最优化：建模、算法与理论
参考答案

丁思哲　邓展望　李天佑　陈铖　谢中林　俞建江
刘浩洋　文再文

版本：v1.03 （更新于 2023.12.21）

教材链接：http://faculty.bicmr.pku.edu.cn/~wenzw/optbook.html

目录

第一章　最优化简介

1.1 考虑稀疏优化问题，我们已经直观地讨论了在 ℓ_0，ℓ_1，ℓ_2 三种范数下问题的解的可能形式．针对一般的 ℓ_p "范数"：

$$\|x\|_p \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\sum_{i=1}^{n} |x|^p)^{1/p}, \quad 0 < p < 2,$$

我们考虑优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x\|_p, \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b. \end{aligned}$$

试着用几何直观的方式（类似于图 1.2）来说明当 $p \in (0, 2)$ 取何值时，该优化问题的解可能具有稀疏性.

解 (丁思哲). 在 $\mathbb{R}^2$ 空间中，不同 p 的范数球情形如图 1.1 所示. □

1.2 给定一个函数 $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 及其一个局部最优点 x^*，则该点沿任何方向 $d \in \mathbb{R}^n$ 也是局部最优的，即 0 为函数 $\phi(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=\!=} f(x^* + \alpha d)$ 的一个局部最优解．反之，如果 x^* 沿任何方向 $d \in \mathbb{R}^n$ 都是局部最优解，则 x^* 是否为 $f(x)$ 的一个局部最优解? 若是，请给出证明；若不是，请给出反例.

解 (俞建江). 反例：考虑极坐标表示的函数

$$f(r, \theta) = \begin{cases} r \sin(\dfrac{r}{\theta}), & \theta \in (0, 2\pi), \\ 0, & \theta = 0. \end{cases}$$ □

1.3 试给出如下点列的 Q-收敛速度：

(a) $x^k = \dfrac{1}{k!}, k = 1, 2, \cdots$;

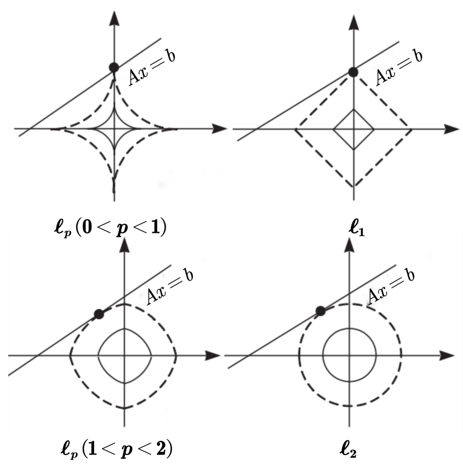

图 1.1 ℓ_p 范数优化问题的求解

(b)

$$x^k = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{4}\right)^{2^k}, & k \text{ 为偶数}, \\ \dfrac{x^{k-1}}{k}, & k \text{ 为奇数}. \end{cases}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

解 (俞建江，丁思哲).

(a) 该点列 Q-超线性收敛.

(b) 该点列 Q-超线性收敛.（请分 k 的奇偶性讨论）

□

1.4 考虑函数 $f(x) = x_1^2 + x_2^2$，$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$，以及迭代点列 $x^k = (1 + \dfrac{1}{2^k})(\cos k, \sin k)^{\mathrm{T}}, k = 1, 2, \cdots$，请说明

(a) $\{f(x^{k+1})\}$ 是否收敛？若收敛，给出 Q-收敛速度；

(b) $\{x^{k+1}\}$ 是否收敛？若收敛，给出 Q-收敛速度.

解 (俞建江).

(a) 该点列 Q-线性收敛.

(b) 该点列不收敛.

□

第二章　基础知识

2.1 说明矩阵 F 范数不是算子范数（即它不可能被任何一种向量范数所诱导）. 提示：算子范数需要满足某些必要条件，只需找到一个 F 范数不满足的必要条件即可.

解 (俞建江). 考虑 I_n（n 阶单位矩阵）在 F 范数下的表现. □

2.2 证明：矩阵 A 的 2 范数等于其最大奇异值，即

$$\sigma_1(A) = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

解 (俞建江，丁思哲). 考虑

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)} = \sqrt{x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)\,x}$$

且 $A^{\mathrm{T}}A$ 是实对称矩阵. □

2.3 证明如下有关矩阵范数的不等式：

(a) $\|AB\|_F \leqslant \|A\|_2\|B\|_F$,

(b) $|\langle A, B\rangle| \leqslant \|A\|_2\|B\|_*$.

解 (俞建江).

(a) 对 $A^{\mathrm{T}}A$ 正交对角化，利用 F 范数的定义证明.

(b) 对 B 作 SVD 分解，利用矩阵内积的定义证明.

□

2.4 设矩阵 A 为

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix},$$

其中 $\|B\|_2 < 1$，I 为单位矩阵，证明：A 可逆且

$$\|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{1 + \|B\|_2}{1 - \|B\|_2}.$$

解 (俞建江). 注意 $0 < \|B\|_2 < 1$ 时

$$A^{-1} \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}.$$

□

2.5 假设 A 和 B 均为半正定矩阵，求证：$\langle A, B\rangle \geqslant 0$. 提示：利用对称矩阵的特征值分解.

解 (俞建江). 利用矩阵内积的定义证明. □

2.6 计算下列矩阵变量函数的导数.

(a) $f(X) = a^{\mathrm{T}} X b$，这里 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$a \in \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^n$ 为给定的向量；

(b) $f(X) = \mathrm{Tr}(X^{\mathrm{T}} A X)$，其中 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是长方形矩阵，A 是方阵 (但不一定对称)；

(c) $f(X) = \ln\det(X)$，其中 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$，定义域为 $\{X \mid \det(X) > 0\}$ (注意这个习题和例 2.1 的 (3) 的区别).

解 (俞建江，丁思哲).

(a) $\nabla f(X) = ab^{\mathrm{T}}$.

(b) $\nabla f(X) = (A + A^{\mathrm{T}})X$.

(c) $\nabla f(X) = X^{-\mathrm{T}}$. □

2.7 考虑二次不等式

$$x^{\mathrm{T}} A x + b^{\mathrm{T}} x + c \leqslant 0,$$

其中 A 为 n 阶对称矩阵，设 C 为上述不等式的解集.

(a) 证明：当 A 正定时，C 为凸集；

(b) 设 C' 是 C 和超平面 $g^{\mathrm{T}}x+h=0$ 的交集 ($g\neq 0$)，若存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $A+\lambda gg^{\mathrm{T}}$ 半正定，证明：C' 为凸集.

解 (俞建江).

(a) 考察 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax+b^{\mathrm{T}}x+c$ 的凸性.

(b) 利用上一小问的结论，注意点在 C' 上的条件. □

2.8 (鞍点问题) 设函数 $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 满足如下性质：当固定 $z\in\mathbb{R}^m$ 时，$f(x,z)$ 关于 x 为凸函数；当固定 $x\in\mathbb{R}^n$ 时，$f(x,z)$ 关于 z 是凹函数，则称 f 为**凸 − 凹函数**.

(a) 设 f 二阶可导，试利用海瑟矩阵 $\nabla^2 f$ 给出 f 为凸 − 凹函数的一个二阶条件；

(b) 设 f 为凸 − 凹函数且可微，且在点 $(\bar{x},\bar{z})$ 处满足 $\nabla f(\bar{x},\bar{z})=0$，求证：对任意 x 和 z，如下鞍点性质成立：

$$f(\bar{x},z)\leqslant f(\bar{x},\bar{z})\leqslant f(x,\bar{z}).$$

进一步证明 f 满足极小 − 极大性质：

$$\sup_z\inf_x f(x,z)=\inf_x\sup_z f(x,z).$$

(c) 设 f 可微但不一定是凸 − 凹函数，且在点 $(\bar{x},\bar{z})$ 处满足鞍点性质

$$f(\bar{x},z)\leqslant f(\bar{x},\bar{z})\leqslant f(x,\bar{z}),\quad \forall\ x,z$$

求证：$\nabla f(\bar{x},\bar{z})=0$.

注：这个题目的结论和之后我们要学习的拉格朗日函数有密切联系.

解 (俞建江，丁思哲).

(a) 根据函数的凹凸性和海瑟矩阵之间的关系给出.

(b) 利用凹、凸函数的一阶条件和关系

$$\begin{aligned}\inf_x f(x,z)&\leqslant f(\bar{x},z),\\ f(x,\bar{z})&\leqslant \sup_z f(x,z),\end{aligned}$$

即可.

(c) 考虑在 $(\bar{x},\bar{z})$ 的临近点做一阶泰勒展开. □

2.9 利用凸函数二阶条件证明如下结论:

(a) ln-sum-exp 函数: $f(x)=\ln\sum_{k=1}^{n}\exp x_k$ 是凸函数;

(b) 几何平均: $f(x)=(\prod_{k=1}^{n}x_k)^{1/n}$ $(x\in\mathbb{R}^n_{++})$ 是凹函数;

(c) 设 $f(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}$, 其中 $p\in(0,1)$, 定义域为 $x>0$, 则 $f(x)$ 是凹函数.

解 (俞建江). 求海瑟矩阵后, 证明矩阵半正定即可. □

2.10 证明定理 2.12.

解 (俞建江). 充分性证明: 考虑凸函数的定义和上方集的凸性.
必要性证明: 利用凸集定义. □

2.11 考虑如下带有半正定约束的优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathrm{Tr}(X), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & X \end{bmatrix} \succeq 0, \\ & X\in\mathcal{S}^n, \end{aligned}$$

其中 A 是正定矩阵.

(a) 利用附录 B.1.9 中的 Schur 补的结论证明此优化问题的解为 $X=B^{\mathrm{T}}A^{-1}B$;

(b) 利用定理 2.13 的 (8) 证明: 函数 $f(A,B)=\mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}A^{-1}B)$ 关于 (A,B) 是凸函数, 其中 $f(A,B)$ 的定义域 $\mathbf{dom}\, f=\mathcal{S}^m_{++}\times\mathbb{R}^{m\times n}$.

解 (俞建江).

