2017年秋季凸优化期中考试试题

1. （10分）分别证明如下两个集合为凸锥(convex cone)，写出并证明其对偶锥(dual cone)的具体形式。
   (a) $R_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$.
   (b) $S_+^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^\top = X, \quad X \succeq 0\}$.

2. （10分）令$A \in S^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^\top = X\}, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. 定义集合$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top Ax + b^\top x + c \leq 0\}$.
   (a) 证明: 如果A半正定, 则Ω是凸集。
   (b) 证明: 令$g \in \mathbb{R}^n$非零。如果存在$\lambda \in \mathbb{R}$使得$A + \lambda gg^\top$半正定, 则集合Ω与超平面$g^\top x + h = 0$ 的交集是凸集。

3. （30分）
   (a) 给定$c \in \mathbb{R}^n$, 讨论下列问题的最优解：
   $$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^\top x; \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n x_i = 1, x \geq 0.$$
   (b) 给定$A \in S^n, c \in \mathbb{R}^n$, 分情况讨论下列问题的最优解：
   $$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^\top x; \text{ s.t. } x^\top Ax \leq 1.$$
   (c) 令$P_i \in S_+^n, i = 0, \ldots, K, \Omega = \left\{P_0 + \sum_{i=1}^K P_i u_i \mid \|u\|_2 \leq 1\right\}$. 将下列问题写成写成二次锥规划：
   $$\min \sup_{P\in\Omega} (1/2)x^\top Px + q^\top x, \text{ s.t. } Ax \leq b.$$
   (d) 令$A_i \in S^m, A(x) = A_0 + x_1A_1 + \cdots + x_nA_n, \lambda_{\max}(A(x))$是矩阵$A(x)$的最大特征值。证明问题
   $$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \lambda_{\max}(A(x))$$
   可以写成半定规划(semidefinite programming)。

4. （20分）
   (a) 证明：$f(x) = (\sum_{i=1}^n x_i^{1/2})^2$ 在定义域$dom f = \mathbb{R}_{++}^n$上为凹(concave)函数。
   (b) 证明：$f(x, u, v) = -\log(uv - x^\top x)$ 在定义域$dom f = \{(x, u, v) \mid uv > x^\top x, u, v > 0, u, v \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\}$上是凸函数。
   (c) 证明：$f(X) = trace(X^{-1})$ 在定义域$dom f = S_{++}^n$上是凸函数。
   (d) 写出函数$f(x) = -\log(t^2 - x^\top x)$ 在定义域$dom f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|x\|_2 \leq t\}$上的共轭函数(conjugate function)。

5. （30分）
   (a) 写出下面问题的对偶问题及其最优性条件：$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \max_{i=1,\ldots,m}(a_i^\top x + b_i)$
   (b) 写出下面问题的对偶问题及其最优性条件：$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1, \text{ s.t. } \|Ax - b\|_2 \leq \sigma$

(c) 写出下面问题的对偶问题及其最优性条件：

$$
\begin{aligned}
\min_{w,b,\xi} \quad & \frac{1}{2}\|w\|_2^2 + C_1 \sum_{i=1}^{n} \xi_i \\
\text{s.t.} \quad & y_i \cdot (a_i^\top w + b) \geq 1 - \xi_i, \forall i = 1, \ldots, n \\
& \xi_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

(d) 推导下列问题的对偶问题，以及该对偶问题的对偶问题：

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad x^\top C x, \quad x_i^2 = 1.
$$