典型优化问题

文再文

北京大学北京国际数学研究中心

教材《最优化：建模、算法与理论》配套电子教案

http://bicmr.pku.edu.cn/~wenzw/optbook.html

致谢：本教案由邓展望协助准备

提纲

凸优化问题

标准形式的凸优化问题

$$\begin{array}{lll} \min & f_0(x) & \\ \text{s.t.} & f_i(x) \le 0, & i = 1, ..., m \\ & a_i^T x = b_i, & i = 1, ..., p \end{array}$$

- $f_0, f_1, ..., f_m$ 凸函数; 线性等式约束
- 拟凸问题：如果f_0 是拟凸(且$f_1, ..., f_m$ 为凸函数)

经常写成：

$$\begin{array}{lll} \min & f_0(x) & \\ \text{s.t.} & f_i(x) \le 0, & i = 1, ..., m \\ & Ax = b & \end{array}$$

重要性质：凸问题的可行集为凸集.

例子

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f_0(x) = x_1^2 + x_2^2 \\
\text{s.t.} \quad & f_1(x) = x_1/(1+x_2^2) \le 0 \\
& h_1(x) = (x_1+x_2)^2 = 0
\end{aligned}
$$

- f_0 凸函数; 可行集$\{(x_1, x_2) | x_1 = -x_2 \le 0\}$ 为凸集
- 根据我们定义不是凸问题: f_1 非凸, h_1 不是线性函数
- 等价于(但不完全相等) 凸优化问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 \le 0 \\
& x_1 + x_2 = 0
\end{aligned}
$$

局部和全局极小

凸优化问题的任意局部极小点都是全局最优

证明：假设x是局部极小，y全局最优且$f_0(y) < f_0(x)$.
x 局部最优意味着存在$R > 0$使得

$$z\text{可行}, \quad \|z - x\|_2 \le R \quad \Longrightarrow \quad f_0(z) \ge f_0(x).$$

考虑$z = \theta y + (1 - \theta)x$ 且$\theta = R/(2\|y - x\|_2)$

- $\|y - x\|_2 > R$, 因此$0 < \theta < 1/2$
- z 是两个可行点的凸组合，因此也可行。
- $\|z - x\|_2 = R/2$，并且

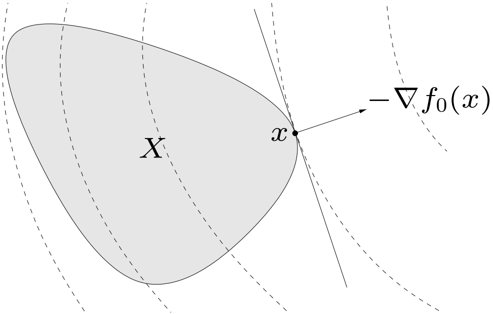
  $$f_0(z) \le \theta f_0(x) + (1 - \theta)f_0(y) < f_0(x),$$

  这与x是局部极小的假设矛盾.

可微凸优化问题的最优性条件

x 是凸优化问题$\min_{x\in X} f_0(x)$最优解当且仅当x可行且满足：

$$\nabla f_0(x)^T(y-x) \geq 0, \quad \forall y \in X.$$



如果$\nabla f_0(x)$非零，它定义了可行集X在x处的支撑超平面.

具体含义

- 无约束优化: x 是最优解当且仅当

$$x \in \mathbf{dom}\, f_0, \quad \nabla f_0(x) = 0$$

- 等式约束优化问题

$$\min \quad f_0(x) \qquad \text{s.t.} \quad Ax = b$$

x 是最优解当且仅当存在υ使得

$$x \in \mathbf{dom}\, f_0, \quad Ax = b, \quad \nabla f_0(x) + A^T \upsilon = 0$$

- 非负约束优化问题

$$\min \quad f_0(x) \qquad \text{s.t.} \quad x \succeq 0$$

x 是最优解当且仅当

$$x \in \mathbf{dom}\, f_0, \quad x \succeq 0, \quad \begin{cases} \nabla f_0(x)_i \geq 0 & x_i = 0 \\ \nabla f_0(x)_i = 0 & x_i > 0 \end{cases}$$

提纲

线性规划基本形式

线性规划问题的一般形式如下：

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & c^{\mathrm{T}}x, \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b, \\
& Gx \le e,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中$c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, G \in \mathbb{R}^{p\times n}$ 和$e \in \mathbb{R}^p$ 是给定的矩阵和向量，$x \in \mathbb{R}^n$ 是决策变量.

