1)$$

  可以看到此时问题变成了一个极小– 极大问题，即关于变量x求极小，关于变量z求极大，这是一个典型的鞍点问题.

- 另一种常用的鞍点问题定义方式构造拉格朗日函数. 问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m} \quad f(x)+h(y), \quad \text{s.t.} \quad y=Ax.$$

  相应的鞍点问题形式如下：

$$(\mathrm{L_P}) \quad \min_{x,y} \ \max_z \quad f(x)+h(y)+z^{\mathrm{T}}(Ax-y). \qquad (2)$$

PDHG 算法

- PDHG 算法的思想就是分别对两类变量应用近似点梯度算法.
- 以求解问题(1) 为例，PDHG 算法交替更新原始变量以及对偶变量，其迭代格式如下：

$$
\begin{aligned}
z^{k+1} &= \underset{z}{\operatorname{argmax}}\left\{-h^*(z) + \langle Ax^k, z - z^k\rangle - \frac{1}{2\delta_k}\|z - z^k\|_2^2\right\} \\
&= \operatorname{prox}_{\delta_k h^*}(z^k + \delta_k A x^k), \\
x^{k+1} &= \underset{x}{\operatorname{argmin}}\left\{f(x) + (z^{k+1})^{\mathrm{T}} A(x - x^k) + \frac{1}{2\alpha_k}\|x - x^k\|_2^2\right\} \\
&= \operatorname{prox}_{\alpha_k f}(x^k - \alpha_k A^{\mathrm{T}} z^{k+1}),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

其中α_k, δ_k分别为原始变量和对偶变量的更新步长.

- 它在第一步固定原始变量x^k针对对偶变量做梯度上升，在第二步固定更新后的对偶变量z^{k+1}针对原始变量做梯度下降. 在这里注意，原始变量和对偶变量的更新顺序是无关紧要的，若先更新原始变量，其等价于在另一初值下先更新对偶变量.

Chambolle-Pock算法

- PDHG 算法的收敛性需要比较强的条件，有些情形下未必收敛.
- Chambolle-Pock算法与PDHG 算法的区别在于多了一个外推步
- 具体的迭代格式如下：

$$
\begin{aligned}
z^{k+1} &= \mathrm{prox}_{\delta_k h^*}(z^k + \delta_k A y^k), \\
x^{k+1} &= \mathrm{prox}_{\alpha_k f}(x^k - \alpha_k A^{\mathrm{T}} z^{k+1}), \\
y^{k+1} &= 2x^{k+1} - x^k.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

考虑

$$\min_x f_1(x) + f_2(Bx) + f_3(x),$$

其中f_1,f_2,f_3是三个下半连续的凸函数，且f_1具有Lipschitz连续常数$\frac{1}{\beta}$，$\beta \in [0,\infty)$，$B \in R^{m\times n}$。

Saddle point 问题形式：

$$\min_x \max_z \quad f_1(x) + \langle z, Bx\rangle - f_2^*(z) + f_3(x)$$

PDFP算法更新如下：

$$\begin{cases} y_{k+1} = \textbf{prox}_{\gamma f_3}(x_k - \gamma \nabla f_1(x_k) - \lambda B^T z_k), \\ z_{k+1} = (I - \textbf{prox}_{\frac{\gamma}{\lambda} f_2})(By_{k+1} + z_k), \\ x_{k+1} = \textbf{prox}_{\gamma f_3}(x_k - \gamma \nabla f_1(x_k) - \lambda B^T z_{k+1}). \end{cases}$$

其中$0 < \lambda < \frac{1}{\lambda_{max}(BB^T)}$，$0 < \gamma < 2\beta$。

Outline

1 原始– 对偶混合梯度算法

2 应用举例

3 收敛性分析

LASSO问题求解

考虑LASSO问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \psi(x) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \mu\|x\|_1 + \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2.$$

取$f(x)=\mu\|x\|_1$ 和$h(x)=\frac{1}{2}\|x-b\|_2^2$，相应的鞍点问题：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \max_{z\in\mathbb{R}^m} \quad f(x)-h^*(z)+z^{\mathrm{T}}Ax.$$

根据共轭函数的定义，

$$h^*(z)=\sup_{y\in\mathbb{R}^m} \quad \left\{y^{\mathrm{T}}z-\frac{1}{2}\|y-b\|_2^2\right\}=\frac{1}{2}\|z\|_2^2+b^{\mathrm{T}}z.$$