(a) 若 A 正定, 则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^{\mathrm{T}} & X \end{bmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow X-B^{\mathrm{T}}A^{-1}B\succeq 0.$$

(b) 利用定理，可将优化问题的目标和条件写成函数形式进行证明.

$\square$

2.12 求下列函数的共轭函数：

(a) 负熵：$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$；

(b) 矩阵对数：$f(x) = -\ln\det(X)$；

(c) 最大值函数：$f(x) = \max\limits_i x_i$；

(d) 二次锥上的对数函数：$f(x,t) = -\ln(t^2 - x^{\mathrm{T}}x)$，注意这里 f 的自变量是 (x,t).

解 (丁思哲).

(a) $f^*(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^{y_i - 1}$.

(b) $f^*(Y) = -n - \ln\det(-Y)$, 其中 Y 的定义域是 $\{Y \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(-Y) > 0\}$.

(c) 若 $\|y\|_1 \leqslant 1$ 且 $y \geqslant 0$，$f^*(y) = 0$.
若不然，$f^*(y)$ 不存在.

(d) $f^*(y,q) = -2 + \ln(\dfrac{4}{q^2 - y^{\mathrm{T}}y})$, 定义域为 $\{(y,q) \mid q^2 - y^{\mathrm{T}}y > 0\}$. $\square$

2.13 求下列函数的一个次梯度：

(a) $f(x) = \|Ax - b\|_2 + \|x\|_2$；

(b) $f(x) = \inf\limits_y \|Ay - x\|_\infty$，这里可以假设能够取到 $\hat{y}$，使得 $\|A\hat{y} - x\|_\infty = f(x)$.

解 (俞建江).

(a) 一个次梯度为：

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{A^{\mathrm{T}}(Ax-b)}{\|Ax-b\|_2} + \dfrac{x}{\|x\|_2}, & Ax - b \neq 0,\ x \neq 0, \\ \dfrac{A^{\mathrm{T}}(Ax-b)}{\|Ax-b\|_2}, & Ax - b \neq 0,\ x = 0, \\ \dfrac{x}{\|x\|_2}, & Ax - b = 0,\ x \neq 0, \\ 0, & Ax - b = 0,\ x = 0. \end{cases}$$

(b) 利用定理 2.25. $f(x)$ 的一个次梯度为

$$-\text{sign}\left(\left(A\hat{y}-x\right)_i\right)e_i=\text{sign}\left(\left(x-A\hat{y}\right)_i\right)e_i. \qquad \square$$

2.14 利用定理 2.24 来求出最大特征值函数 $f(x) = \lambda_1(A(x))$ 的次微分 $\partial f(x)$，其中 $A(x)$ 是关于 x 的线性函数

$$A(x)=A_0+\sum_{i=1}^{n}x_iA_i,\quad A_i\in\mathcal{S}^m, i=0,\cdots,n.$$

说明 $f(x)$ 何时是可微函数.

解 (俞建江). 根据

$$\partial f(x)=\mathbf{conv}\left\{(u^{\mathrm{T}}A_1u,u^{\mathrm{T}}A_2u,\cdots,u^{\mathrm{T}}A_nu)\mid u\in C\right\},$$

当 $A(x)$ 最大特征值的几何重数为 1 时，$f(x)$ 是可微函数. $\square$

2.15 设 $f(x)$ 为 m-强凸函数，求证：对于任意的 $x\in\mathbf{int}\,\mathbf{dom}\,f$，

$$f(x)-\inf_{y\in\mathbf{dom}\,f}f(y)\leqslant\frac{1}{2m}\text{dist}^2(0,\partial f(x)),$$

其中 $\text{dist}(z,S)$ 表示点 z 到集合 S 的欧几里得距离.

解 (俞建江). 利用引理 2.2 和 m-强凸函数的性质证明. $\square$

第三章　优化建模

3.1 证明：方程组 (3.6.1) 的解不是唯一的.

解 (李天佑). 反证. □

3.2 设有一片 9×9 的空地，每一小块空地可以改成池塘或者稻田. 由于稻田需要经常灌溉，因此设计的时候每一块稻田至少要与一块池塘相邻（前、后、左、右四个方向视为相邻）. 我们的最终目标是让稻田的数量达到最大. 试将这个实际问题转化为优化问题，该优化问题中的目标函数和约束是如何设计的?

解 (李天佑). 设 x_{ij} 代表空地第 i 排第 j 列的用地类型，$x_{ij}=1$ 代表稻田，$x_{ij}=0$ 代表池塘. 优化问题可写为

$$
\begin{aligned}
\max_{x} \quad & \sum_{1\leqslant i,j\leqslant 9} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & |x_{ij}-x_{(i-1)j}|+|x_{ij}-x_{(i+1)j}|+ \\
& \quad |x_{ij}-x_{i(j-1)}|+|x_{ij}-x_{i(j+1)}|\geqslant 1, \quad i,j=1,2,\cdots,9 \\
& x_{0,k}=x_{k,0}=x_{10,k}=x_{k,10}=1, \quad k=1,2,\cdots,9 \\
& x_{ij}\in\{0,1\}, \quad i,j=1,2,\cdots,9.
\end{aligned}
$$

□

3.3 给定正交矩阵 $U=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}$ 及矩阵 $A=U\mathrm{Diag}(10^{-6},2,3)U^{\mathrm{T}}$，分别计算 $b=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 和 $b=(10^{-4},0,0)^{\mathrm{T}}$ 的情形下模型 (3.2.4) 和 (3.2.6) 的解，其中参数 μ 待定，并分析得到的结果.

解 (李天佑). 解略。
模型 (3.2.4) 中矩阵 A 病态，b 的扰动对解有较大的影响；模型 (3.2.6) 中正则项的存在使模型的解更稳定. □

3.4 在主成分分析中，我们需要计算高维空间中的数据点到低维空间中的投影. 试给出 $a \in \mathbb{R}^n$ 在由一般矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n\times p}(p < n)$ 的列向量张成的空间中的投影，这里 X 可能不是列正交矩阵，也可能秩小于 p.

解 (李天佑). 现将投影问题写成优化问题. 若 X 不满秩，考虑对 X 分块. □

3.5 假设 $A = I$，请分别计算优化问题 (3.2.6) 和 (3.2.7) 的解. 进一步地，当 λ 和 σ 满足何种关系时，两个问题的解是一样的?

解 (李天佑). 优化问题 (3.2.6) 的解为 $x_1 = \dfrac{1}{1+\mu}b$.
当 $\|b\|_2 \leqslant \sigma$ 时，优化问题 (3.2.7) 的解为 $x_2 = b$；当 $\|b\|_2 > \sigma$ 时，解为 $x_2 = \dfrac{\sigma}{\|b\|_2}b$. □

3.6 给定向量 $a, b \in \mathbb{R}^n$，分别考虑取 $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$ 范数时，优化问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \quad \|xa - b\|$$

的解.

解 (李天佑). ℓ_2 范数的情况略. ℓ_1 和 ℓ_∞ 范数的情况可从分段线性函数的性质去考察. □

3.7 考虑线性观测模型

$$b_i = a_i^{\mathrm{T}}x + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

其中 a_i, b_i 为观测数据，ε_i 为独立同分布的噪声，x 是要估计的参数. 在下面的假设下，请利用最大似然估计方法构造相应的优化问题来估计参数 x.

(a) 噪声 $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$，其密度函数为 $p(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-\dfrac{z^2}{2\sigma^2})$；

(b) 噪声 ε_i 服从拉普拉斯（Laplace）分布，其密度函数为 $p(z) = \frac{1}{2a}\exp(-\frac{|z|}{a})$，$a > 0$；

(c) 噪声 ε_i 为 $[-a, a](a > 0)$ 上的均匀分布，其密度函数为 $p(z) = \frac{1}{2a}$，$z \in [-a, a]$.

解 (李天佑).　通过最大化对数似然的方式求优化问题. □

3.8 在逻辑回归中，如果把 Sigmoid 函数 (3.3.1) 换成

$$\theta(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{2(1+|z|)},$$

试利用最大似然估计建立分类模型. 该模型得到的优化问题是否是凸的?

解 (李天佑). 优化问题为

$$\min_x \sum_{i=1}^m \ln\left(\frac{1+|a_i^{\mathrm{T}}x|}{1+|a_i^{\mathrm{T}}x| + b_i \cdot a_i^{\mathrm{T}}x}\right),$$

其非凸. □

3.9 给定以下带标签的数据:

标签	数据点
-1	$(1,5,1),(9,5,1)$
1	$(8,13,13),(5,1,9)$

请建立原始的支持向量机模型并计算分割超平面.

解 (李天佑). 原始支持向量机模型为

$$\max_{x,y,\gamma} \quad \gamma \quad \text{s.t.} \quad \frac{b_i(a_i^{\mathrm{T}}x + y)}{\|x\|_2} \geqslant \gamma, \quad i = 1,2,3,4.$$

分割超平面可以是 $x^{\mathrm{T}}w + y = 0$，其中 $x = (0,-1,3)^{\mathrm{T}}$ 且 $y = 12$. □

3.10 用超平面（如 $a^{\mathrm{T}}x + b = 0$）来分类的模型称为线性分类模型. 证明逻辑回归是线性分类模型. 与支持向量机相比，逻辑回归的优缺点是什么?

解 (李天佑). 从逻辑回归预测样本所属类别的概率证明其是线性分类模型. □

3.11 请分析如何将支持向量机方法应用到多分类问题中.

解 (李天佑). 答案不唯一. 如若存在 n 类数据点，可以逐一二分类，共得到 n 个决策平面. □

3.12 考虑三个随机变量 X, Y, Z，取值集合均为 $\{1, 2, \cdots, n\}$.

(a) 在没有独立性假设的条件下，为了表示随机向量 (X, Y, Z) 的联合概率质量函数 $p(x, y, z)$，我们至少需要多少个参数?

(b) 如果在给定 X 的情况下，Y 和 Z 独立，为了表示 $p(x, y, z)$，至少需要多少个参数?

解 (李天佑).

(a) 至少需要 $n^3 - 1$ 个参数.

(b) 需要 $(2n + 1)(n - 1)$ 个参数. □

3.13 给定 n 维高斯随机变量的一组实际取值：$y^1, y^2, \cdots, y^m$. 试利用最大似然方法给出其精度矩阵的估计.

