交替方向乘子法(ADMM)

文再文

北京大学北京国际数学研究中心

教材《最优化：建模、算法与理论》配套电子教案

http://bicmr.pku.edu.cn/~wenzw/optbook.html

致谢：本教案由华奕轩协助准备

提纲

典型问题形式

考虑如下凸问题：

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & f_1(x_1)+f_2(x_2), \\ \text{s.t.} \quad & A_1x_1+A_2x_2=b, \end{aligned} \tag{1}$$

- f_1,f_2是适当的闭凸函数，但不要求是光滑的，$x_1\in\mathbb{R}^n, x_2\in\mathbb{R}^m$, $A_1\in\mathbb{R}^{p\times n}, A_2\in\mathbb{R}^{p\times m}$, $b\in\mathbb{R}^p$.
- 问题特点：目标函数可以分成彼此分离的两块，但是变量被线性约束结合在一起. 常见的一些无约束和带约束的优化问题都可以表示成这一形式。

- 可以分成两块的无约束优化问题

$$\min_{x} \quad f_1(x) + f_2(x).$$

引入一个新的变量z并令$x = z$，将问题转化为

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & f_1(x) + f_2(z), \\ \text{s.t.} \quad & x - z = 0. \end{aligned}$$

- 带线性变换的无约束优化问题

$$\min_{x} \quad f_1(x) + f_2(Ax).$$

可以引入一个新的变量z，令$z = Ax$，则问题变为

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & f_1(x) + f_2(z), \\ \text{s.t.} \quad & Ax - z = 0. \end{aligned}$$

问题形式举例

- 凸集$C \subset \mathbb{R}^n$上的约束优化问题

$$\begin{aligned}\min_{x} \quad & f(x), \\ \text{s.t.} \quad & Ax \in C,\end{aligned}$$

$I_C(z)$是集合C的示性函数，引入约束$z = Ax$，那么问题转化为

$$\begin{aligned}\min_{x,z} \quad & f(x) + I_C(z), \\ \text{s.t.} \quad & Ax - z = 0.\end{aligned}$$

- 全局一致性问题

$$\min_{x} \quad \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x).$$

令$x = z$，并将x复制N份，分别为x_i，那么问题转化为

$$\begin{aligned}\min_{x_i,z} \quad & \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x_i), \\ \text{s.t.} \quad & x_i - z = 0,\ i = 1, 2, \cdots, N.\end{aligned}$$

增广拉格朗日函数法

- 首先写出问题(1)的增广拉格朗日函数

$$
\begin{aligned}
L_\rho(x_1,x_2,y) =& f_1(x_1)+f_2(x_2)+y^{\mathrm{T}}(A_1x_1+A_2x_2-b) \\
&+\frac{\rho}{2}\|A_1x_1+A_2x_2-b\|_2^2,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中$\rho>0$是二次罚项的系数.

- 常见的求解带约束问题的增广拉格朗日函数法为如下更新:

$$
(x_1^{k+1},x_2^{k+1}) = \operatorname*{argmin}_{x_1,x_2} L_\rho(x_1,x_2,y^k), \tag{3}
$$

$$
y^{k+1} = y^k+\tau\rho(A_1x_1^{k+1}+A_2x_2^{k+1}-b), \tag{4}
$$

其中τ为步长.

Alternating direction method of multipliers, ADMM

- 交替方向乘子法的基本思路: 第一步迭代(3)同时对x_1和x_2进行优化有时候比较困难，而固定一个变量求解关于另一个变量的极小问题可能比较简单，因此我们可以考虑对x_1和x_2交替求极小
- 其迭代格式可以总结如下：

$$x_1^{k+1} = \operatorname*{argmin}_{x_1} L_\rho(x_1, x_2^k, y^k), \tag{5}$$

$$x_2^{k+1} = \operatorname*{argmin}_{x_2} L_\rho(x_1^{k+1}, x_2, y^k), \tag{6}$$