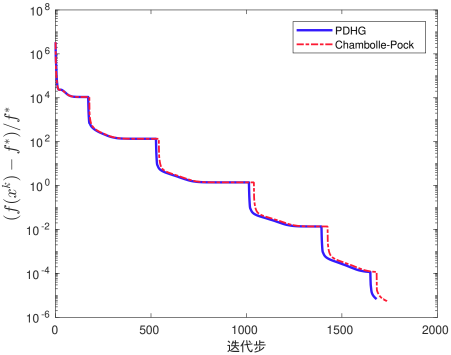
应用PDHG算法，x^{k+1} 和z^{k+1} 的更新格式分别为

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= \mathrm{prox}_{\delta_k h^*}(z^k+\delta_k Ax^k)=\frac{1}{\delta_k+1}\left(z^k+\delta_k Ax^k-\delta_k b\right), \\ x^{k+1} &= \mathrm{prox}_{\alpha_k\mu\|\cdot\|_1}(x^k-\alpha_k A^{\mathrm{T}}z^{k+1}). \end{aligned}$$

这里δ_k,α_k 为步长.

Chambolle-Pock算法格式为

$$
\begin{aligned}
z^{k+1} &= \frac{1}{\delta_k + 1}\left(z^k + \delta_k A y^k - \delta_k b\right), \\
x^{k+1} &= \operatorname{prox}_{\alpha_k \mu \|\cdot\|_1}(x^k - \alpha_k A^{\mathrm{T}} z^{k+1}), \\
y^{k+1} &= 2x^{k+1} - x^k.
\end{aligned}
$$



TV-L^1模型

考虑去噪情形下的TV-L^1模型（即A为矩阵空间的恒等算子）：

$$\min_{U\in\mathbb{R}^{n\times n}} \quad \|U\|_{TV} + \lambda\|U-B\|_1,$$

其中$\|U\|_{TV}$为全变差，即可以用离散的梯度（线性）算子$D:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n\times 2}$表示为

$$\|U\|_{TV} = \sum_{1\le i,j\le n} \|(DU)_{ij}\|_2.$$

对任意的$W,V\in\mathbb{R}^{n\times n\times 2}$，记

$$\|W\| = \sum_{1\le i,j\le n}\|w_{ij}\|_2, \quad \langle W,V\rangle = \sum_{1\le i,j\le n,1\le k\le 2} w_{i,j,k}v_{i,j,k},$$

其中$w_{ij}\in\mathbb{R}^2$且$\|\cdot\|$定义了$\mathbb{R}^{n\times n\times 2}$上的一种范数．利用$\|\cdot\|$的定义，有

$$\|U\|_{TV} = \|DU\|.$$

TV-L^1模型

我们取D 为相应的线性算子，并取

$$f(U) = \lambda\|U - B\|_1, U \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad h(W) = \|W\|, \quad W \in \mathbb{R}^{n\times n\times 2}.$$

相应的鞍点问题(1) 如下：

$$(\mathrm{L}_{\mathrm{PD}}) \quad \min_{U\in\mathbb{R}^{n\times n}} \max_{V\in\mathbb{R}^{n\times n\times 2}} f(U) - h^*(V) + \langle V, DU\rangle .$$

根据共轭函数的定义，

$$h^*(V) = \sup_{U\in\mathbb{R}^{n\times n\times 2}} \{\langle U, V\rangle - \|U\|\} = \begin{cases} 0, & \max\limits_{i,j} \|v_{ij}\|_2 \le 1, \\ +\infty, & \text{其他}. \end{cases}$$

记$\mathcal{V} = \{V \in \mathbb{R}^{n\times n\times 2} : \max\limits_{ij} \|v_{ij}\|_2 \le 1\}$，其示性函数记为$I_{\mathcal{V}}(V)$，则问题$(\mathrm{L}_{\mathrm{PD}})$可以整理为

$$\min_U \max_V \quad f(U) + \langle V, DU\rangle - I_{\mathcal{V}}(V).$$

应用PDHG算法，则V^{k+1}的更新为

$$V^{k+1} = \mathrm{prox}_{sI_{\mathcal{V}}}(V^k + sDU^k) = \mathcal{P}_{\mathcal{V}}(V^k + sDU^k), \tag{5}$$