- 标准形式

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & c^{\mathrm{T}}x, \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b, \\
& x \ge 0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

- 不等式形式

$$
\begin{aligned}
\max_{y\in\mathbb{R}^n} \quad & b^{\mathrm{T}}y, \\
\text{s.t.} \quad & A^{\mathrm{T}}y \le c.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

基追踪问题

基追踪问题是压缩感知中的一个基本问题，可以写为

$$
\begin{aligned}
\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & \|x\|_1, \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b.
\end{aligned} \tag{4}
$$

对每个$|x_i|$ 引入一个新的变量z_i，可以将问题(4) 转化为

$$
\begin{aligned}
\min_{z \in \mathbb{R}^n} \quad & \sum_{i=1}^{n} z_i, \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b, \\
& -z_i \le x_i \le z_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,
\end{aligned} \tag{5}
$$

这是一个线性规划问题.

基追踪问题

- 也可以引入x_i的正部和负部,其中$x_i^+ = \max\{x_i, 0\}$, $x_i^- = \max\{-x_i, 0\}$..
- 利用$x_i = x_i^+ - x_i^-, |x_i| = x_i^+ + x_i^-$，则问题(4) 转化为的另外一种等价的线性规划形式可以写成

$$
\begin{aligned}
\min_{x^+, x^- \in \mathbb{R}^n} \quad & \sum_{i=1}^{n} (x_i^+ + x_i^-), \\
\text{s.t.} \quad & Ax^+ - Ax^- = b, \\
& x^+, x^- \geq 0.
\end{aligned}
$$

可以看出这也是一个线性规划问题，且与原问题等价.

数据拟合

在数据拟合中，除了常用的最小二乘模型外，还有最小ℓ_1 范数模型

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|Ax-b\|_1, \tag{6}$$

和最小ℓ_∞ 范数模型

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad \|Ax-b\|_\infty. \tag{7}$$

这两个问题都可以转化成线性规划的形式.

- 对于问题(6)，通过引入变量$y=Ax-b$，可以得到如下等价问题：

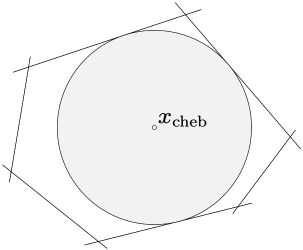
$$\begin{aligned} \min_{x,y\in\mathbb{R}^n} &\quad \|y\|_1, \\ \text{s.t.} &\quad y=Ax-b. \end{aligned}$$

- 利用基追踪问题中类似的技巧，可以将上述绝对值优化问题转化成线性规划问题.

多面体的

$$\mathcal{P} = \{x | a_i^T x \le b_i, i = 1, ..., m\}$$

的切比雪夫中心即为其最大半径内接球的球心



$$\mathcal{B} = \{x_c + u | \ \|u\|_2 \le r\}$$

- $a_i^T x \le b_i$ 对$\forall\ x \in \mathcal{B}$ 当且仅当

$$\sup\{a_i^T(x_c + u) | \ \|u\|_2 \le r\} = a_i^T x_c + r\|a_i\|_2 \le b_i$$

- 因此, x_c, r 可以用LP方式求解

$$\begin{array}{ll} \max\limits_{x_c, r} & r \\ \text{s.t.} & a_i^T x_c + r\|a_i\|_2 \le b_i, \quad i = 1, ..., m \end{array}$$

分式线性问题

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ \text{s.t.} & Gx \leq h, Ax = b \end{array} \tag{8}$$

分式线性函数：

$$f_0 = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}, \quad \mathrm{dom} f_0(x) = \{x | e^T x + f > 0\} \tag{9}$$

则该问题等价于一个线性问题：

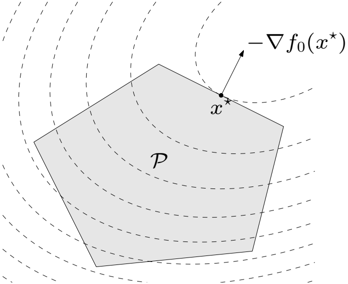
$$\begin{array}{ll} \min & c^T y + dz \\ \text{s.t.} & Gy \leq hz \\ & Ay = bz \\ & e^T y + fz = 1 \\ & z \geq 0 \end{array} \tag{10}$$