$$y^{k+1} = y^k + \tau\rho(A_1 x_1^{k+1} + A_2 x_2^{k+1} - b), \tag{7}$$

其中τ 为步长，通常取值于$\left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

原问题最优性条件

- 因为f_1,f_2均为闭凸函数，约束为线性约束，所以当Slater 条件成立时，可以使用凸优化问题的KKT 条件来作为交替方向乘子法的收敛准则．问题(1)的拉格朗日函数为

$$L(x_1,x_2,y)=f_1(x_1)+f_2(x_2)+y^{\mathrm{T}}(A_1x_1+A_2x_2-b).$$

- 根据最优性条件定理，若x_1^*,x_2^*为问题(1)的最优解，y^*为对应的拉格朗日乘子，则以下条件满足：

$$0\in\partial_{x_1}L(x_1^*,x_2^*,y^*)=\partial f_1(x_1^*)+A_1^{\mathrm{T}}y^*, \tag{8a}$$
$$0\in\partial_{x_2}L(x_1^*,x_2^*,y^*)=\partial f_2(x_2^*)+A_2^{\mathrm{T}}y^*, \tag{8b}$$
$$A_1x_1^*+A_2x_2^*=b. \tag{8c}$$

在这里条件(8c)又称为原始可行性条件，条件(8a)和条件(8b)又称为对偶可行性条件．

- 由x_2的更新步骤

$$x_2^k = \mathop{\mathrm{argmin}}_{x} \left\{ f_2(x) + \frac{\rho}{2} \left\| A_1 x_1^k + A_2 x - b + \frac{y^{k-1}}{\rho} \right\|^2 \right\},$$

根据最优性条件不难推出

$$0 \in \partial f_2(x_2^k) + A_2^{\mathrm{T}}[y^{k-1} + \rho(A_1 x_1^k + A_2 x_2^k - b)]. \tag{9}$$

当$\tau = 1$时，根据(7)可知上式方括号中的表达式就是y^k，最终有

$$0 \in \partial f_2(x_2^k) + A_2^{\mathrm{T}} y^k,$$

- 由x_1的更新公式

$$x_1^k = \mathop{\mathrm{argmin}}_{x} \left\{ f_1(x) + \frac{\rho}{2} \| A_1 x + A_2 x_2^{k-1} - b + \frac{y^{k-1}}{\rho} \|^2 \right\},$$

假设子问题能精确求解，根据最优性条件

$$0 \in \partial f_1(x_1^k) + A_1^{\mathrm{T}}[\rho(A_1 x_1^k + A_2 x_2^{k-1} - b) + y^{k-1}].$$

- 根据ADMM 的第三式(7)取$\tau = 1$有

$$0 \in \partial f_1(x_1^k) + A_1^{\mathrm{T}}(y^k + \rho A_2(x_2^{k-1} - x_2^k)). \tag{10}$$

对比条件(8a)可知多出来的项为$A_1^{\mathrm{T}} A_2(x_2^{k-1} - x_2^k)$。因此要检测对偶可行性只需要检测残差

$$s^k = A_1^{\mathrm{T}} A_2(x_2^{k-1} - x_2^k)$$

- 综上当x_2更新取到精确解且$\tau = 1$时，判断ADMM 是否收敛只需要检测前述两个残差r^k, s^k是否充分小：

$$\begin{aligned} 0 &\approx \|r^k\| = \|A_1 x_1^k + A_2 x_2^k - b\| & \text{（原始可行性）}, \\ 0 &\approx \|s^k\| = \|A_1^{\mathrm{T}} A_2(x_2^{k-1} - x_2^k)\| & \text{（对偶可行性）}. \end{aligned} \tag{11}$$

提纲

线性化

- 线性化技巧使用近似点项对子问题目标函数进行二次近似.
- 不失一般性，我们考虑第一个子问题，即

$$\min_{x_1} \quad f_1(x_1) + \frac{\rho}{2}\|A_1x_1 - v^k\|^2, \tag{12}$$

其中$v^k = b - A_2x_2^k - \frac{1}{\rho}y^k$.