即$V^k + sDU^k$ 在$\mathcal{V}$上的投影，而U^{k+1}的更新如下：

$$\begin{aligned} U^{k+1} &= \mathrm{prox}_{tf}(U^k + tGV^{k+1}) \\ &= \operatorname*{argmin}_U \left\{ \lambda\|U - B\|_1 + \langle V^{k+1}, DU\rangle + \frac{1}{2t}\|U - U^k\|_F^2 \right\} \end{aligned}$$

其中$G : \mathbb{R}^{n\times n\times 2} \to \mathbb{R}^{n\times n}$为离散的散度算子，其满足

$$\langle V, DU\rangle = -\langle GV, U\rangle, \quad \forall\, U \in \mathbb{R}^{n\times n},\ V \in \mathbb{R}^{n\times n\times 2}.$$

若应用Chambolle-Pock算法，那么U^{k+1}的更新保持不变，仅需调整V^{k+1}的更新为$V^k + sD(2U^{k+1} - U^k)$在$\mathcal{V}$上的投影．

图像填充模型

考虑问题

$$\min_{U\in\mathbb{R}^{n\times n}} \quad \|U\|_{TV} + \frac{\lambda}{2}\|U-B\|_F^2.$$

类似于上一个例子中的分析，我们取D 为相应的线性算子，并取

$$f(U) = \frac{\lambda}{2}\|U-B\|_F^2,\ U\in\mathbb{R}^{n\times n},\ h(W) = \|W\|,\ W\in\mathbb{R}^{n\times n\times 2}.$$

一般的鞍点问题叙述如下：

$$(\mathrm{L_{PD}}) \quad \min_U \ \max_V \quad f(U) + \langle V, DU\rangle - I_{\mathcal{V}}(V),$$

其中$\mathcal{V}$ 与TV-L^1模型中的定义一致．应用PDHG算法，则V^{k+1}的更新为(5) 式．引入离散的散度算子G，U^{k+1}的更新如下：

$$\begin{aligned} U^{k+1} &= \mathrm{prox}_{tf}(U^k + tGV^{k+1}) \\ &= \operatorname*{argmin}_U \left\{ \frac{\lambda}{2}\|U-B\|_F^2 + \left\langle V^{k+1}, DU\right\rangle + \frac{1}{2t}\|U-U^k\|_F^2 \right\}. \end{aligned}$$

同样地，Chambolle-Pock算法的更新表达式也可类似地推出．

图像反卷积模型

考虑问题

$$\min_{U\in\mathbb{R}^{n\times n}} \quad \|U\|_{TV} + \frac{\lambda}{2}\|\mathcal{A}U - B\|_F^2,$$

其中$\mathcal{A}U = K_{\mathcal{A}} * U$为卷积算子，且$K_{\mathcal{A}}$是$\mathcal{A}$的卷积核对应的矩阵.
类似于TV-L^1模型中的分析，取D为相应的线性算子，并取

$$f(U) = \frac{\lambda}{2}\|\mathcal{A}U - B\|_F^2,\ U \in \mathbb{R}^{n\times n},\ h(W) = \|W\|,\ W \in \mathbb{R}^{n\times n\times 2}.$$

类似地，一般的鞍点问题叙述如下：

$$(\mathrm{L_{PD}}) \quad \min_U \ \max_V \quad f(U) + \langle V, DU\rangle - I_{\mathcal{V}}(V),$$

其中$\mathcal{V}$ 与TV-L^1模型中的定义一致.

图像反卷积模型

应用PDHG算法，则V^{k+1}的更新仍为(5) 式，而U^{k+1}的更新为：

$$\begin{aligned} U^{k+1} &= \mathrm{prox}_{tf}(U^k + tGV^{k+1}) \\ &= \operatorname*{argmin}_{U} \left\{ \frac{\lambda}{2} \|\mathcal{A}U - B\|_F^2 + \frac{1}{2t} \|U - (U^k + tGV^{k+1})\|_F^2 \right\}, \end{aligned}$$

其中G 为离散的散度算子. 可知U^{k+1}满足如下方程：

$$\lambda \mathcal{A}^*(\mathcal{A}U^{k+1} - B) + \frac{1}{t}(U^{k+1} - (U^k + tGV^{k+1})) = 0,$$

其中$\mathcal{A}^*$是$\mathcal{A}$的共轭算子，且其卷积核对应的矩阵为$K_{\mathcal{A}^*}$. 由于$\mathcal{A}U = K_{\mathcal{A}} * U$ 具有卷积的形式，我们可以利用快速傅里叶变换$\mathcal{F}$ 和其逆变换$\mathcal{F}^{-1}$ 来快速求解上面的线性方程组.

