2024年秋季《最优化方法》期中考试试题

要求：请写出详细的推导过程或证明过程。

1. （20分）证明集合$K=\{(t;x)\mid \|x\|_2\le t, t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}^n\}$为凸锥，写出并证明其对偶锥的具体形式。

2. （20分）考虑函数：$f(X)=-\log(\det(X))$, 其中$\mathbf{dom} f=\mathcal{S}^n_{++}$。

   (a) （10分）计算$f(X)$的梯度并证明它是凸函数。

   (b) （10分）给定对称矩阵$S\in\mathcal{S}^n$，考虑如下优化问题：

   $$\begin{aligned}\min_X \quad & f(X)+\mathrm{Tr}(SX)\\ \text{s.t.} \quad & X\text{是三对角矩阵}.\end{aligned}$$

   证明其最优解X_{opt} 满足

   $$(X^{-1}_{\mathrm{opt}})_{ij}=S_{ij},\quad |i-j|\le 1.$$

3. （20分）设A 是一个给定矩阵。证明以下两个陈述是等价的。

   (a) 对每一个满足$Ax\ge 0$ 且$x\ge 0$ 的向量x，必须有$x_1=0$。

   (b) 存在某个向量p 使得$p^TA\le 0$，且$p\ge 0$，并且$p^TA_1<0$，其中A_1 是矩阵A 的第一列。

4. （20分）给定实对称矩阵$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$和$b\in\mathbb{R}^n$，写出下面问题的对偶问题，以及该对偶问题的对偶问题：

   $$\min_x\ x^\top Ax-2b^\top x,\quad \text{s.t. } x_i^2-x_{i+1}^2\le 1,\quad i=1,\ldots,n-1,\quad x_n^2=1.$$

5. （20分）给定实对称矩阵$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，以及整数$k<n$. 考虑优化问题:

   $$\min_{X\in\mathbb{R}^{n\times k}}\mathrm{Tr}(X^TAX),\quad \text{s.t.}\quad X^TX=I_k,$$

   其中I_k是k维单位矩阵。

   (a) （10分）写出该问题的KKT条件。

   (b) （10分）证明A的最小的k个特征值对应的特征向量是该问题的最优解。