提纲

二次规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r \\
\text{s.t.} \quad & Gx \le h \\
& Ax = b
\end{aligned}
\tag{11}
$$

- $P \in \mathcal{S}_+^n$,故目标函数是二次的
- 在一个多面体内最小化一个二次凸问题



- 最小二乘问题：
$$\min \|Ax-b\|_2^2 \tag{12}$$
    - 该问题的解析解为$x^* = A^\dagger b$ (其中$A^\dagger$为广义逆)
- 随机线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{c}^T x + \gamma x^T \Sigma x = \mathbf{E} c^T x + \gamma \mathrm{var}(c^T x) \\ \text{s.t.} \quad & Gx \le h, \quad Ax = b \end{aligned}$$

- c 是随机向量并且均值为$\bar{c}$，方差为Σ
- $c^T x$ 均值为$\bar{c}^T x$,方差为$x^T \Sigma x$
- $\gamma > 0$ 为风险参数,控制预期成本与风险.

带有二次约束的二次规划问题(QCQP)

考虑带有二次约束的二次规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & (1/2)x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \\
\text{s.t.} \quad & (1/2)x^T P_i x + q_i^T x + r_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& Ax = b
\end{aligned}
$$

- $P_i \in \mathbb{S}_+^n$;即目标函数与约束均为二次凸的
- 如果$P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{S}_{++}^n$, 则可行域为$m$个椭球与一个仿射集的交集.

广义不等式约束

- 凸问题的广义不等式约束

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(x) \\ \text{s.t.} \quad & f_i(x) \preceq_{K_i} 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{aligned}$$

  - $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为凸函数; $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k_i}$ 关于适当锥K_i为K_i-凸的.
  - 与标准凸问题有相同的性质

- 锥形式问题(具有仿射目标函数与约束的特殊情况)

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Fx + g \preceq_K 0 \\ & Ax = b \end{aligned}$$

将线性规划问题延伸到了非多面体锥上($K = \mathbb{R}^m_+$)

二次锥

- 二次锥(SOC):

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\bar{x}\|_2 \le x_1, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \bar{x} \end{bmatrix} \right\}$$

- 旋转二次锥

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\bar{x}\|_2^2 \le x_1 x_2, x_1, x_2 \ge 0, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bar{x} \end{bmatrix} \right\}$$

- 旋转二次锥$\|\bar{x}\|^2 \le x_1 x_2$, 其中$x_1, x_2 \ge 0$, 等价于

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2\bar{x} \end{pmatrix} \right\| \le x_1 + x_2$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f^T x \\
\text{s.t.} \quad & \|A_i x + b_i\|_2 \le c_i^T x + d_i, \quad i = 1, ..., m \\
& Fx = g
\end{aligned}
$$

$(A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}, F \in \mathbb{R}^{p \times n})$

- 优化问题中的不等式:

$$(c_i^T x + d_i, A_i x + b_i) \in \text{ 为二次锥}$$

- 对于$n_i = 0$, 问题退化为LP; 若$c_i = 0$, 问题退化为QCQP
- 问题形式比LP与QCQP更常规

二次规划(QP)

$$\begin{aligned} \min \quad & q(x) = x^\top Qx + a^\top x + \beta \qquad \text{假设} \quad Q \succ 0, Q = Q^\top \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- $q(x) = \|\bar{u}\|^2 + \beta - \frac{1}{4}a^\top Q^{-1}a$, 其中$\bar{u} = Q^{1/2}x + \frac{1}{2}Q^{-1/2}a$.
- 等价的SOCP问题形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & u_0 \\ \text{s.t.} \quad & \bar{u} = Q^{1/2}x + \frac{1}{2}Q^{-1/2}a \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \quad (u_0, \bar{u}) \succeq_{\mathcal{Q}} 0 \end{aligned}$$

二次约束

$$q(x) = x^\top B^\top B x + a^\top x + \beta \leq 0$$

等价于

$$(u_0, \bar{u}) \succeq_{\mathcal{Q}} 0,$$

其中

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} Bx \\ \frac{a^\top x + \beta + 1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{并且} \quad u_0 = \frac{1 - a^\top x - \beta}{2}$$

令$\bar{v}_i = A_i x + b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

- $\min_x \quad \sum_i \|\bar{v}_i\|$ 等价于

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i v_{i0} \\ \text{s.t.} \quad & \bar{v}_i = A_i x + b_i \\ & (v_{i0}, \bar{v}_i) \succeq_Q 0 \end{aligned}$$