图像反卷积模型

根据

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}U)=\mathcal{F}(K_{\mathcal{A}}*U)=\mathcal{F}(K_{\mathcal{A}})\odot\mathcal{F}(U),$$

其中$\odot$表示逐分量相乘, 我们有

$$\mathcal{F}(K_{\mathcal{A}^*})\odot\Big(\mathcal{F}(K_{\mathcal{A}})\odot\mathcal{F}(U^{k+1})-\mathcal{F}(B)\Big)+\frac{1}{t\lambda}\mathcal{F}(U^{k+1}-(U^k+tGV^{k+1}))=0.$$

利用关系式$\mathcal{F}(K_{\mathcal{A}^*})=\overline{\mathcal{F}(K_{\mathcal{A}})}$，可得$U^{k+1}$的显式表达式

$$U^{k+1}=\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(U^k+tGV^{k+1})+t\lambda\mathcal{F}(B)\odot\overline{\mathcal{F}(K_{\mathcal{A}})}}{1+t\lambda|\mathcal{F}(K_{\mathcal{A}})|^2}\right),$$

以上表达式中除$\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1},G$外，其余均为逐分量的运算

三项函数拆分例子

- Fused Lasso:

$$\min_x \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2 + \mu_1\|Bx\|_1 + \mu_2\|x\|_1$$

即$f_1(x) = \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2$，$f_2 = \mu_1\|\cdot\|_1$，$f_3 = \mu_2\|\cdot\|_1$。

- 图像恢复：

$$\min_{x\in C} \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2 + \mu\|Dx\|_1$$

即$f_1(x) = \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2$，$f_2 = \mu\|\cdot\|_1$，$f_3 = 1_C(\cdot)$. 在医学核共振图像重建问题中，$A = (A_1^T, ..., A_N^T)$，其中$A_j$由一个对角下采样算子$D$，傅里叶变换$F$，对角的圈灵敏度映射$S_j$构成，即$A_j = DFS_j$，通常$S_j$是事先估计好的。

Outline

1 原始– 对偶混合梯度算法

2 应用举例

3 收敛性分析

- 设X, Z分别为变量x, z的取值空间，若点$(\hat{x}, \hat{z})$满足

$$\psi_{\mathrm{PD}}(x, \hat{z}) \geq \psi_{\mathrm{PD}}(\hat{x}, \hat{z}) \geq \psi_{\mathrm{PD}}(\hat{x}, z), \quad \forall\, x \in X, z \in Z,$$

称$(\hat{x}, \hat{z})$是问题(1)的一个**鞍点**，其中ψ_{PD}的定义见该问题.

- 对任意子集$B_1 \times B_2 \subset X \times Z$，定义**部分原始–对偶间隙**为

$$\mathcal{G}_{B_1 \times B_2}(x, z) = \max_{z' \in B_2} \psi_{\mathrm{PD}}(x, z') - \min_{x' \in B_1} \psi_{\mathrm{PD}}(x', z). \tag{6}$$

不难验证，只要鞍点$(\hat{x}, \hat{z}) \in B_1 \times B_2$，就有

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{B_1 \times B_2}(x, z) &\geq \psi_{\mathrm{PD}}(x, \hat{z}) - \psi_{\mathrm{PD}}(\hat{x}, z) \\ &= (\psi_{\mathrm{PD}}(x, \hat{z}) - \psi_{\mathrm{PD}}(\hat{x}, \hat{z})) + (\psi_{\mathrm{PD}}(\hat{x}, \hat{z}) - \psi_{\mathrm{PD}}(\hat{x}, z)) \geq 0, \end{aligned}$$

并且在鞍点处$\mathcal{G}_{B_1 \times B_2}(\hat{x}, \hat{z}) = 0$. 此外，容易验证当点$(\hat{x}, \hat{z}) \in \mathrm{int}(B_1 \times B_2)$且满足$\mathcal{G}_{B_1 \times B_2}(\hat{x}, \hat{z}) = 0$ 时，$(\hat{x}, \hat{z})$是一个鞍点.

