

2020年秋季凸优化期中考试试题

要求：请写出详细的推导过程或证明过程。

1. (20分) 证明集合

$$K = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 > 0, x_1 \geq x_2 e^{x_3/x_2}\} \cup \{(x_1, 0, x_3) \mid x_1 \geq 0, x_3 \leq 0\}$$

为凸锥(convex cone)，写出并证明其对偶锥(dual cone)的具体形式。

2. (20分) 证明： $f(x)$ 是凸函数当且仅当对任意的 $x \in \text{dom} f, v \in \mathbb{R}^n, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x + tv), \quad \text{dom } g = \{t \mid x + tv \in \text{dom} f\}$$

是凸函数。

3. (20分) 给定 $y \in \mathbb{R}^n$ ，考虑问题：

$$\min_x \max_{i=1, \dots, n} x_i + \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2.$$

写出该问题最优解的具体形式或给出简单算法计算该问题的最优解。

4. (20分) 给定矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，向量 $b \in \mathbb{R}^m$ ，向量 $c \in \mathbb{R}^n$ ，以及标量 d 。假设至少存在一个 x 满足线性不等式 $Ax \leq b$ 。证明下面两点的等价性：

(a) 线性系统 $Ax \leq b$ 的任意可行解 x 满足 $c^\top x \leq d$ 。

(b) 存在某一个 $p \geq 0$ 使得 $A^\top p = c$ 且 $b^\top p \leq d$ 。

5. (20分) 给定实对称矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，考虑整数规划问题：

$$\min_x x^\top Q x, \quad \text{s.t. } x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

(a) 在如下等价条件下分别写出问题(1)的对偶问题，以及该对偶问题的对偶问题：

i. 将约束 $x_i \in \{0, 1\}$ 写成 $x_i(1 - x_i) = 0$ 。

ii. 将约束 $x_i \in \{0, 1\}$ 写成 $x_i(1 - x_i) = 0, x_i \geq 0$ 。

iii. 将变量 $x_i \in \{0, 1\}$ 化成 $z_i \in \{+1, -1\}$ 。

(b) 除了上述半定规划松弛，是否还能写出问题(1)其它形式的半定规划？如果有，请给出具体形式。