解 (李天佑). 考虑最大化对数似然. □

3.14 试证明如下和 K-均值聚类相关的结论.

(a) 设 S_i 非空，证明：

$$2n_i \sum_{a \in S_i} \|a - c_i\|^2 = \sum_{a, a' \in S_i} \|a - a'\|^2,$$

其中 n_i 为 S_i 中元素个数，c_i 为 S_i 所有数据点的中心点.

(b) 证明：问题 (3.10.4) 和问题 (3.10.5) 等价.

解 (李天佑).

(a) 考虑在 $\|a - c_i\|^2$ 中代入 $c_i = \dfrac{1}{n_i} \displaystyle\sum_{a \in S_i} a$.

(b) (3.10.4)⇒(3.10.5)：

对 X 进行分解 $X = YY^{\mathrm{T}}$，适当取 Y 满足 (3.10.5).

(3.10.5)⇒(3.10.4)：

若 Y 是 (3.10.5) 的解，Y 每行只有一个非零元，再令 $X = YY^{\mathrm{T}}$，可知 X 是 (3.10.4) 的解. □

3.15 在 $\mathbb{R}^2$ 空间中，定义小波框架

$$
\begin{aligned}
w_1 &= \sqrt{\frac{2}{3}}(0,1)^{\mathrm{T}},\\
w_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}}(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})^{\mathrm{T}},\\
w_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

对于向量 $x = (1,3)^{\mathrm{T}}$，试给出其在小波框架下的稀疏表示.

解 (李天佑). 求 $(w_1, w_2, w_3)\alpha = x$ 的稀疏解. □

第四章　典型优化问题

4.1 将下面的问题转化为线性规划：给定 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$,

(a) $\displaystyle\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|Ax-b\|_1, \quad \text{s.t.} \quad \|x\|_\infty \leqslant 1;$

(b) $\displaystyle\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|x\|_1, \quad \text{s.t.} \quad \|Ax-b\|_\infty \leqslant 1;$

(c) $\displaystyle\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|Ax-b\|_1 + \|x\|_\infty;$

(d) $\displaystyle\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \sum_{i=1}^m \max\{0, a_i^{\mathrm{T}}x + b_i\}.$

解 (丁思哲). 考虑等价转化目标函数或条件中的非线性项.

(a)

$$\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^m_+} \quad & \sum_{i=1}^n z_i \\
\text{s.t.} \quad & -z \leqslant Ax-b \leqslant z, \\
& -\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^m_+} \quad & \sum_{i=1}^m z_i \\
\text{s.t.} \quad & -z \leqslant x \leqslant z, \\
& -\mathbf{1} \leqslant Ax-b \leqslant \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^m_+, t\in\mathbb{R}_+} \quad & \sum_{i=1}^m z_i + t \\
\text{s.t.} \quad & -z \leqslant Ax-b \leqslant z, \\
& -t\mathbf{1} \leqslant x \leqslant t\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n, z\in\mathbb{R}^m_+} \quad & \sum_{i=1}^m z_i \\ \text{s.t.} \quad & z \geqslant Ax+b. \end{aligned}$$

□

4.2 求解下面的线性规划问题：给定向量 $c \in \mathbb{R}^n$，

(a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad c^{\mathrm{T}}x, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{0} \leqslant x \leqslant \mathbf{1};$

(b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad c^{\mathrm{T}}x, \quad \text{s.t.} \quad -\mathbf{1} \leqslant x \leqslant \mathbf{1};$

(c) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad c^{\mathrm{T}}x, \quad \text{s.t.} \quad -1 \leqslant \mathbf{1}^{\mathrm{T}}x \leqslant 1;$

(d) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad c^{\mathrm{T}}x, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}}x = 1, \quad x \geqslant 0;$

解 (邓展望).

(a) 解为

$$x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}, \quad x_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{sign}\,(c_i)\,.$$

(b) 解为

$$x = (x_1, ..., x_n)^{\mathrm{T}}, \quad x_i = -\mathrm{sign}\,(c_i)\,.$$

(c) 若 $c_i \neq c_j$，原问题无界. 若 $m > 0$，解在 $x = \sum\limits_i x_i = -1$ 处取得，否则解在 $x = \sum\limits_i x_i = 1$ 处取得.

(d) 设 c_j 为 $c_i(i = 1...n)$ 中最小的项，则解为 $x = (0, ...1, ...0)$，其中第 j 个分量取 1.

□

4.3 在数据插值中，考虑一个简单的复合模型（取 ϕ 为恒等映射，两层复合模型）：

$$\min_{X_1\in\mathbb{R}^{q\times p}, X_2\in\mathbb{R}^{q\times q}} \quad \sum_{i=1}^m \|X_2X_1a_i - b_i\|_2^2,$$

其中 $a_i \in \mathbb{R}^p, b_i \in \mathbb{R}^q, i = 1, 2, \cdots, m.$

(a) 试计算目标函数关于 X_1, X_2 的导数；

(b) 试给出该问题的最优解.

解 (俞建江). 将 a_i, b_i 整合成矩阵 A, B:

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_m) \in \mathbb{R}^{p\times m},\ B = (b_1, b_2, \cdots, b_m) \in \mathbb{R}^{q\times m},$$

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial X_1} = 2X_2^{\mathrm{T}}(X_2X_1A - B)A^{\mathrm{T}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial X_2} = 2(X_2X_1A - B)A^{\mathrm{T}}X_1^{\mathrm{T}}$.

(b) 令 $X = X_2X_1$, $g(X) = \|XA - B\|_F^2$, 考虑 $\dfrac{\partial g}{\partial X} = 0$. □

4.4 给定数据点 $a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \cdots, m$,我们用二次函数拟合,即求 $X \in \mathcal{S}^n, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}$ 使得

$$b_i \approx f(a_i) = a_i^{\mathrm{T}}Xa_i + y^{\mathrm{T}}a_i + z, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

这里假设数据点 $a_i \in \mathcal{B} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid l \leqslant a \leqslant u\}$. 相应的最小二乘模型为

$$\sum_{i=1}^m (f(a_i) - b_i)^2.$$

此外,对函数 f 有三个额外要求:(1) f 是凹函数;(2) f 在集合 $\mathcal{B}$ 上是非负的,即 $f(a) \geqslant 0, \forall a \in \mathcal{B}$;(3) f 在 $\mathcal{B}$ 上是单调非减的,即对任意的 $a, \hat{a} \in \mathcal{B}$ 且满足 $a \leqslant \hat{a}$,有 $f(a) \leqslant f(\hat{a})$.

请将上述问题表示成一个凸优化问题,并尽可能地简化.

解 (邓展望). 凸优化问题可写为

$$\begin{aligned}
\min_{X\in\mathcal{S}, y\in\mathbb{R}^n, z\in R} \quad & \sum_{i=1}^m (a_i^{\mathrm{T}}Xa_i - y^{\mathrm{T}}a_i - z + b_i)^2. \\
\text{s.t.} \quad & X \geqslant 0, \\
& x^{\mathrm{T}}Xx^{\mathrm{T}} + y^{\mathrm{T}}x + z \geqslant 0, \quad x_i \in \{l_i, u_i\}, \\
& 2Xa + y \geqslant 0, \\
& a \in \mathcal{B}.
\end{aligned}$$

□

4.5 考虑下面的复合优化问题:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|x\|_1 + \|Dx - a\|_2^2,$$

其中 $a \in \mathbb{R}^n, D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 均已知. 试给出最优解 x^* 的表达式.

解 (邓展望). x^* 各分量的表达式[1]如下.

(a) 若 $-2d_ia_i+1\leqslant 0$，$x_i^*=\dfrac{2d_ia_i-1}{2d_i^2}$.

(b) 若 $-2d_ia_i-1\geqslant 0$，$x_i^*=\dfrac{1+2d_ia_i}{2d_i^2}$.

(c) 否则 $x_i^*=0$. □

4.6 考虑下面的复合优化问题:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\quad \|x\|_0+\|Dx-a\|_2^2,$$

其中 $a\in\mathbb{R}^n, D=\mathrm{Diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 均已知. 试给出最优解 x^* 的表达式.

解 (邓展望). 按 **4.5** 题的方法. 最优解分量 x_i^* 的表达式为:

(a) 若 $d_i=0$，则 $x_i^*=0$.

(b) 若 $d_i\neq 0$,

  i. 若 $|a_i|\leqslant 1$，取 $x_i^*=0$ 较小，此时满足

$$g(0)\leqslant g(x_i).\quad (x_i\neq 0)$$

  ii. 若 $|a_i|>1$, 取使 $(d_ix_i-a_i)^2$ 最小的非零 x_i, 使得 $x_i^*=\dfrac{a_i}{d_i}$. □

4.7 将不等式形式的半定规划问题 (4.5.1) 转化成标准形式 (4.5.2).

解 (俞建江). 将原问题化为

$$\begin{aligned}\min_{y\in\mathbb{R}^m}\quad & -b^\mathrm{T}y,\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^m y_iA_i\preceq C.\end{aligned}\tag{4.1}$$

，根据对偶函数求对偶问题. □

4.8 证明如下结论.

[1] 可参考教材 8.4.12

(a) 设 $x \in \mathbb{R}^n$，$X \in \mathcal{S}^n$，定义 $\overline{X} = \begin{bmatrix} X & x \\ x^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix}$，证明 $X \succeq xx^{\mathrm{T}}$ 等价于 $\overline{X} \succeq 0$.

(b) 设 $z \in \mathbb{R}^m$，矩阵值映射 $M(z) : \mathbb{R}^m \to \mathcal{S}^n$ 定义为

$$M(z) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} z_i A_i, \quad A_i \in \mathcal{S}^n,$$

证明：$\eta \geqslant \lambda_{\max}(M(z))$ 等价于 $\eta I \succeq M(z)$.

解 (俞建江).

(a) 利用 Schur 补的性质证明.