- $\min_x \quad \max_{1 \le i \le r} \|\bar{v}_i\|$ 等价于

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & \bar{v}_i = A_i x + b_i \\ & (t, \bar{v}_i) \succeq_Q 0 \end{aligned}$$

最小范数问题

令$\bar{v}_i = A_i x + b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

- $\|\bar{v}_{[1]}\|, \ldots, \|\bar{v}_{[r]}\|$ 是范数$\|\bar{v}_1\|, \ldots, \|\bar{v}_r\|$ 按照非递增方式的排列
- $\min_x \quad \sum_{i=1}^k \|\bar{v}_{[i]}\|$ 等价于

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^m u_i + kt \\
\text{s.t.} \quad & \bar{v}_i = A_i x + b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
& \|\bar{v}_i\| \leq u_i + t, \quad i = 1, \ldots, m \\
& u_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

Minimizing the sum of the k largest functions

Let $\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_m(x))^\top$. We sort the m components in nonincreasing order, i.e., $\theta_{[1]}(x) \geq \theta_{[2]}(x) \geq \ldots \geq \theta_{[m]}(x)$.

- Let Q be a convex set. Consider

$$\min_x \sum_{i=1}^{k} \theta_{[i]}(x), \text{ s.t. } x \in Q.$$

- It is equivalent to

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^{m} u_i + kt \\ \text{s.t.} \quad & u_i + t \geq \theta_i(x), \\ & u_i \geq 0 \\ & x \in Q. \end{aligned}$$

- 极小化仿射函数的调和平均值

$$\min \quad \sum_i 1/(a_i^\top x + \beta_i), \text{ s.t. } \quad a_i^\top x + \beta_i > 0$$

该问题等价于

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i u_i \\ \text{s.t.} \quad & \bar{v}_i = a_i^\top x + \beta_i \\ & 1 \le u_i v_i \\ & u_i \ge 0 \end{aligned}$$

- 对数切比雪夫逼近

$$\min_{x} \quad \max_{1\le i\le r} \quad |\ln(a_i^\top x) - \ln b_i|$$

- 由于$|\ln(a_i^\top x) - \ln b_i| = \ln \max(a_i^\top x/b_i, b_i/a_i^\top x)$,该问题等价于:

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & 1 \le (a_i^\top x/b_i)t \\ & a_i^\top x/b_i \le t \\ & t \ge 0 \end{aligned}$$

二次锥规划的应用

- 含有几何平均的不等式：

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i^\top x+b_i)\right)^{1/n}\geq t$$

对于n=4情形：

$$\max\ \prod_{i=1}^{4}(a_i^\top x-b_i)\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{ll}\max & w_3\\ \text{s.t.} & a_i^\top x-b_i\geq 0\\ & (a_1^\top x-b_1)(a_2^\top x-b_2)\geq w_1^2\\ & (a_3^\top x-b_3)(a_4^\top x-b_4)\geq w_2^2\\ & w_1w_2\geq w_3^2\\ & w_i\geq 0\end{array}$$

- 目标函数可延伸为仿射函数有理幂次的乘积

Robust linear programming

the parameters in LP are often uncertain

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & a_i^\top x \leq b_i \end{array}$$

There can be uncertainty in c, a_i, b.

two common approaches to handling uncertainty (in a_i, for simplicity)

- deterministic model: constraints must hold for all $a_i \in \mathcal{E}_i$

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & a_i^\top x \leq b_i, \ \text{for all } a_i \in \mathcal{E}_i \end{array}$$

- stochastic model: a_i is random variable; constraints must hold with probability η

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & \mathrm{prob}(a_i^\top x \leq b_i) \geq \eta \end{array}$$

deterministic approach via SOCP

- Choose an ellipsoid as $\mathcal{E}_i$:

$$\mathcal{E}_i = \{\bar{a}_i + P_i u \mid \|u\|_2 \leq 1\}, \quad \bar{a}_i \in \mathbb{R}^n, P_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