- 当子问题目标函数可微时，线性化将问题(12)变为

$$x_1^{k+1} = \operatorname*{argmin}_{x_1}\left\{\left(\nabla f_1(x_1^k) + \rho A_1^{\mathrm{T}}\left(A_1x_1^k - v^k\right)\right)^{\mathrm{T}} x_1 + \frac{1}{2\eta_k}\|x_1 - x^k\|_2^2\right\},$$

其中η_k是步长参数，这等价于做一步梯度下降.

- 当目标函数不可微时，可以考虑只将二次项线性化，即

$$x_1^{k+1} = \operatorname*{argmin}_{x_1}\left\{f_1(x_1) + \rho\left(A_1^{\mathrm{T}}(A_1x_1^k - v^k)\right)^{\mathrm{T}} x_1 + \frac{1}{2\eta_k}\|x_1 - x^k\|_2^2\right\},$$

这等价于做一步近似点梯度步.

缓存分解

- 如果目标函数中含二次函数，例如$f_1(x_1) = \frac{1}{2}\|Cx_1 - d\|_2^2$，那么针对$x_1$的更新(5)等价于求解线性方程组

$$(C^{\mathrm{T}}C + \rho A_1^{\mathrm{T}}A_1)x_1 = C^{\mathrm{T}}d + \rho A_1^{\mathrm{T}}v^k.$$

- 虽然子问题有显式解，但是每步求解的复杂度仍然比较高，这时候可以考虑用**缓存分解**的方法．首先对$C^{\mathrm{T}}C + \rho A_1^{\mathrm{T}}A_1$进行Cholesky 分解并缓存分解的结果，在每步迭代中只需要求解简单的三角形方程组

- 当ρ发生更新时，就要重新进行分解．特别地，当$C^{\mathrm{T}}C + \rho A_1^{\mathrm{T}}A_1$一部分容易求逆，另一部分是低秩的情形时，可以用SMW公式来求逆．

优化转移

- 有时候为了方便求解子问题，可以用一个性质好的矩阵D近似二次项$A_1^\mathrm{T}A_1$, 此时子问题(12)替换为

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} = & \operatorname*{argmin}_{x_1} \left\{ f_1(x_1) + \frac{\rho}{2}\|A_1x_1 - v^k\|_2^2 \right. \\ & \left. + \frac{\rho}{2}(x_1 - x^k)^\mathrm{T}(D - A_1^\mathrm{T}A_1)(x_1 - x^k) \right\}. \end{aligned}$$

  这种方法也称为**优化转移**.

- 通过选取合适的D，当计算$\operatorname*{argmin}_{x_1} \left\{ f_1(x_1) + \frac{\rho}{2}x_1^\mathrm{T}Dx_1 \right\}$明显比计算$\operatorname*{argmin}_{x_1}\{f_1(x_1) + \frac{\rho}{2}x_1^\mathrm{T}A_1^\mathrm{T}A_1x_1\}$要容易时，优化转移可以极大地简化子问题的计算．特别地，当$D = \frac{\eta_k}{\rho}I$时，优化转移等价于做单步的近似点梯度步．

二次罚项系数的动态调节

- 原始可行性和对偶可行性分别用$\|r^k\|$和$\|s^k\|$度量.
- 求解过程中二次罚项系数ρ太大会导致原始可行性$\|r^k\|$下降很快，但是对偶可行性$\|s^k\|$下降很慢；二次罚项系数太小，则会有相反的效果．这样都会导致收敛比较慢或得到的解的可行性很差．
- 一个自然的想法是在每次迭代时动态调节惩罚系数ρ的大小，从而使得原始可行性和对偶可行性能够以比较一致的速度下降到零．一个简单有效的方式是令

$$\rho^{k+1} = \begin{cases} \gamma_p \rho^k, & \|r^k\| > \mu\|s^k\|, \\ \rho^k/\gamma_d & \|s^k\| > \mu\|r^k\|, \\ \rho^k, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中$\mu > 1, \gamma_p > 1, \gamma_d > 1$是参数, 常见的选择为$\mu = 10, \gamma_p = \gamma_d = 2$. 在迭代过程中将原始可行性$\|r^k\|$和对偶可行性$\|s^k\|$保持在彼此的$\mu$倍内．如果发现$\|r^k\|$或$\|s^k\|$下降过慢就应该相应增大或减小二次罚项系数$\rho^k$.