(b) 对 $M(z)$ 进行谱分解，考虑特征值和 η 的关系. □

4.9 给定矩阵 $A_i \in \mathcal{S}^m$，$i = 0, 1, \cdots, n$, 定义线性映射 $A(x) = A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n$，令 $\lambda_1(x) \geqslant \lambda_2(x) \geqslant \cdots \lambda_m(x)$ 为矩阵 $A(x)$ 的特征值. 将下面的优化问题转化为半定规划问题：

(a) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \lambda_1(x) - \lambda_m(x)$.

(b) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \sum\limits_{i=1}^{m} |\lambda_i(x)|$.

解 (俞建江). 同 **4.8** 题的分析方法，具体形式略. □

4.10 将下面的优化问题转化为半定规划问题：

(a) 给定 $(n+1)$ 个矩阵 $A_i \in \mathbb{R}^{p \times q}$，$i = 0, 1, \cdots, n$，考虑优化问题

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \|A(x)\|_2,$$

其中 $A(x) = A_0 + x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n$ 且 $\|\cdot\|_2$ 为矩阵的谱范数 (即最大奇异值)；

(b) 给定 $c \in \mathbb{R}^n$，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 以及 $d \in \mathbb{R}^p$，考虑优化问题

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^{\mathrm{T}} x, \\ \text{s.t.} \quad & \|Ax + b\|_2 \leqslant \mathbf{1}^{\mathrm{T}} x, \\ & Bx = d; \end{aligned}$$

(c) 给定 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, F_i \in \mathcal{S}^m, i = 0, 1, \cdots, n$，考虑优化问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad (Ax+b)^{\mathrm{T}} F(x)^{-1}(Ax+b), \quad \text{s.t.} \quad F(x) \succ 0,$$

其中 $F(x) = F_0 + x_1F_1 + x_2F_2 + \cdots + x_nF_n$.

解 (邓展望). 同 **4.8** 题的分析方法，具体形式略. □

4.11 对于对称矩阵 $C \in \mathcal{S}^n$，记其特征值分解为 $C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^{\mathrm{T}}$，假设

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m > 0 > \lambda_{m+1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n,$$

考虑如下半定规划问题:

$$\begin{aligned} \min_{X\in\mathcal{S}^n} \quad & \langle C, X\rangle, \\ \text{s.t.} \quad & u_i^{\mathrm{T}} X u_i = 0, i = m+1, m+2, \cdots, n, \\ & X \succeq 0. \end{aligned}$$

试给出该问题最优解的表达式.

解 (俞建江). 考虑

$$\langle C, X\rangle = \mathrm{Tr}(C^{\mathrm{T}} X),$$

再由约束条件，可推出 $\mathrm{Tr}(X) = 0$ 和 $X = 0$. □

4.12 如果在最大割问题 (4.5.6) 中，约束 $x_j \in \{-1, 1\}$ 改为 $x_j \in \{0, 1\}$，即对应优化问题

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2}\sum_{i<j} w_{ij}(1 - x_i x_j), \\ \text{s.t.} \quad & x_j \in \{0, 1\},\ j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

试给出其一个半定规划松弛.

解 (俞建江). 考虑作某变换 $y = h(x)$ 将题目中问题的形式转化为标准的半定规划原问题形式，类似 (4.5.5) 和 (4.5.6) 进行松弛. □

4.13 对于非负矩阵分解问题

$$\min_{X\in\mathbb{R}^{d\times p}, Y\in\mathbb{R}^{p\times n}} \quad \|A-XY\|_F^2, \quad \text{s.t.} \quad X\geqslant 0, Y\geqslant 0,$$

其中矩阵 $A\in\mathbb{R}^{d\times n}$ 是已知的. 证明: 在上面优化问题中添加约束 $YY^{\mathrm{T}}=I$, 其可以写成 K-均值聚类问题.

解 (邓展望). 利用 $Y\geqslant 0$ 和正交性可知 Y 每一行只有一个元素为 1, 其余为 0, 满足一类特殊的均值聚类模型. □

第五章　最优性理论

5.1 考虑优化问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad x^{\mathrm{T}}Ax + 2b^{\mathrm{T}}x,$$

其中 $A\in\mathcal{S}^n$，$b\in\mathbb{R}^n$. 为了保证该问题最优解存在，A,b 需要满足什么性质？

解 (邓展望). A,b 需要满足 A 为半正定矩阵并且 $b\in\mathcal{R}(A)$. □

5.2 试举例说明对无约束光滑优化问题，二阶必要条件不是充分的，二阶充分条件也不是必要的（见定理 5.4).

解 (陈铖). 举例某类多项式函数. □

5.3 证明下列锥是自对偶锥：

(a) 半正定锥 $\{X \mid X\succeq 0\}$（全空间为 $\mathcal{S}^n$）；

(b) 二次锥 $\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid t\geqslant \|x\|_2\}$ （全空间为 $\mathbb{R}^{n+1}$).

解 (陈铖).

(a) 等价于证明 Y 对于任意半正定矩阵 X 有 $\langle X,Y\rangle\geqslant 0$ 成立 $\Leftrightarrow$ Y 是半正定矩阵.

(b) 令 $\mathcal{I}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid t\geqslant\|x\|_2\}$，证明

$$(x',t')\in\mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad \langle x',x\rangle + t't\geqslant 0, \forall (x,t)\in\mathcal{I}.$$

$\Rightarrow$：利用柯西-施瓦茨不等式.
$\Leftarrow$：利用柯西-施瓦茨不等式反证. □

5.4 考虑优化问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad x^{\mathrm{T}}Ax + 2b^{\mathrm{T}}x, \quad \text{s.t.} \quad \|x\|_2 \leqslant \varDelta,$$

其中 $A \in \mathcal{S}_{++}^n$，$b \in \mathbb{R}^n$，$\varDelta > 0$. 求出该问题的最优解.

解 (陈铖). 验证满足 Slater 条件，利用 KKT 条件写出最优解满足的必要条件. □

5.5 考虑函数 $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$，求出其所有一阶稳定点，并判断它们是否为局部最优点 (极小或极大)、鞍点或全局最优点?

解 (陈铖). $(0,0)$ 和 $(-1,-1)$ 是全局最优点，$(-0.5,-0.5)$ 是鞍点. □

5.6 给出下列优化问题的显式解:

(a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad c^{\mathrm{T}}x, \quad \text{s.t.} \quad Ax = b$，其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$b \in \mathbb{R}^m$;

(b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|x\|_2, \quad \text{s.t.} \quad Ax = b$;

(c) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad c^{\mathrm{T}}x, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}^{\mathrm{T}}x = 1,\ x \geqslant 0$;

(d) $\min\limits_{X\in\mathbb{R}^{m\times n}} \quad \|X\|_* + \dfrac{1}{2}\|X - Y\|_F^2$，其中 $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是已知的.

解 (陈铖，邓展望).

(a) 将 $Ax = b$ 的解分解为特解和对应齐次方程解的形式，讨论齐次方程的解的存在性.

(b) 构造拉格朗日函数，由 KKT 条件求出全局最优解. 若 A 不是行满秩的，参考上一小节.

(c) 设 i 为 c 的最小分量的下标，则 $x = e_i$，即 x 为第 i 个分量为 1 的单位向量.

(d) 利用 Y 和 X 的奇异值分解和正交变换的性质将原问题中的矩阵替换成它们对应的奇异值矩阵. □

5.7 计算下列优化问题的对偶问题.

(a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|x\|_1, \quad \text{s.t.} \quad Ax = b$;

(b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|Ax-b\|_1$;

(c) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|Ax-b\|_\infty$;

(d) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \quad x^\mathrm{T}Ax+2b^\mathrm{T}x, \quad \text{s.t.} \quad \|x\|_2^2 \leqslant 1$, 其中 A 为正定矩阵.

解 (陈铖). 构造拉格朗日函数，对拉格朗日函数取极小，即可得到对偶问题.

(a) 对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -b^\mathrm{T}\lambda, \\
\text{s.t.} \quad & \|A^\mathrm{T}\lambda\|_\infty \leqslant 1.
\end{aligned}
$$

(b) 对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -b^\mathrm{T}\lambda, \\
\text{s.t.} \quad & \|\lambda\|_\infty \leqslant 1, \\
& A^\mathrm{T}\lambda = 0.
\end{aligned}
$$

(c) 对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -b^\mathrm{T}(\lambda_1+\lambda_2), \\
\text{s.t.} \quad & A^\mathrm{T}(\lambda_1+\lambda_2) = 0, \\
& -\lambda_1^\mathrm{T}\mathbf{1}+\lambda_2^\mathrm{T}\mathbf{1}+1 = 0.
\end{aligned}
$$

(d) 对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -b^\mathrm{T}(A+\lambda I)^{-1}b-\lambda, \\
\text{s.t.} \quad & \lambda \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

□

5.8 如下论断正确吗？为什么？

对等式约束优化问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x), \\
\text{s.t.} \quad & c_i(x) = 0, \ i \in \mathcal{E}.
\end{aligned}
$$

考虑与之等价的约束优化问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x), \\
\text{s.t.} \quad & c_i^2(x) = 0, \ i \in \mathcal{E}.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

设 $x^\sharp$ 是上述问题的一个 KKT 点，根据 (5.5.8) 式，$x^\sharp$ 满足

$$
\begin{aligned}
&0 = \nabla f(x^\sharp) + 2\sum_{i\in\mathcal{E}} \lambda_i^\sharp c_i(x^\sharp)\nabla c_i(x^\sharp),\\
&0 = c_i(x^\sharp), \quad i\in\mathcal{E},
\end{aligned}
$$

其中 $\lambda_i^\sharp$ 是相应的拉格朗日乘子. 整理上式得 $\nabla f(x^\sharp)=0$. 这说明对等式约束优化问题，我们依然能给出类似无约束优化问题的最优性条件.

解 (邓展望). 不正确. KKT 条件所需的约束品性不满足. □

5.9 证明：若在点 x 处线性约束品性（见定义 5.11）满足，则有 $T_{\mathcal{X}}(x)=\mathcal{F}(x)$.