- Robust LP

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & a_i^\top x \leq b_i, \text{ for all } a_i \in \mathcal{E}_i \end{aligned}$$

is equivalent to the SOCP

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & \bar{a}_i^\top x + \|P_i^\top x\|_2 \leq b_i \end{aligned}$$

since

$$\sup_{\|u\|_2 \leq 1} (\bar{a}_i + P_i u)^\top x = \bar{a}_i^\top x + \|P_i^\top x\|_2$$

stochastic approach via SOCP

- a_i is Gaussian with mean $\bar{a}_i$, covariance Σ_i ($a_i \sim \mathcal{N}(\bar{a}_i, \Sigma_i)$)
- $a_i^\top x$ is Gaussian r.v. with mean $\bar{a}_i^\top x$, variance $x^\top \Sigma_i x$; hence

$$\mathrm{prob}(a_i^\top x \leq b_i) = \Phi\left(\frac{b_i - \bar{a}_i^\top x}{\|\Sigma^{1/2} x\|_2}\right)$$

  where $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$ is CDF of $\mathcal{N}(0,1)$
- robust LP

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & \mathrm{prob}(a_i^\top x \leq b_i) \geq \eta \end{array}$$

  is equivalent to the SOCP

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{s.t.} & \bar{a}_i^\top x + \Phi^{-1}(\eta) \|\Sigma^{1/2} x\|_2 \leq b_i \end{array}$$

提纲

半定规划

半定规划问题的一般形式如下：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^{\mathrm{T}}x, \\
\text{s.t.} \quad & x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n + B \preceq 0, \\
& Gx = h,
\end{aligned} \tag{13}
$$

其中$c \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathcal{S}^m, i = 1, 2, \cdots, m, B \in \mathcal{S}^m, G \in \mathbb{R}^{p\times n}, h \in \mathbb{R}^p$ 为已知的向量和矩阵，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$是自变量.

- 半定规划（SDP）是线性规划在矩阵空间中的一种推广. 它的目标函数和等式约束均为关于矩阵的线性函数，而它与线性规划不同的地方是其自变量取值于半正定矩阵空间.
- 作为一种特殊的矩阵优化问题，半定规划在某些结构上和线性规划非常相似，很多研究线性规划的方法都可以作为研究半定规划的基础. 由于半定规划地位的特殊性，我们将在本节中单独讨论半定规划的形式和应用.

类似于线性规划问题，我们考虑半定规划的标准形式

$$\begin{aligned}\min \quad & \langle C, X\rangle, \\ \text{s.t.} \quad & \langle A_1, X\rangle = b_1, \\ & \cdots \\ & \langle A_m, X\rangle = b_m, \\ & X \succeq 0,\end{aligned} \tag{14}$$

和对偶形式：

$$\begin{aligned}\min \quad & -b^{\mathrm{T}}y, \\ \text{s.t.} \quad & y_1A_1 + y_2A_2 + \cdots + y_nA_n \preceq C.\end{aligned} \tag{15}$$

形如(13) 式的优化问题都可以转化成(14) 式或者(15) 式的形式.

LP与SDP

$$\text{LP:} \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b \end{array} \qquad \text{SDP:} \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & \mathrm{diag}(Ax - b) \preceq 0 \end{array}$$

SOCP 与SDP

$$\text{SOCP:} \quad \begin{array}{ll} \min & f^T x \\ \text{s.t.} & \|A_i x + b_i\|_2 \le c_i^T x + d_i, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\text{SDP:} \quad \begin{array}{ll} \min & f^T x \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} (c_i^T x + d_i) I & A_i x + b_i \\ (A_i x + b_i)^T & c_i^T x + d_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

- 考虑二次约束二次规划问题

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & x^{\mathrm{T}}A_0x + 2b_0^{\mathrm{T}}x + c_0, \\
\text{s.t.} \quad & x^{\mathrm{T}}A_ix + 2b_i^{\mathrm{T}}x + c_i \le 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

  其中A_i 为$n \times n$ 对称矩阵．当部分A_i为对称不定矩阵时，问题(16)是NP 难的非凸优化问题．

- 写出问题(16) 的半定规划松弛问题．对任意$x \in \mathbb{R}^n$以及$A \in \mathcal{S}^n$，有恒等式

$$
x^{\mathrm{T}}Ax = \mathrm{Tr}(x^{\mathrm{T}}Ax) = \mathrm{Tr}(Axx^{\mathrm{T}}) = \left\langle A, xx^{\mathrm{T}} \right\rangle,
$$

  因此问题(16) 中所有的二次项均可用下面的方式进行等价刻画：

$$
x^{\mathrm{T}}A_ix + 2b_i^{\mathrm{T}}x + c_i = \left\langle A_i, xx^{\mathrm{T}} \right\rangle + 2b_i^{\mathrm{T}}x + c_i.
$$