设f,h为闭凸函数，原问题存在鞍点$(\hat{x},\hat{z})$．在迭代格式(4)中取步长$\alpha_k=t,\delta_k=s$，且满足$st<\frac{1}{L}$（$L=\|A\|_2^2$），则序列$\{(x^k,z^k)\}$具有：

(a) 令常数$C\leq(1-Lst)^{-1}$. $\forall k$，(x^k,z^k)有界，且满足

$$\frac{\|x^k-\hat{x}\|^2}{2t}+\frac{\|z^k-\hat{z}\|^2}{2s}\leq C\left(\frac{\|x^0-\hat{x}\|^2}{2t}+\frac{\|z^0-\hat{z}\|^2}{2s}\right), \tag{7}$$

(b) 记$\bar{x}_N=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x^k$，$\bar{z}_N=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}z^k$，则对$B_1\times B_2\subset X\times Z$，有

$$\mathcal{G}_{B_1\times B_2}(\bar{x}_N,\bar{z}_N)\leq\frac{D(B_1,B_2)}{N}, \tag{8}$$

其中$D(B_1,B_2)=\sup_{(x,z)\in B_1\times B_2}\left\{\frac{\|x-x^0\|^2}{2t}+\frac{\|z-z^0\|^2}{2s}\right\}$;
进一步地，序列$\{(\bar{x}_N,\bar{z}_N)\}_{N=1}^{\infty}$的聚点为问题(1)的一个鞍点；

(c) 存在问题(1)一个鞍点(x^*,z^*)使得$x^k\to x^*$, $z^k\to z^*$．

收敛性分析

为了方便推导，首先考虑算法的一般格式：

$$
\begin{aligned}
z^{k+1} &= \mathrm{prox}_{sh^*}(z^k + sA\bar{x}), \\
x^{k+1} &= \mathrm{prox}_{tf}(x^k - tA^\mathrm{T}\bar{z}).
\end{aligned} \tag{9}
$$

这里和算法(4)不同的是，我们使用$\bar{x}, \bar{z}$来表示更新x, z时的参考点．当它们取特定值时，以上格式可以为PDHG 算法或Chambolle-Pock 算法．根据邻近算子的性质，

$$
\begin{aligned}
-A^\mathrm{T}\bar{z} + \frac{x^k - x^{k+1}}{t} &\in \partial f(x^{k+1}), \\
A\bar{x} + \frac{z^k - z^{k+1}}{s} &\in \partial h^*(z^{k+1}).
\end{aligned}
$$

根据次梯度的定义，对于任意的$(x, z) \in X \times Z$有

$$
\begin{aligned}
f(x) &\geq f(x^{k+1}) + \frac{1}{t}(x - x^{k+1})^\mathrm{T}(x^k - x^{k+1}) - (x - x^{k+1})^\mathrm{T}A^\mathrm{T}\bar{z}, \\
h^*(z) &\geq h^*(z^{k+1}) + \frac{1}{s}(z - z^{k+1})^\mathrm{T}(z^k - z^{k+1}) + (z - z^{k+1})^\mathrm{T}A\bar{x}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

收敛性分析

将上述两个不等式相加，并引入二次项可整理得到

$$\begin{aligned}&\frac{\|x-x^k\|^2}{2t}+\frac{\|z-z^k\|^2}{2s}-\frac{\|x-x^{k+1}\|^2}{2t}-\frac{\|z-z^{k+1}\|^2}{2s}\\ \geq&\left[f(x^{k+1})-h^*(z)+(x^{k+1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z\right]-\left[f(x)-h^*(z^{k+1})+x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z^{k+1}\right]\\ &+\frac{\|x^k-x^{k+1}\|^2}{2t}+\frac{\|z^k-z^{k+1}\|^2}{2s}\\ &+(x^{k+1}-\bar{x})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^{k+1}-z)-(x^{k+1}-x)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^{k+1}-\bar{z}).\end{aligned}\tag{11}$$

将式(4) 代入(11)，即取$\bar{x}=2x^k-x^{k-1}, \bar{z}=z^{k+1}$，那么上式最后两项:

$$\begin{aligned}&(x^{k+1}-\bar{x})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^{k+1}-z)-(x^{k+1}-x)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^{k+1}-\bar{z})\\ =&(x^{k+1}-x^k-(x^k-x^{k-1}))^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^{k+1}-z)\\ =&(x^{k+1}-x^k)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^{k+1}-z)-(x^k-x^{k-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^k-z)\\ &-(x^k-x^{k-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^{k+1}-z^k)\\ \geq&(x^{k+1}-x^k)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^{k+1}-z)-(x^k-x^{k-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^k-z)\\ &-\sqrt{L}\|x^k-x^{k-1}\|\|z^{k+1}-z^k\|,\end{aligned}\tag{12}$$