解 (陈铖). 只需证明 $\mathcal{F}(x)\subseteq T_{\mathcal{X}}(x)$. 取 $z_k = x + t_k d$，$\{t_k\}$ 为一组正标量且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$，证明 $z_k\in\mathcal{X}$. □

5.10 考虑优化问题

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^2} \quad & x_1,\\
\text{s.t.} \quad & 16-(x_1-4)^2-x_2^2 \geqslant 0,\\
& x_1^2+(x_2-2)^2-4=0.
\end{aligned}
$$

求出该优化问题的 KKT 点，并判断它们是否是局部极小点、鞍点以及全局极小点?

解 (陈铖). 局部极小点包括 $(0,0)$ 和 $(\frac{8}{5},\frac{16}{5})$，全局极小点是 $(0,0)$. 所有的 KKT 点均非鞍点. □

5.11 考虑对称矩阵的特征值问题

$$
\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad x^{\mathrm{T}}Ax, \quad \text{s.t.} \quad \|x\|_2=1,
$$

其中 $A\in\mathcal{S}^n$. 试分析其所有的局部极小点、鞍点以及全局极小点.

解 (陈铖). 考虑 A 的特征值分解 $A=Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，令 $y=Q^{\mathrm{T}}x$，则原问题等价于

$$
\min_{y\in\mathbb{R}^n} \quad y^{\mathrm{T}}\Lambda y, \quad \text{s.t.} \quad \|y\|_2=1,
$$

然后利用等价问题的海瑟矩阵判定鞍点、局部极小点和全局极小点.
□

5.12 类似于线性规划问题，试分析半定规划 (5.4.20) 与其对偶问题 (5.4.21) 的最优值的关系（强对偶性什么时候成立，什么时候失效）.

解 (陈铖). (a) $-\infty < p^* < \infty$ 时强对偶原理成立，$p^* = d^*$，对偶问题有可行解且有最优解.

(b) $p^* = -\infty$ 时对偶问题不可行.

(c) $p^* = \infty$ 时无法断定对偶问题是无上界还是无可行解，且对偶问题无最优解. □

5.13 在介绍半定规划问题的最优性条件时，我们提到互补松弛条件可以是 $\langle X, S\rangle = 0$ 或 $XS = 0$，证明这两个条件是等价的，即对 $X \succeq 0$ 与 $S \succeq 0$ 有

$$\langle X, S\rangle = 0 \leftrightarrow XS = 0.$$

提示：证明 X 和 S 可以同时正交对角化且对应的特征值满足互补松弛条件.

解 (陈铖). 对 X 和 S 分别进行对角化 $X = Q\Lambda_1 Q^{\mathrm{T}}$，$S = R\Lambda_2 R^{\mathrm{T}}$，证明 $\langle X, S\rangle = 0$. □

5.14 考虑等式约束的最小二乘问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|Ax - b\|_2^2, \quad \text{s.t.} \quad Gx = h,$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(A) = n$，$G \in \mathbb{R}^{p\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(G) = p$.

(a) 写出该问题的对偶问题；

(b) 给出原始问题和对偶问题的最优解的显式表达式.

解 (陈铖). (a) 构造拉格朗日函数，对变量 x 取极小可得对偶问题.

(b) 原始问题最优解由 KKT 条件解出，对偶问题的最优解直接给出. □

5.15 考虑优化问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad x^{\mathrm{T}}Ax + 2b^{\mathrm{T}}x, \quad \text{s.t.} \quad \|x\|_2 \leqslant 1,$$

其中 $A \in \mathcal{S}^n$，$b \in \mathbb{R}^n$. 写出该问题的对偶问题，以及对偶问题的对偶问题.

解 (陈铖). 利用对偶问题的定义. □

5.16 考虑支持向量机问题

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n,\xi} \quad & \frac{1}{2}\|x\|_2^2+\mu\sum_{i=1}^m \xi_i, \\ \text{s.t.} \quad & b_i a_i^{\mathrm{T}} x \geqslant 1-\xi_i,\ i=1,2,\cdots,m, \\ & \xi_i \geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m, \end{aligned}$$

其中 $\mu>0$ 为常数且 $b_i\in\mathbb{R}$, $a_i\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2,\cdots,m$ 是已知的. 写出该问题的对偶问题.

解 (陈铖). 利用对偶问题的定义. □

5.17 考虑优化问题

$$\min_{x\in\mathbb{R},y>0} \quad e^{-x}, \quad \text{s.t.} \quad \frac{x^2}{y}\leqslant 0.$$

(a) 证明这是一个凸优化问题，求出最小值并判断 Slater 条件是否成立；

(b) 写出该问题的对偶问题，并求出对偶问题的最优解以及对偶间隙.

解 (丁思哲).

(a) 目标和约束函数均是凸函数，因此是凸优化问题.
最小值是 $x=0$，Slater 条件不成立.

(b) 原问题等价于

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \quad e^{-x}, \quad \text{s.t.} \quad x=0,$$

其对偶问题的最优解为 $v=1$，对偶间隙为 0. □

5.18 考虑优化问题

$$\min_{Z\in\mathbb{R}^{n\times q},V\in\mathbb{R}^{q\times p}} \quad \|X-ZV\|_F^2, \quad \text{s.t.} \quad V^{\mathrm{T}}V=I, \quad Z^{\mathrm{T}}\mathbf{1}=0,$$

其中 $X\in\mathbb{R}^{n\times p}$. 请给出该优化问题的解.

解 (邓展望). 解不唯一. 利用 KKT 条件，一组解满足

$$ZV=X-\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\frac{X}{n}.$$ □

第六章　无约束优化算法

6.1 设 $f(x)$ 是连续可微函数，d^k 是一个下降方向，且 $f(x)$ 在射线 $\{x^k + \alpha d^k \mid \alpha > 0\}$ 上有下界．求证：当 $0 < c_1 < c_2 < 1$ 时，总是存在满足 Wolfe 准则 (6.1.4a) (6.1.4b) 的点.并举一个反例说明当 $0 < c_2 < c_1 < 1$ 时，满足 Wolfe 准则的点可能不存在.

解 (谢中林)．利用 $\phi(\alpha) = f(x^k + \alpha d^k)$ 在 $\alpha = 0$ 处的一阶泰勒展开和(**??**)证明. $\square$

6.2 f 为正定二次函数 $f(x) = \dfrac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax + b^{\mathrm{T}}x$，$d^k$ 为下降方向，x^k 为当前迭代点．试求出精确线搜索步长

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha>0} f(x^k + \alpha d^k),$$

并由此推出最速下降法的步长满足 (6.2.2) 式（见定理 6.2).

解 (谢中林)．$f(x^k + \alpha d^k)$ 关于 α 强凸，利用一阶条件可以导出精确线搜索步长. $\square$

6.3 利用定理 6.5 证明推论 6.2.

解 (谢中林)．只说明 (2) 的证明思路. 注意到 $\alpha_i\|g^i\|$ 是常数, 且 $\|g^i\| \leqslant G$ 可对 $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\alpha_i$ 建立估计. $\square$

6.4 考虑非光滑函数

$$f(x) = \max_{1\leqslant i\leqslant K} x_i + \frac{1}{2}\|x\|^2,$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$，$K \in [1, n]$ 为一个给定的正整数.

(a) 求出 $f(x)$ 的最小值点 x^* 和对应的函数值 f^*；

(b) 证明 $f(x)$ 在区域 $\{x \mid \|x\| \leqslant R \overset{\text{def}}{=\!=} 1/\sqrt{K}\}$ 上是 G-利普希茨连续的，其中 $G = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{K}}$；

(c) 设初值 $x^0 = 0$，考虑使用次梯度算法 (6.3.1) 对 $\min f(x)$ 进行求解，其中 x 处的次梯度取为 $g = x + e_j$，j 为使得 $x_j = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant K} x_i$ 成立的最小整数，步长 α_k 可任意选取，证明：在 k（$k < K$）次迭代后，

$$\hat{f}^k - f^* \geqslant \frac{GR}{2(1+\sqrt{K})},$$

其中 $\hat{f}^k$ 的定义和定理 6.5 相同．并根据此例子推出次梯度算法的收敛速度 $\mathcal{O}\left(\dfrac{GR}{\sqrt{K}}\right)$ 是不能改进的.

解 (谢中林).

(a) 最小值点为

$$x_i^* = -\frac{1}{K}, i = 1, \ldots, K; \quad x_i^* = 0, i = K+1, \ldots, n.$$

(b) 只需注意对 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant K} x_i$ 取合适的放缩估计.

(c) 利用 x^k 的具体取值和 $f(x^k)$、f^* 的表达式进行放缩估计. □

6.5 考虑非平方 ℓ_2 正则项优化问题

$$\min \quad f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \mu\|x\|_2,$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，注意这个问题并不是岭回归问题.

(a) 若 A 为列正交矩阵，即 $A^{\mathrm{T}}A = I$，利用不可微函数的一阶最优性条件求出该优化问题的显式解；

(b) 对一般的 A 我们可以使用迭代算法来求解这个问题．试设计出不引入次梯度的一种梯度类算法求解该优化问题．提示：$f(x)$ 仅在一点处不可导，若这个点不是最小值点，则次梯度算法和梯度法等价.

解 (谢中林).

(a) $\|A^{\mathrm{T}}b\|_2 > \mu$ 时，存在唯一最优解

$$x = \left(1 - \frac{\mu}{\|A^{\mathrm{T}}b\|_2}\right) A^{\mathrm{T}}b.$$

$\mu \geqslant \|A^{\mathrm{T}}b\|_2$ 时，$x = 0$ 是最优解.

(b) $\mu < \|A^{\mathrm{T}}b\|_2$ 时证明 $x = 0$ 不是 $g_\lambda(x)$ 的最小值点即可. □

6.6 设函数 $f(x) = \|x\|^\beta$，其中 $\beta > 0$ 为给定的常数. 考虑使用经典牛顿法 (6.4.2) 对 $f(x)$ 进行极小化，初值 $x^0 \neq 0$. 证明：

(a) 若 $\beta > \dfrac{3}{2}$ 且 $\beta \neq 2$，则 x^k 收敛到 0 的速度为 Q-线性的；

(b) 若 $0 < \beta < 1$，则牛顿法发散；

(c) 试解释定理 6.6 在 (a) 中不成立的原因.

解 (谢中林).

(a) 利用牛顿方程考察 $\dfrac{\|x+d\|^2}{\|x\|^2}$ 的值.