由上述分析，原始问题等价于

$$
\begin{aligned}
\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & \langle A_0, X\rangle + 2b_0^{\mathrm{T}}x + c_0 \\
\text{s.t.} \quad & \langle A_i, X\rangle + 2b_i^{\mathrm{T}}x + c_i \le 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \\
& X = xx^{\mathrm{T}}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

进一步地，

$$
\begin{aligned}
x^{\mathrm{T}}A_i x + 2b_i^{\mathrm{T}}x + c_i &= \left\langle \begin{pmatrix} A_i & b_i \\ b_i^{\mathrm{T}} & c_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X & x \\ x^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \\
&\overset{\text{def}}{=\!=} \langle \overline{A_i}, \overline{X} \rangle, \quad i = 0, 1, \cdots, m.
\end{aligned}
$$

接下来将等价问题(17) 松弛为半定规划问题．

- 在问题(17) 中，唯一的非线性部分是约束$X = xx^{\mathrm{T}}$，我们将其松弛成半正定约束$X \succeq xx^{\mathrm{T}}$．可以证明，$\overline{X} \succeq 0$ 与$X \succeq xx^{\mathrm{T}}$ 是等价的．
- 因此这个问题的半定规划松弛可以写成

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \langle \overline{A_0}, \overline{X} \rangle \\
\text{s.t.} \quad & \langle \overline{A_i}, \overline{X} \rangle \leq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \\
& \overline{X} \succeq 0, \\
& \overline{X}_{n+1,n+1} = 1.
\end{aligned}
$$

其中“松弛”来源于我们将$X = xx^{\mathrm{T}}$ 替换成了$X \succeq xx^{\mathrm{T}}$．

- 令G为一个无向图，其节点集合为$V=\{1,2,\cdots,n\}$和边的集合为E. 令$w_{ij}=w_{ji}$为边$(i,j)\in E$上的权重，并假设$w_{ij}\geq 0,\ (i,j)\in E$. 最大割问题是找到节点集合$V$的一个子集$S$使得$S$与它的补集$\overline{S}$之间相连边的权重之和最大化.
- 可以将最大割问题写成如下整数规划的形式：令$x_j=1,\ j\in S$和$x_j=-1,\ j\in\overline{S}$，则

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \frac{1}{2}\sum_{i<j}(1-x_ix_j)w_{ij} \\
\text{s.t.}\quad & x_j\in\{-1,1\},\ j=1,2,\cdots,n.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

- 在问题(18)中，只有当x_i与x_j不同时，目标函数中w_{ij}的系数非零. 最大割问题是一个离散优化问题，很难在多项式时间内找到它的最优解.

接下来介绍如何将问题(18) 松弛成一个半定规划问题.

- 令$W = (w_{ij}) \in \mathcal{S}^n$，并定义$C = -\frac{1}{4}(\mathrm{Diag}(W\mathbf{1}) - W)$为图$G$的拉普拉斯矩阵的$-\frac{1}{4}$倍，则问题(18) 可以等价地写为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x^\mathrm{T} C x, \\
\text{s.t.} \quad & x_i^2 = 1, \ i = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned}
$$

由于目标函数是关于x的二次函数，可将其等价替换为$\langle C, xx^\mathrm{T} \rangle$.

- 接下来令$X = xx^\mathrm{T}$，注意到约束$x_i^2 = 1$，这意味着矩阵X对角线元素$X_{ii} = 1$. 因此利用矩阵形式我们将最大割问题转化为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \langle C, X \rangle, \\
\text{s.t.} \quad & X_{ii} = 1, \ i = 1, 2, \cdots, n, \\
& X \succeq 0, \ \mathrm{rank}(X) = 1.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

- 问题(19) 和(18) 是等价的，这是因为$X = xx^\mathrm{T}$ 可以用约束$X \succeq 0$和$\mathrm{rank}(X) = 1$等价刻画.

