2019年秋季凸优化期中考试试题

要求：请写出详细的推导过程或证明过程。

1. （20分）证明集合$S_+^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^\top = X, \quad X \succeq 0\}$为凸锥(convex cone)，写出并证明其对偶锥(dual cone)的具体形式。

2. （20分）证明：$f(x) = -(\Pi_{i=1}^n x_i)^{1/n}, \mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}_{++}^n$ 是凸函数。

3. （20分）给定$Q \in S^n$(实对称矩阵)，$\mu > 0$，$A_i \in \mathbb{R}^{m\times n}, i = 0, 1, \ldots, n$。对于矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\|A\|_2$为矩阵的二范数。令$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i$。给出下列问题可以写成一个包含二次锥(second-order cone)和半定锥的凸优化问题的条件，并明确写出该凸优化的具体形式（需要具体写出二次锥和半定锥，严格给出等价关系）：
$$\min_x \quad \frac{\mu}{2} x^\top Q x + \|A(x)\|_2$$

4. （20分）写出下面问题的对偶问题及其最优性条件：
$$\begin{aligned} \min_{w,b,\xi} \quad & \|w\|_1 + C_1 \sum_{i=1}^n \xi_i \\ \text{s.t.} \quad & y_i \cdot (a_i^\top w + b) \geq 1 - \xi_i, \forall i = 1, \ldots, n \\ & \xi_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

5. （20分）给定$Q \in S^n$(实对称矩阵)，$b \in \mathbb{R}^m$和$a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, m$，写出下面问题的对偶问题，以及该对偶问题的对偶问题：
$$\min_x \; x^\top Q x, \quad \text{s.t.} \quad (a_i^\top x)^2 = b_i, \; i = 1, \ldots, m.$$