(b) 同上.

(c) 利用 $f(x)$ 的海瑟矩阵证明. □

6.7 设矩阵 A 为 n 阶对称矩阵，d^k 为给定的非零向量. 若对任意满足 $\|d\| = \|d^k\|$ 的 $d \in \mathbb{R}^n$，均有 $(d - d^k)^{\mathrm{T}}A(d - d^k) \geqslant 0$，证明：$A$ 是半正定矩阵.

解 (谢中林). 利用半正定矩阵的定义，考虑设 $d = d^k + \alpha x$ 证明. □

6.8 设 $f(x)$ 为正定二次函数，且假定在迭代过程中 $(s^k - H^k y^k)^{\mathrm{T}} y^k > 0$ 对任意的 k 均满足，其中 H^k 由 SR1 公式 (6.5.10) 产生的拟牛顿矩阵. 证明：

$$H^k y^j = s^j, \quad j = 0, 1, \cdots, k-1,$$

其中 k 是任意给定的整数. 这个结论说明对于正定二次函数，SR1 公式产生的拟牛顿矩阵在当前点处满足割线方程，且历史迭代产生的 (s^j, y^j) 也满足割线方程.

解 (谢中林). 利用归纳法证明. □

6.9 仿照 BFGS 公式的推导过程, 利用待定系数法推导 DFP 公式 (6.5.15).

解 (谢中林). 设出 DFP 的秩二修正:

$$H^{k+1} = H^k + auu^{\mathrm{T}} + bvv^{\mathrm{T}},$$

代入割线方程推导出各系数. □

6.10 考虑共轭梯度法中的 Hestenes-Stiefel (HS) 格式

$$d^{k+1} = -\nabla f(x^{k+1}) + \frac{\nabla f(x^{k+1})^{\mathrm{T}} y^k}{(y^k)^{\mathrm{T}} d^k} d^k,$$

其中 y^k 的定义如 (6.5.13) 式. 假设在迭代过程中 d^k 均为下降方向且精确搜索条件 $\nabla f(x^{k+1})^{\mathrm{T}} d^k = 0$ 满足, 试说明 HS 格式可看成是某一种特殊的拟牛顿方法. *提示: 将 HS 格式改写为拟牛顿迭代格式, 并根据此格式构造另一个拟牛顿矩阵使其满足割线方程 (6.5.4), 注意拟牛顿矩阵需要满足对称性和正定性.*

解 (谢中林). 在题设给出的更新中对矩阵加入对称项并满足割线方程, 证明其正定性. □

6.11 证明等式 (6.5.20).

解 (谢中林). 考虑利用分块矩阵初等变换, 对向量 u, v, x, y, 计算 $\det(I + uv^{\mathrm{T}} + xy^{\mathrm{T}})$. □

6.12 设 $m(d)$ 为具有如下形式的二次函数:

$$m(d) = g^{\mathrm{T}} d + \frac{1}{2} d^{\mathrm{T}} B d,$$

其中 B 为对称矩阵, 证明以下结论:

(a) $m(d)$ 存在全局极小值当且仅当 B 半正定且 g 在 B 的值空间中; 若 B 半正定, 则满足 $Bd = -g$ 的 d 均为 $m(d)$ 的全局极小值点;

(b) $m(d)$ 的全局极小值唯一当且仅当 B 严格正定.

解 (谢中林).

(a) 充分性：对于任取的 w 考虑 $m(d+w)$ 和 $m(d)$ 的关系.
必要性：利用一阶最优性条件和二阶最优必要条件证明.

(b) 充分性：考虑利用 (a) 中的结论.
必要性：利用反证法证明. □

6.13 (小样本问题) 设 $J(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为最小二乘问题 (6.7.1) 中 $r(x)$ 在点 x 处的雅可比矩阵，其中 $m \ll n$. 设 $J(x)$ 行满秩，证明：

$$\hat{d} = -J(x)^{\mathrm{T}}(J(x)J(x)^{\mathrm{T}})^{-1}r(x)$$

给出了高斯 - 牛顿方程 (6.7.3) 的一个 ℓ_2 范数最小解.

解 (谢中林). 考虑证明解 d 满足 $\hat{d} \leqslant d$. 进一步可证 $(d-\hat{d})^{\mathrm{T}}\hat{d} \geqslant 0$. □

第七章　约束优化算法

7.1 构造一个等式约束优化问题，使得它存在一个局部极小值，但对于任意的 $\sigma > 0$，它的二次罚函数是无界的.

解 (谢中林). 例如

$$\min_{x,y} \quad -e^x, \quad \text{s.t. } x^2 + y^2 = 1. \qquad \square$$

7.2 考虑等式约束优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1x_2x_3, \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 60. \end{aligned}$$

使用二次罚函数求解该问题，当固定罚因子 σ_k 时，写出二次罚函数的最优解 x^{k+1}. 当 $\sigma_k \to +\infty$ 时，写出该优化问题的解并求出约束的拉格朗日乘子. 此外，当罚因子 σ 满足什么条件时，二次罚函数的海瑟矩阵 $\nabla^2_{xx} P_E(x, \sigma)$ 是正定的?

解 (谢中林). 需要首先讨论问题是否存在最优解. 由于原问题和罚问题均无界，因此我们只能讨论局部最优解的存在性.

利用罚问题的最优性条件，该优化问题的局部最优解为:

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 10, \quad x_3 = \frac{20}{3},$$

拉格朗日乘子为 $-\dfrac{200}{3}$.
再由 $\nabla^2_{xx} P_E(x(\sigma), \sigma)$ 的正定性确定 σ 的值. $\square$

7.3 考虑等式约束优化问题

$$\min \quad f(x), \quad \text{s.t.} \quad c_i(x) = 0, \ i \in \mathcal{E},$$

定义一般形式的罚函数

$$P_E(x,\sigma)=f(x)+\sigma\sum_{i\in\mathcal{E}}\varphi(c_i(x)),$$

其中 $\varphi(t)$ 是充分光滑的函数，且 $t=0$ 是其 s 阶零点（$s\geqslant 2$），即

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\cdots=\varphi^{(s-1)}(0)=0,\quad \varphi^{(s)}(0)\neq 0.$$

设 x^k,σ_k 的选取方式和算法 7.1 的相同，且 $\{x^k\}$ 存在极限 x^*，在点 x^* 处 LICQ （见定义 5.9）成立.

(a) 证明: $\sigma_k(c_i(x^k))^{s-1}$, $\forall\, i\in\mathcal{E}$ 极限存在, 其极限 λ_i^* 为约束 $c_i(x^*)=0$ 对应的拉格朗日乘子;

(b) 求 $P_E(x,\sigma)$ 关于 x 的海瑟矩阵 $\nabla^2_{xx}P_E(x,\sigma)$;

(c) 设在 (a) 中 $\lambda_i^*\neq 0$, $\forall\, i\in\mathcal{E}$, 证明: 当 $\sigma_k\to+\infty$ 时, $\nabla^2_{xx}P_E(x^k,\sigma_k)$ 有 m 个特征值的模长与 $\sigma_k^{1/(s-1)}$ 同阶，其中 $m=|\mathcal{E}|$.

解 (陈铖，丁思哲).

(a) 利用定理 7.2.

(b) 海瑟矩阵为

$$\begin{aligned}\nabla^2_{xx}P_E(x,\sigma)= \quad & \nabla^2_{xx}f(x)+\sigma\sum_{i\in\mathcal{E}}\varphi'(c_i(x))\nabla^2_{xx}c_i(x)\\ & +\sigma\sum_{i\in\mathcal{E}}\varphi''(c_i(x))\nabla_x c_i(x)\nabla_x c_i(x)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

(c) 考虑 k 较大时用拉格朗日函数近似海瑟矩阵的前 2 项，利用泰勒展开分析海瑟矩阵的阶数. □

7.4 考虑不等式约束优化问题 (7.1.12)，其中 f 在可行域 $\mathcal{X}$ 上有下界，现使用对数罚函数法进行求解（算法 7.4）. 假设在算法 7.4 的每一步子问题能求出罚函数的全局极小值点 x^{k+1}，证明：算法 7.4 在有限次迭代后终止，或者

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k\sum_{i\in\mathcal{I}}\ln(-c_i(x^{k+1}))=0,$$

并且

$$\lim_{k\to\infty}f(x^k)=\inf_{x\in\mathbf{int}\mathcal{X}}f(x).$$

解 (谢中林). 若算法不能在有限步终止，利用下确界的性质分别证明等式成立. 应注意讨论对数罚函数中约束函数的取值. □

7.5 考虑一般约束优化问题 (7.1.15)，现在针对等式约束使用二次罚函数，对不等式约束使用对数罚函数：

$$P(x,\sigma) = f(x) + \frac{\sigma}{2}\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x) - \frac{1}{\sigma}\sum_{i\in\mathcal{I}} \ln(-c_i(x)),$$

其中 $\mathbf{dom}\, P = \{x \mid c_i(x) < 0,\ i \in \mathcal{I}\}$. 令罚因子 $\sigma_k \to +\infty$，定义

$$x^{k+1} = \arg\min_x P(x, \sigma_k).$$

假定涉及的所有函数都是连续的，$\{x \mid c_i(x) \leqslant 0,\ i \in \mathcal{I}\}$ 是有界闭集，x^* 为问题 (7.1.15) 的解. 试证明如下结论：

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} P(x^{k+1}, \sigma_k) = f(x^*)$;

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} \sigma_k \sum\limits_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x^{k+1}) = 0$;

(c) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sigma_k} \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} \ln(-c_i(x^{k+1})) = 0$.

解 (陈铖、丁思哲). (a) 利用 $P(x^{k+1}, \sigma_k) \geqslant f(x^*)$ 和 $P(x^{k+1}, \sigma_k) \leqslant P(x^*, \sigma_k)$ 证明.

(c) 考虑构造固定罚因子且罚函数为对数函数的新函数，对新函数再构造二次罚函数，由二次罚函数的收敛性证明.