极小化最大特征值

- 问题的形式可表示为：$\lambda_{\max}(A_0 + \sum_i x_i A_i)$:

$$\min \quad \lambda_{\max}(A_0 + \sum_i x_i A_i)$$

SDP形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & zI - \sum_i x_i A_i \succeq A_0 \end{aligned}$$

对偶问题形式：

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle A_0, Y \rangle \\ \text{s.t.} \quad & \langle A_i, Y \rangle = 0 \\ & \langle I, Y \rangle = 1 \\ & Y \succeq 0 \end{aligned}$$

- 等价形式来源于：

$$\lambda_{\max}(A) \leq t \Longleftrightarrow A \preceq tI$$

极小化二范数问题

- 令$A_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 极小化$A(x) = A_0 + \sum_i x_i A_i$的二范数:

$$\min_x \quad \|A(x)\|_2$$

  该问题的SDP形式：

$$\begin{aligned} \min_{x,t} \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & \begin{pmatrix} tI & A(x) \\ A(x)^\top & tI \end{pmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

- 约束形式来源于：

$$\begin{aligned} \|A\|_2 \le t \quad & \Longleftrightarrow \quad A^\top A \preceq t^2 I, \quad t \ge 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} tI & A(x) \\ A(x)^\top & tI \end{pmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

特征值优化问题

- 令$\lambda_{[i]}(A)$为A第i大特征值，即$\lambda_{[1]}(A) \geq \lambda_{[2]}(A) \geq \ldots \geq \lambda_{[n]}(A)$. 极小化前$k$个最大特征值之和可以写成:

$$\min_{z} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_{[i]}(A_0 + \sum_j z_j A_j)$$

- 根据第26页，它等价于

$$\begin{aligned} \min_{z,u,t} \quad & kt + \sum_{i=1}^{n} u_i \\ \text{s.t.} \quad & u_i + t \geq \lambda_i(A_0 + \sum_j z_j A_j), \quad u_i \geq 0 \end{aligned}$$

设$u_i = \lambda_i(X)$。上述问题写成SDP形式：

$$\begin{aligned} \min_{z,X,t} \quad & kt + \mathrm{Tr}(X) \\ \text{s.t.} \quad & tI + X \succeq A_0 + \sum_j z_j A_j, \quad X \succeq 0 \end{aligned}$$

提纲

典型优化算法软件

前面介绍了各种各样的优化问题．对于每一类优化问题，我们都有相应的求解算法以及一些流行的算法软件包．

- SDPT3: 这个开源软件包的基本代码是用MATLAB 来写的，但是关键的子程序是用FORTRAN 和C 语言通过MEX 文件来完成的．它可以求解锥规划问题，其中锥可以是半定矩阵锥、二次锥和非负象限中的一个或者多个的乘积．这个软件主要实现的算法是一种原始– 对偶内点法．
- MOSEK: 这个商业软件包可以求解线性规划、二次锥规划、半定规划、二次规划等凸优化问题，以及混合整数线性规划和混合整数二次规划等．它的重点是求解大规模稀疏问题，尤其在求解线性规划、二次锥规划和半定规划的内点法设计上做得非常有效．除了内点法之外，MOSEK 还实现了线性规划问题的单纯形算法，特殊网络结构问题的网络单纯形算法以及针对混合整数规划问题的算法．它提供C, C#, Java, Python, MATLAB 和R 等接口．

典型优化算法软件

- CPLEX: 这个商业软件可以求解整数规划问题，非常大规模的线性规划问题（使用单纯形方法或者内点法），凸和非凸二次规划问题，二次锥规划问题．它提供C++, C#, Java, Microsoft Excel和MATLAB 接口，并且提供一个独立的交互式优化器可执行文件，用于调试和其他目的．
- Gurobi: 这个商业软件可以求解线性规划（单纯形法和并行的内点法），二次规划（采用单纯形法和内点法），二次约束规划，混合整数线性规划，混合整数二次规划，混合整数二次约束规划．它提供C, C++, Java, .NET, Python, MATLAB 和R 等接口．

- IPOPT: 这个开源软件可以求解大规模非线性规划问题，主要实现了原始– 对偶内点法，并使用滤波（filter）方法代替线搜索．IPOPT 主要使用C++ 语言编写，并提供C, C++, FORTRAN, Java, MATLAB 和R 等接口．
- Knitro: 用来求解大规模非线性优化问题的商业软件．这个软件提供了四种不同的优化方法，两种内点型方法和两种积极集（active set）方法，可以用来求解一般非凸非线性规划问题，非线性方程组，线性规划，二次（线性）约束二次规划问题，线性（非线性）最小二乘问题，混合整数规划问题以及无导数优化问题，等等．Knitro 支持的编程语言有C, FORTRAN, C++, C#, Java, MATLAB, R, Python 等，以及模型语言AMPL，AIMMS，GAMS 和MPL 等．因其具有大量的用户友善的选项以及自动调试器，全局优化的并行多重启动策略，导数逼近和检查以及内部预分解器，在实际中被广泛采用．

