

2022年秋季《最优化方法》期中考试试题

要求：请写出详细的推导过程或证明过程。

1. (20分) 证明函数 $f(X) = -\log \det X$ 在定义域 $\text{dom} f = S_{++}^n$ 上是凸函数。
2. (20分) 令 $h(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log x_i$ ($\text{dom} h = \mathbb{R}_{++}^n$), 其Bregman距离定义为

$$D(x, y) = h(x) - h(y) - \nabla h(y)^T (x - y).$$

给定 $a \in \mathbb{R}^n$ 和 $\tau > 0$, 求解下列问题的最优解:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} a^T x + \frac{1}{\tau} D(x, y); \text{ s.t. } \sum_{i=1}^n x_i = 1, x \geq 0.$$

3. (30分) 考虑二次约束二次规划问题:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x^T Q_0 x - 2b_0^T x \\ \text{s.t.} \quad & x^T Q_i x - 2b_i^T x + c_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{1}$$

- (a) 在什么条件下问题(1)可以写成二次锥规划? 请写出具体的二次锥。并且请将该二次锥写成半定锥的形式。
- (b) 写出问题(1)的对偶问题, 并写出该对偶问题的对偶问题。

4. (30分) 考虑问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^2} \quad & f(x) = -2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & (1 - x_1)^3 - x_2 \geq 0 \\ & x_2 + 0.25x_1^2 - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

其最优解为 $x^* = (0, 1)^T$.

- (a) 独立线性无关条件是否在 x^* 成立?
- (b) KKT 条件是否在 x^* 成立?
- (c) 二阶必要性条件是否在 x^* 成立?
- (d) 二阶充分性条件是否在 x^* 成立?