(b) 由 (a) 和 (c) 推导 (b) 成立. □

7.6 (Morrison 方法) 考虑等式约束优化问题 (7.1.1)，设其最优解为 x^*. 令 M 是最优函数值 $f(x^*)$ 的一个下界估计（即 $M \leqslant f(x^*)$），构造辅助函数

$$v(M, x) = [f(x) - M]^2 + \sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x),$$

Morrison 方法的迭代步骤如下：

$$x^k = \arg\min_x\ v(M_k, x),$$

$$M_{k+1} = M_k + \sqrt{v(M_k, x^k)}.$$

试回答以下问题：

(a) 证明：$f(x^k) \leqslant f(x^*)$；

(b) 若 $M_k \leqslant f(x^*)$，证明：$M_{k+1} \leqslant f(x^*)$；

(c) 证明：$\lim\limits_{k\to\infty} M_k = f(x^*)$；

(d) 求 $v(M,x)$ 关于 x 的海瑟矩阵，并说明 Morrison 方法和算法 7.1 的联系.

解 (丁思哲).

(a) 从 $f(x^k) > f(x^*)$ 时 $v(M,x^*)$ 和 $v(M,x^k)$ 的比较可以推出矛盾.

(b) 利用 $v(M_k,x^k) \leqslant v(M_k,x^*)$.

(c) 先证明 $\lim\limits_{k\to\infty} M_k$ 存在，然后在题设式中令 $k\to\infty$.

(d) 海瑟矩阵略. Morrison 方法在 k 足够大时，相当于对问题

$$\min_x \{|f(x)-f(x^*)|^2 + 2\sum_{i\in\mathcal{E}} c_i^2(x)\}$$

使用算法 7.1 求解. □

7.7 考虑不等式约束优化问题

$$\min \quad f(x), \quad \text{s.t.} \quad c_i(x) \leqslant 0,\ i\in\mathcal{I}.$$

(a) 定义函数 $F(x) = \sup\limits_{\lambda_i\geqslant 0}\left\{f(x)+\sum\limits_{i\in\mathcal{I}}\lambda_i c_i(x)\right\}$，证明：原问题等价于无约束优化问题 $\min\limits_x F(x)$；

(b) 定义函数

$$\hat{F}(x,\lambda^k,\sigma_k) = \sup_{\lambda_i\geqslant 0}\left\{f(x)+\sum_{i\in\mathcal{I}}\lambda_i c_i(x) - \frac{\sigma_k}{2}\sum_{i\in\mathcal{I}}(\lambda_i-\lambda_i^k)^2\right\},$$

求 $\hat{F}(x,\lambda^k,\sigma_k)$ 的显式表达式；

(c) 考虑如下优化算法：

$$\begin{aligned} x^k &= \arg\min_x \hat{F}(x,\lambda^k,\sigma_k), \\ \lambda^{k+1} &= \arg\max_{\lambda\geqslant 0}\left\{\sum_{i\in\mathcal{I}}\lambda_i c_i(x^k) - \frac{\sigma_k}{2}\sum_{i\in\mathcal{I}}(\lambda_i-\lambda_i^k)^2\right\}, \\ \sigma_{k+1} &= \min\{\rho\sigma_k,\bar{\sigma}\}, \end{aligned}$$

试说明其与算法 7.5 的区别和联系.

解 (丁思哲). (a) 利用原问题的广义拉格朗日函数证明，注意对 x 取值的讨论.

(b) 适当取 λ_i 的值，使得 $\hat{F}(x,\lambda^k,\sigma_k)$ 取极值.

(c) 迭代格式中的 $1/\sigma_k$ 对应与算法 7.5 中的 σ_k. □

7.8 对于 LASSO 问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2+\mu\|x\|_1,$$

写出该问题及其对偶问题的增广拉格朗日函数法.

解 (丁思哲).

LASSO 问题的增广拉格朗日函数法为

$$\begin{aligned}
\left(x^{k+1},z^{k+1}\right) &= \underset{x,z}{\operatorname{argmin}}\left\{L_{\sigma_k}\left(x,z,\lambda^k\right)\right\},\\
\lambda^{k+1} &= \lambda^k+\sigma_k\left(Ax^{k+1}-z^{k+1}\right),\\
\sigma_{k+1} &= \rho\sigma_k,\quad \sigma_k\uparrow\sigma_\infty<\infty.
\end{aligned}$$

LASSO 对偶问题的增广拉格朗日函数法为

$$\begin{aligned}
\left(y^{k+1},s^{k+1}\right) &= \arg\min_{y,s}\left\{L_{\sigma_k}\left(y,s;\lambda^k\right)\right\},\\
\lambda^{k+1} &= \lambda^k+\sigma_k\left(A^{\mathrm{T}}y^{k+1}-s^{k+1}\right),\\
\sigma_{k+1} &= \rho\sigma_k,\quad \sigma_k\uparrow\sigma_\infty\leqslant\infty.
\end{aligned}$$

□

7.9 考虑线性规划问题

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad c^{\mathrm{T}}x,\quad \text{s.t.}\quad Ax=b,\ x\geqslant 0.$$

(a) 写出该问题及其对偶问题的增广拉格朗日函数法；

(b) 分析有限终止性.

解 (丁思哲).

(a) 方法同上.

(b) 仿照证明基追踪问题的增广拉格朗日函数法有限终止性的思路.

□

7.10 证明：方程 (7.3.5) 的系数矩阵非奇异当且仅当 A 是行满秩的.

解 (丁思哲).
($\Leftarrow$) 证明 $AL_s^{-1}L_xA^{\mathrm{T}}$ 正定.
($\Rightarrow$) 利用方程有解且唯一得到某系数矩阵为 $AL_s^{-1}L_xA^{\mathrm{T}}$ 的线性方程组也有唯一解. □

7.11 给出求解方程 (7.3.5)（即内点法线性系统子问题）的详细过程.

解 (邓展望). 解题设的方程组即可. □

7.12 对线性规划问题 (7.3.1) 中的原始问题 (P)，构造带等式约束的内点罚函数子问题

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}}x - \tau\sum_{i=1}^{n}\ln x_i, \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \end{aligned}$$

其中 $\tau > 0$ 为罚因子. 试说明求解该问题等价于求解中心路径方程 (7.3.8)，并且进一步说明当 $\tau \to 0$ 时，该问题的解收敛于满足 KKT 方程 (7.3.2) 的点.

解 (邓展望). 考虑带等式约束的内点罚函数子问题的 KKT 条件，其与 (7.3.8) 的 KKT 条件是等价的. □

7.13 详细说明在算法 7.7 中如何选取最大的 α 使得 $\alpha \in \mathcal{N}_{-\infty}(\gamma)$.

解 (邓展望). α 的取值是不等式

$$x_i^k s_i^k + \alpha(x_i^k \Delta s_i^k + s_i^k \Delta x_i^k) + \alpha^2(\Delta s_i^k \Delta x_i^k) \geqslant \gamma\mu$$

的解集与 $[0,1]$ 的交集中最对 $\forall i$ 满足的最大的 α_k. □

7.14 考虑部分变量为自由变量（即无非负约束）的线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & c^{\mathrm{T}}x + d^{\mathrm{T}}y, \\ \text{s.t.} \quad & A_1x + A_2y = b, \\ & x \geqslant 0, \end{aligned}$$

在这里注意变量 y 没有非负约束. 试推导求解此问题的原始 – 对偶算法，给出类似于 (7.3.5) 式的方程组并给出其解的显式表达式.

解 (邓展望). 参考 7.3.4 - 7.3.5 的转化方式, 利用扰动 KKT 方程求出牛顿方程, 并给出解. □

第八章　复合优化算法

8.1 证明例 8.1 中的 (3)(4) 的邻近算子的形式.

解 (丁思哲).

(3) 邻近算子为 $u = (I + tA)^{-1}(x - tb)$(注意 A 对称正定).

(4) 邻近算子的分量为 $u_i = \dfrac{x_i + \sqrt{x_i^2 + 4t}}{2}$. □

8.2 证明例 8.2 中的运算法则成立.

解 (丁思哲). 　证明等式两边各自的最优性条件相同. □

8.3 求下列函数的邻近算子:

(a) $f(x) = I_C(x)$，其中 $C = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} | \|x\|_2 \leqslant t\}$;

(b) $f(x) = \inf\limits_{y \in C} \|x - y\|$，其中 C 是闭凸集;

(c) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\inf\limits_{y \in C} \|x - y\|)^2$，其中 C 是闭凸集.

解 (丁思哲).

(a) $u = \mathcal{P}_{\|x\|_2 \leqslant t}(x)$.

(b) 若 C 是闭凸集且 $\|x - \mathcal{P}_C(x)\| > 1$，则 $u = x + \dfrac{\mathcal{P}_C(x) - x}{\|\mathcal{P}_C(x) - x\|}$；反之则 $u = \mathcal{P}_C(x)$.

(c) $u = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\mathcal{P}_C(x)$. □

8.4 对矩阵函数我们也可类似地定义邻近算子，只需将向量版本中的 ℓ_2 范数替换为 F 范数，即

$$\operatorname{prox}_f(X) = \mathop{\arg\min}_{U \in \mathbf{dom}\, f} f(U) + \frac{1}{2}\|U - X\|_F^2.$$

试求出如下函数的邻近算子表达式：

(a) $f(U) = \|U\|_1$，其中 $\mathbf{dom}\, f = \mathbb{R}^{m \times n}$；

(b) $f(U) = -\ln\det(U)$，其中 $\mathbf{dom}\, f = \{U \mid U \succ 0\}$，这里邻近算子的自变量 X 为对称矩阵（不一定正定）；

(c) $f(U) = I_C(U)$，其中 $C = \{U \in \mathcal{S}^n \mid U \succeq 0\}$；

(d) $f(U) = \|U\|_*$，其中 $\mathbf{dom}\, f = \mathbb{R}^{m \times n}$.

解（丁思哲）. (a) 利用矩阵形式的最优性条件证明.

(b) 利用补充定理[1]证明.

(c) 同上.

(d) 同上. □

8.5 对一般复合优化问题的加速算法（算法 8.9），试证明：

(a) 当 $t_k = \gamma_k \lambda_k$ 且 $h(x) = 0$ 时，算法 8.9 等价于第二类 Nesterov 加速算法；

(b) 当 $t_k = \lambda_k$ 时，算法 8.9 等价于近似点梯度法.