优化模型语言

- 模型语言的发展开始于19世纪70年代后期，其主要动因是计算机的出现．在优化模型语言中，优化模型可以写成和数学表达式很类似的方式，以此给用户带来更便捷的服务．
- 模型的表达式形式是与求解器无关的，不同的求解器需要用优化模型语言将给定的模型和数据转为其求解的标准形式，然后再对其进行求解．这类工具有三个优点：一是将容易出错的转化步骤交给计算机完成，降低错误率；二是在模型和算法之间建立了一个清晰的界限；三是对于困难的问题，可以尝试不用的求解器，得到更好的结果．

- CVX是以MATLAB 为基础的优化模型语言，用来求解凸优化问题．它允许将优化问题的目标函数以及约束用MATLAB 语法写出．
- CVX 采用了一种快速构造和识别凸性的准则，服从这个准则的凸问题都可以很快地被识别出来．之后CVX 根据用户的选择调用已有软件包来求解变形后的凸优化问题，这些软件包括免费软件SDPT3 和SeDuMi 以及商业软件Gurobi 和MOSEK 等．除了一些典型问题外，CVX 还可以识别一些更复杂的凸优化问题，例如带ℓ_1范数的优化问题．目前CVX 还有Julia 语言版本和Python 语言版本CVXPY．
- 除CVX 外，还有很多发展成熟的优化模型语言可供我们使用，如AMPL，YALMIP 等．

CVX

考虑如下优化问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \|Ax-b\|_2, \\ \text{s.t.} \quad & Cx = d, \\ & \|x\|_\infty \le e, \end{aligned} \tag{20}$$

它可以写成:

```
m = 20; n = 10; p = 4;
A = randn(m,n); b = randn(m,1);
C = randn(p,n); d = randn(p,1); e = rand;
cvx_begin
    variable x(n)
    minimize( norm( A * x - b, 2 ) )
    subject to
    C * x == d
    norm( x, Inf ) <= e
cvx_end
```

CVX

- 代码中的前三行是关于A, b, C, d, e的构造．在调用CVX 求解的时候，对应的代码需要以`cvx_begin` 开始，并且以`cvx_end` 结尾．在这两行语句之间，我们需要定义

- 要求解的优化问题．在上面的例子中，`variable x(n)` 表示决策变量x 为n 维空间中的向量．目标函数$\|Ax-b\|_2$ 则用`norm( A * x - b, 2 )` 来表示，`minimize` 表示求解目标函数的极小值．最后以`subject to` 开始描述问题的约束，`C * x == d` 和`norm( x, Inf ) <= e` 分别表示约束$Cx = d$ 和$\|x\|_\infty \le e$．

- 执行上述代码，CVX 会选取默认的凸优化问题算法来返回上面问题的解．

AMPL

- AMPL（a mathematical programming language）是用来描述高复杂度的大规模优化问题的模型语言.
- 几十个求解器支持AMPL，包含开源软件和商业软件，例如CBC, CPLEX, FortMP, Gurobi, MINOS, IPOPT, SNOPT, Knitro 和LGO 等，因此可以支持一大类问题的求解. 它的一个优点是其语法与数学表达式非常类似，因此可对优化问题进行非常简洁并且可读的定义.
- 对于优化模型语言，常用的还有YALMIP . 对于半定规划问题，最新的一些软件包有SDPNAL，SDPNAL+ 和SSNSDP . 对于流形优化，软件包有OptM ，Manopt 和ARNT.

AMPL

考虑优化问题：

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \quad f_1^2(x)+f_2^2(x), \tag{21}$$

其中$f_1(x)=10(x_2-x_1^2)$, $f_2(x)=1-x_1$. 利用如下代码描述问题，其求解过程可以由支持AMPL和非线性无约束优化的求解器自动完成.

```
1 var x{1..2};
2 var f1 = 10*(x[2] - x[1]^ 2);
3 var f2 = 1 - x[1];
4
5 minimize norm:
6 f1^ 2 + f2^ 2;
7
8 data;
9 var x:=
10 1 -1.2
11 2 1;
```

这里，var x{1..2} 表示决策变量是$\mathbb{R}^2$中的向量，第2，3 行用来定义函数f_1 和f_2，第5，6 行定义了优化问题(21)，以及第8—11 行表示选取的初始点为$(-1.2,1)^{\mathrm{T}}$.