应用柯西不等式即得到最后的不等号

又利用$2ab \le \alpha a^2 + \frac{b^2}{\alpha}$对任意的$\alpha > 0$均成立，有

$$\begin{aligned} &\sqrt{L}\|x^k - x^{k-1}\|\|z^{k+1} - z^k\| \\ \le &\frac{\sqrt{L}\alpha t}{2t}\|x^k - x^{k-1}\|^2 + \frac{\sqrt{L}s}{2\alpha s}\|z^{k+1} - z^k\|^2, \end{aligned} \tag{13}$$

取$\alpha = \sqrt{\frac{s}{t}}$，则

$$\sqrt{L}\alpha t = \sqrt{L}\frac{s}{\alpha} = \sqrt{Lst} < 1,$$

从而合并(11) 式和(12) 式得到，对于任意的$(x, z) \in X \times Z$，

$$\begin{aligned} &\frac{\|x - x^k\|^2}{2t} + \frac{\|z - z^k\|^2}{2s} - \frac{\|x - x^{k+1}\|^2}{2t} - \frac{\|z - z^{k+1}\|^2}{2s} \\ \ge &\left[f(x^{k+1}) - h^*(z) + (x^{k+1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z\right] - \left[f(x) - h^*(z^{k+1}) + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z^{k+1}\right] \\ &+ (1 - \sqrt{Lst})\frac{\|z^k - z^{k+1}\|^2}{2s} + \frac{\|x^k - x^{k+1}\|^2}{2t} - \sqrt{Lst}\frac{\|x^{k-1} - x^k\|^2}{2t} \\ &+ (x^{k+1} - x^k)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^{k+1} - z) - (x^k - x^{k-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^k - z). \end{aligned} \tag{14}$$

收敛性分析

将上述不等式中的k从0遍历至$N-1$并求和，消掉不等式两边共同项后有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[f(x^k)-h^*(z)+(x^k)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z\right]-\left[f(x)-h^*(z^k)+x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z^k\right]\right\}\\
&+\frac{\|x-x^N\|^2}{2t}+\frac{\|z-z^N\|^2}{2s}+(1-\sqrt{Lst})\sum_{k=1}^{N}\frac{\|z^k-z^{k-1}\|^2}{2s}\\
&+(1-\sqrt{Lst})\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\|x^k-x^{k-1}\|^2}{2t}+\frac{\|x^N-x^{N-1}\|^2}{2t}\\
\le&\frac{\|x-x^0\|^2}{2t}+\frac{\|z-z^0\|^2}{2s}+(x^N-x^{N-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^N-z),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

其中约定$x^{-1}=x^0$. 再一次应用柯西不等式，以及$2ab\le\alpha a^2+\frac{b^2}{\alpha}$对任意的$\alpha>0$均成立，可以得到

$$
\begin{aligned}
(x^N-x^{N-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^N-z)&\le\|x^N-x^{N-1}\|(\sqrt{L}\|z^N-z\|)\\
&\le\frac{\|x^N-x^{N-1}\|^2}{2t}+\frac{Lst\|z-z^N\|^2}{2s}.
\end{aligned}
$$

收敛性分析

不等式(15)可进一步整理为

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[f(x^k)-h^*(z)+(x^k)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z\right]-\left[f(x)-h^*(z^k)+x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z^k\right]\right\}\\
&+\frac{\|x-x^N\|^2}{2t}+(1-Lst)\frac{\|z-z^N\|^2}{2s}+(1-\sqrt{Lst})\sum_{k=1}^{N}\frac{\|z^k-z^{k-1}\|^2}{2s}\\
&+(1-\sqrt{Lst})\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\|x^k-x^{k-1}\|^2}{2t}\\
\le&\frac{\|x-x^0\|^2}{2t}+\frac{\|z-z^0\|^2}{2s}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

若取$(x,z)=(\hat{x},\hat{z})$，则由鞍点性质可知

$$
\left[f(x^k)-h^*(\hat{z})+(x^k)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\hat{z}\right]-\left[f(\hat{x})-h^*(z^k)+\hat{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z^k\right]\ge 0.
$$

进而(16)左边每一项都是正的，结论(a)成立.