解（丁思哲）.

(a) 将条件代入算法 8.9，只需证明 $x^k = (1-\gamma_k)x^{k-1} + \gamma_k y^k$.

(b) 将条件代入算法 8.9，只需证明 $y^k = x^k$. □

8.6 假设 f 是闭凸函数，证明 Moreau 分解的成立，即

$$x = \operatorname{prox}_f(x) + \operatorname{prox}_{f^*}(x) \quad \forall x.$$

解（邓展望）. 由邻近算子的最优性条件和引理 8.5 的证明过程，推导 $\operatorname{prox}_{f^*}(x)$. □

[1] http://lcsl.mit.edu/data/silviavilla/Teaching_files/20141008_mit.pdf

8.7 假设 f 是闭凸函数，证明 Moreau 分解的推广成立，即对任意的 $\lambda > 0$ 有

$$x = \operatorname{prox}_{\lambda f}(x) + \lambda \operatorname{prox}_{\lambda^{-1} f^*}\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad \forall x.$$

提示：利用 Moreau 分解的结论.

解 (邓展望). 由 Moreau 分解的结论可知

$$\operatorname{prox}_{\lambda f}(x) = x - \operatorname{prox}_{\lambda f^*(\cdot/\lambda)}(x).$$

□

8.8 根据不等式 (8.5.23) 推导不等式 (8.5.24).

解 (丁思哲). 注意

$$2(x - x^{k+1})^{\mathrm{T}}(x^k - x^{k+1}) = \left\|x^k - x^{k+1}\right\|^2 + \left\|x - x^{k+1}\right\|^2 + \left\|x - x^k\right\|^2$$

(z 同理). □

8.9 写出关于 LASSO 问题的鞍点问题形式，并写出原始 – 对偶混合梯度算法和 Chambolle-Pock 算法.

解 (丁思哲). LASSO 鞍点问题的形式为

$$\min_x \max_z \left\{\mu \|x\|_1 + z^{\mathrm{T}} A x - \frac{1}{2}\|z\|_2^2 - b^{\mathrm{T}} z\right\}. \tag{8.1}$$

照此设计相应算法. LASSO 鞍点问题的形式不唯一. □

8.10 设函数 $f(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| - \min\{x_1, x_2\}$，其定义域为 $[0,1] \times [0,1]$. 试推导基于格式 (8.4.3) 的分块坐标下降法（x_1 和 x_2 分别看做一个变量块），此算法是否收敛?

解 (丁思哲). 函数可写成

$$f(x_1, x_2) = \frac{3}{2}|x_1 - x_2| - \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

将 x_1, x_2 视为 2 个变量块，进行分块下降，算法收敛. □

8.11 试对分组 LASSO 问题（即例 8.7）推导出基于格式 (8.4.4) 的分块坐标下降法.

解 (邓展望). 问题的形式为

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2+\mu_1\sum_{\ell=1}^{G}\sqrt{n_\ell}\|x_{\mathcal{I}_\ell}\|_2, \tag{8.2}$$

其中第 i 块变量为 x 的第 i 组分量. 据此设计分块下降算法. □

8.12 考虑最大割问题的非凸松弛

$$\begin{aligned} \min \quad & \left\langle C, V^{\mathrm{T}}V \right\rangle, \\ \text{s.t.} \quad & \|v_i\|=1,\ i=1,2,\cdots,n, \\ & V=[v_1,v_2,\cdots,v_n]\in\mathbb{R}^{p\times n}. \end{aligned}$$

仿照算法 8.12 的构造过程，推导出使用格式 (8.4.4) 的分块坐标下降法.

解 (丁思哲). 仿照算法 8.12 的构造，使用格式 (8.4.4) 设计算法. □

8.13 考虑约束优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \max\{e^{-x}+y, y^2\}, \\ \text{s.t.} \quad & y\geqslant 2, \end{aligned}$$

其中 $x,y\in\mathbb{R}$ 为自变量.

(a) 通过引入松弛变量 z，试说明该问题等价于

$$\begin{aligned} \min \quad & \max\{e^{-x}+y, y^2\}+I_{\mathbb{R}_+}(z), \\ \text{s.t.} \quad & y-z=2; \end{aligned}$$

(b) 推导 (a) 中问题的对偶问题，并求出原始问题的最优解;

(c) 对 (a) 中的问题形式，使用 ADMM 求解时可能会遇到什么问题?

解 (邓展望).

(a) 将条件 $z\geqslant 0$ 加在目标函数上.

(b) 最优解为 $z=0, x=\infty, y=2, \lambda=-4$.

(c) 若初始条件为 $z=0,\lambda=0$，ADMM 算法无法在下一步产生关于 (x,y) 的最小值点. □

8.14 写出对于线性规划对偶问题运用 ADMM 的迭代格式，以及与之等价的对于原始问题的 DRS 格式，并指出 ADMM 和 DRS 算法更新变量之间的关系.

解 (陈铖). ADMM 迭代格式略. 将上述问题改写为可分的凸问题的形式，进一步得到对偶问题，并据此设计 DRS 算法.
ADMM 算法与 DRS 算法中的变量存在一一对应的关系. □

8.15 相关系数矩阵逼近问题的定义为

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\|X-G\|_F^2, \\ \text{s.t.} \quad & X_{ii}=1, \quad i=1,2,\cdots,n, \\ & X \succeq 0. \end{aligned}$$

其中自变量 X 取值于对称矩阵空间 $\mathcal{S}^n$，G 为给定的实对称矩阵. 这个问题在金融领域中有重要的应用. 由于误差等因素，根据实际观测得到的相关系数矩阵的估计 G 往往不具有相关系数矩阵的性质（如对角线为 1，正定性），我们的最终目标是找到一个和 G 最接近的相关系数矩阵 X. 试给出满足如下要求的算法：

(a) 对偶近似点梯度法，并给出化简后的迭代公式；

(b) 针对原始问题的 ADMM ，并给出每个子问题的显式解.

解 (谢中林).

(a) 利用例 8.17 和习题 **8.4** 的结论.

(b) 原问题等价于

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\|X-G\|_F^2 + I_{C_1}(X) + I_{C_2}(Y), \\ \text{s.t.} \quad & X=Y. \end{aligned}$$

利用习题 **8.4** 的结论. □

8.16 鲁棒主成分分析问题是将一个已知矩阵 M 分解成一个低秩部分 L 和一个稀疏部分 S 的和，即求解如下优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \|L\|_* + \lambda\|S\|_1, \\ \text{s.t.} \quad & L+S=M, \end{aligned}$$

其中 L,S 均为自变量. 写出求解鲁棒主成分分析问题的 ADMM 格式, 并说明如何求解每个子问题. 提示: 可以利用习题 **8.4** 的结论.

解 (陈铖). 写出该问题的增广拉格朗日函数, 利用习题**8.4** 的结论. □

8.17 考虑 ℓ_0 范数优化问题的罚函数形式:

$$\min \quad \lambda\|x\|_0 + \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2,$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m<n$ 为实矩阵, $\|\cdot\|_0$ 为 ℓ_0 范数, 即非零元素的个数. 试针对 ℓ_0 范数优化问题形式化推导具有两个变量块的 ADMM 格式. 在算法中每个子问题是如何求解的?

解 (陈铖). 考虑上述问题的等价形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda\|z\|_0 + \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2, \\ \text{s.t.} \quad & x = z. \end{aligned}$$

写出增广拉格朗日函数, 利用 ADMM 法分别求解相关变量的子问题为更新方式. □

8.18 试说明 LASSO 对偶问题中, 若在问题 (8.6.27) 中对约束

$$A^{\mathrm{T}}y + z = 0$$

引入乘子 x, 则 x 恰好对应 LASSO 原始问题 (8.6.26) 中的自变量.

解 (邓展望). 对偶问题为

$$\max \quad -\mu\|x\|_1 - \frac{1}{2}\|Ax-b\|^2, \tag{8.3}$$

它与 LASSO 问题等价. □

8.19 实现关于 LASSO 问题使用以下算法的程序, 并比较它们的效率

(a) 近似点梯度算法;

(b) Nesterov 加速算法;

(c) 交替方向乘子法;

(d) Chambolle-Pock 算法；

(e) 分块坐标下降法；

(f) 随机近似点梯度算法.

解. 见教材代码主页，此处从略. □

8.20 设 $f(x)=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f_i(x)$，其中每个 $f_i(x)$ 是可微函数，且 $f(x)$ 为梯度 L-利普希茨连续的. $\{x^k\}$ 是由随机梯度下降法产生的迭代序列，s_k 为第 k 步随机抽取的下标. 证明：

$$\mathbb{E}[\|\nabla f_{s_k}(x^k)\|^2]\leqslant L^2\mathbb{E}[\|x^k-x^*\|^2]+\mathbb{E}[\|\nabla f_{s_k}(x^k)-\nabla f(x^k)\|^2].$$

（请注意可能与教材不同，此处为**订正**版本）其中 x^* 是 $f(x)$ 的一个最小值点，α_k 为第 k 步的步长.

解 (邓展望). 只需注意题设条件中的梯度 L-利普希茨连续即可进行合适的放缩估计. □

8.21 在 SAGA 算法中，每一步的下降方向取为：

$$v^k=\nabla f_{s_k}(x^k)-g_{s_k}^{k-1}+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g_i^{k-1},$$

假设初值 $g_i^0=0, i=1,2,\cdots,N$，证明：

$$\mathbb{E}[v^k|s_1,s_2,\cdots,s_{k-1}]=\nabla f(x^k).$$

解 (邓展望). 利用随机梯度下降中随机梯度的期望收敛于梯度. □

更新历史

2021.12.21-2023.12.21

- 版本 v1.03 更新. 本次更新修正了习题 6.6 存在的错误.
- 版本 v1.01-1.02 更新. 本次更新统一修改、简化了部分题目的答案, 其中包括 5.10, 6.2, 6.4 等习题.
- 版本 v1.0 更新. 本次更新主要提供教材全部习题的参考解答（包括资料）, 是正式发布的第一版.

致谢

本书内容在北京大学数学科学学院多次开设的“凸优化”和“大数据分析中的算法”课程中使用，感谢选课同学的反馈和支持.