2023年秋季《最优化方法》期中考试试题

要求：请写出详细的推导过程或证明过程。

1. （20分）令$A \in S^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid X^\top = X\}, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. 定义集合$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top Ax + b^\top x + c \le 0\}$.

   (a) 证明: 如果A半正定, 则Ω是凸集，并写出具体的二次锥。

   (b) 证明: 令$g \in \mathbb{R}^n$非零。如果存在$\lambda \in \mathbb{R}$使得$A + \lambda gg^\top$半正定, 则集合Ω与超平面$g^\top x + h = 0$ 的交集是凸集。

2. （15分）设$f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$为可微函数，则$f(x)$为凸函数当且仅当$\mathrm{dom} f$为凸集且$\nabla f(x)$为单调映射，即

$$(\nabla f(x) - \nabla f(y))^\top (x - y) \ge 0,\ \forall x, y \in \mathrm{dom} f.$$

3. （15分）证明实对称矩阵$X \in \mathbb{S}^n$的最大特征值

$$\lambda_{\max}(X) = \sup_{\|y\|_2=1} y^T X y$$

   是凸函数。请给出具体证明过程。

4. （50分）给定对称矩阵$C \in \mathbb{R}^{n\times n}$，令$p$为正整数且$p \in [1, n]$，考虑优化问题:

$$\begin{aligned} \max_{Y\in\mathbb{R}^{n\times p}} \quad & f(Y) = \mathrm{Tr}(CYY^\mathrm{T}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathrm{diag}(YY^\mathrm{T}) = \mathbf{1}, \end{aligned} \tag{1}$$

   其中对于对称矩阵$X \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$\mathrm{Tr}(X) = \sum_{i=1}^n X_{ii}, \mathrm{diag}(X) = [X_{11}, X_{22}, \cdots, X_{nn}]^\mathrm{T}$。

   注：如果对矩阵形式相对不熟悉，可以先将变量写成向量形式: $Y = \begin{pmatrix} y_1^\top \\ \cdots \\ y_n^\top \end{pmatrix}$，其中$y_i \in \mathbb{R}^p$是列向量.

   (a) （10分）写出问题(1)的对偶问题，以及该对偶问题的对偶问题。

   (b) （10分）讨论可行点Y处线性无关约束品性(LICQ)是否满足?

   (c) （10分）写出目标函数$f(Y)$关于Y的梯度，估计梯度的利普希茨常数。

   (d) （10分）优化问题(1)的一阶最优性(KKT)条件。

   (e) （10分）二阶充分条件：假设在可行点Y处存在拉格朗日乘子满足KKT条件，如果拉格朗日函数的海瑟矩阵在临界锥上严格正定，则Y是问题(1)的严格局部极小点。请写出拉格朗日函数的海瑟矩阵(可以是矩阵形式或者算子形式)和临界锥具体形式。

   (f) （10分）假设Y是局部极小点，写出拉格朗日乘子的显式表达形式(只与C和Y有关)。