2018年秋季凸优化期中考试试题

1. （10分）令A 和C都是方阵。假设对称矩阵M可以写成

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\top & C \end{pmatrix}.$$

证明：矩阵$M \succ 0$当且仅当$C \succ 0$和$A - BC^{-1}B^\top \succ 0$.

2. （10分）证明集合$K = \{(t;x) \mid \|x\|_2 \leq t, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\}$为凸锥(convex cone)，写出并证明其对偶锥(dual cone)的具体形式。

3. （20分）

   (a) 证明：$f(x,t) = -\log(t^2 - x^\top x)$ 在定义域$dom f = \{(t,x) \mid \|x\|_2 \leq t, t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\}$上是凸函数。

   (b) 证明函数$f(X) = -\log\det X$ 在定义域$dom f = S^n_{++}$上是凸函数，并写出其共轭函数(conjugate function)。

4. （30分）

   (a) 给定$A \in \mathbb{R}^{m\times n}, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$, $Q \in S^n_+$ (半正定矩阵), $\mu > 0, \beta \in \mathbb{R}$. 将下列问题明确写成二次锥(second-order cone)规划形式：

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2 + \mu\|x\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & x^\top Qx + a^\top x + \beta \leq 0 \end{aligned}$$

   (b) 令$h(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log x_i$ ($dom h = \mathbb{R}^n_{++}$), 其Bregman距离定义为

$$D(x,y) = h(x) - h(y) - \nabla h(y)^T(x-y).$$

   给定$a \in \mathbb{R}^n$和$\tau > 0$，求解下列问题的最优解：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} a^\top x + \frac{1}{\tau}D(x,y);\ \text{s.t.}\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, x \geq 0.$$

   (c) 给定$B \in S^n_+, c \in \mathbb{R}^n, \nu > 0$. 令$B^\dagger$ 为B的广义逆矩阵，讨论如下问题的最优解：

$$\min_x \quad c^\top x,\ \text{s.t.} \quad x^\top B^\dagger x \leq \nu, \quad x \in \text{Range}(B)$$

5. （30分）

   (a) 写出下面问题的对偶问题及其最优性条件：

$$\begin{aligned} \min_{w,b,\xi} \quad & \frac{1}{2}\|w\|_2^2 + C_1\sum_{i=1}^n \xi_i + C_2\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \\ \text{s.t.} \quad & y_i \cdot (a_i^\top w + b) \geq 1 - \xi_i, \forall i = 1,\ldots,n \\ & \xi_i \geq 0, \forall i = 1,\ldots,n \end{aligned}$$

   (b) 给定实对称矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$和$b \in \mathbb{R}^n$，写出下面问题的对偶问题，以及该对偶问题的对偶问题：

$$\min_x\ x^\top Ax - 2b^\top x, \quad \text{s.t.}\ x^\top x = 1$$