从(16)出发，利用f,h^*的凸性，以及$\bar{x}_N,\bar{z}_N$的定义，有

$$
\begin{aligned}
&\left[f(\bar{x}_N)-h^*(z)+(\bar{x}_N)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z\right]-\left[f(x)-h^*(\bar{z}_N)+x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\bar{z}_N\right]\\
\le&\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[f(x^k)-h^*(z)+(x^k)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z\right]-\left[f(x)-h^*(z^k)+x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z^k\right]\right\}\\
\le&\frac{1}{N}\left(\frac{\|x-x^0\|^2}{2t}+\frac{\|z-z^0\|^2}{2s}\right).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

从而结论(b)中(8)式成立．由(1) 知$\{(x^k,z^k)\}$是有界序列，因此其均值列$\{(\bar{x}_N,\bar{z}_N)\}$也为有界序列．记$(x^\sharp,z^\sharp)$为序列$\{(\bar{x}_N,\bar{z}_N)\}$的聚点，利用$f,h^*$ 的凸性以及闭性（下半连续性），对(17) 式左右同时取下极限，可知对任意的$(x,z)\in X\times Z$，

$$
\left[f(x^\sharp)-h^*(z)+(x^\sharp)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z\right]-\left[f(x)-h^*(z^\sharp)+x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}z^\sharp\right]\le 0. \tag{18}
$$

从而$(x^\sharp,z^\sharp)$也是问题(1)的一个鞍点．

收敛性分析

为了证明$\{(x^k, z^k)\}$全序列收敛到问题(1)的鞍点，我们采用的大致思路为：先说明其子列收敛，然后再利用(14) 式估计序列中其他点到子列极限点的误差（进而证明全序列收敛），最后说明该极限点是鞍点．
根据结论(1)，$\{(x^k, z^k)\}$是有界点列，因此存在子列$\{(x^{k_l}, z^{k_l})\}$收敛于(x^*, z^*)．在(14) 式中令$(x, z) = (x^*, z^*)$，并将k从k_l取至$N-1, N > k_l$并求和，有

$$
\begin{aligned}
& \frac{\|x^* - x^N\|^2}{2t} + \frac{\|z^* - z^N\|^2}{2s} \\
& + (1 - \sqrt{Lst}) \sum_{k=k_l+1}^{N} \frac{\|z^k - z^{k-1}\|^2}{2s} - \frac{\|x^{k_l} - x^{k_l - 1}\|^2}{2t} \\
& + (1 - \sqrt{Lst}) \sum_{k=k_l}^{N-1} \frac{\|x^k - x^{k-1}\|^2}{2t} + \frac{\|x^N - x^{N-1}\|^2}{2t} \\
& + (x^N - x^{N-1})^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} (z^N - z^*) - (x^{k_l} - x^{k_l - 1})^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} (z^{k_l} - z^*) \\
\le & \frac{\|x^* - x^{k_l}\|^2}{2t} + \frac{\|z^* - z^{k_l}\|^2}{2s}.
\end{aligned}
$$

去掉上式中不等式左边的求和项（正项），我们有如下估计：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\|x^*-x^N\|^2}{2t}+\frac{\|z^*-z^N\|^2}{2s}\\
\leq&\frac{\|x^*-x^{k_l}\|^2}{2t}+\frac{\|z^*-z^{k_l}\|^2}{2s}+\frac{\|x^{k_l}-x^{k_l-1}\|^2}{2t}-\frac{\|x^N-x^{N-1}\|^2}{2t}\\
&+(x^{k_l}-x^{k_l-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^{k_l}-z^*)-(x^N-x^{N-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(z^N-z^*).
\end{aligned}
$$

注意到

$$
\begin{aligned}
x^{k_l}&\to x^*, &&（x^{k_l}\text{ 的定义}）\\
x^N-x^{N-1}&\to 0, &&（\text{由(16) 式推出}）\\
\{z^k\}\text{有界}&, &&（\text{本定理中(a) 的结论}）
\end{aligned}
$$

所以当$N\to\infty$时有，$x^N\to x^*$, $z^N\to z^*$，全序列收敛性得证. 最后，由全序列收敛可知均值$(\bar{x}_N,\bar{z}_N)$也收敛到(x^*,z^*)，根据(a) 的结论和极限的唯一性立即得到$(x^\sharp,z^\sharp)=(x^*,z^*)$，即收敛到问题(1)的一个鞍点