- 考虑有多块变量的情形

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2,\cdots,x_N} \quad & f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_N(x_N), \\ \text{s.t.} \quad & A_1x_1+A_2x_2+\cdots+A_Nx_N=b. \end{aligned} \tag{13}$$

  这里$f_i(x_i)$是闭凸函数，$x_i\in\mathbb{R}^{n_i}, A_i\in\mathbb{R}^{m\times n_i}$.

- 同样写出增广拉格朗日函数$L_\rho(x_1,x_2,\cdots,x_N,y)$，相应的多块ADMM 迭代格式为

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \operatorname*{argmin}_x L_\rho(x,x_2^k,\cdots,x_N^k,y^k), \\ x_2^{k+1} &= \operatorname*{argmin}_x L_\rho(x_1^{k+1},x,\cdots,x_N^k,y^k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N^{k+1} &= \operatorname*{argmin}_x L_\rho(x_1^{k+1},x_2^{k+1},\cdots,x,y^k), \\ y^{k+1} &= y^k+\tau\rho(A_1x_1^{k+1}+A_2x_2^{k+1}+\cdots+A_Nx_N^{k+1}-b), \end{aligned}$$

  其中$\tau\in(0,(\sqrt{5}+1)/2)$为步长参数.

提纲

LASSO 问题的Primal 形式

- LASSO 问题

$$\min \quad \mu\|x\|_1 + \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2.$$

转换为标准问题形式：

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 + \mu\|z\|_1, \\ \text{s.t.} \quad & x = z. \end{aligned}$$

- 交替方向乘子法迭代格式为

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \operatorname*{argmin}_x \left\{ \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 + \frac{\rho}{2}\|x - z^k + y^k/\rho\|_2^2 \right\}, \\ &= (A^{\mathrm{T}}A + \rho I)^{-1}(A^{\mathrm{T}}b + \rho z^k - y^k), \\ z^{k+1} &= \operatorname*{argmin}_z \left\{ \mu\|z\|_1 + \frac{\rho}{2}\|x^{k+1} - z + y^k/\rho\|^2 \right\}, \\ &= \operatorname{prox}_{(\mu/\rho)\|\cdot\|_1}\left(x^{k+1} + y^k/\rho\right), \\ y^{k+1} &= y^k + \tau\rho(x^{k+1} - z^{k+1}). \end{aligned}$$

LASSO 问题的Primal 形式

- 注意，因为$\rho > 0$，所以$A^{\mathrm{T}}A + \rho I$总是可逆的．x迭代本质上是计算一个岭回归问题（ℓ_2范数平方正则化的最小二乘问题）；而对z的更新为ℓ_1范数的邻近算子，同样有显式解．在求解x迭代时，若使用固定的罚因子ρ，我们可以缓存矩阵$A^{\mathrm{T}}A + \rho I$的初始分解，从而减小后续迭代中的计算量．
- 需要注意的是，在LASSO 问题中，矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$通常有较多的列（即$m \ll n$），因此$A^{\mathrm{T}}A \in \mathbb{R}^{n\times n}$是一个低秩矩阵，二次罚项的作用就是将$A^{\mathrm{T}}A$增加了一个正定项．该ADMM 主要运算量来自更新$x$变量时求解线性方程组，复杂度为$O(n^3)$
- 如果A 低秩，可以利用SMW公式计算

$$(A^{\mathrm{T}}A + \rho I)^{-1} = \rho^{-1}I - \rho^{-1}A^{\mathrm{T}}(\rho I + AA^{\mathrm{T}})^{-1}A$$

LASSO 问题的对偶形式

- 考虑LASSO 问题的对偶问题

$$\begin{aligned} \min \quad & b^{\mathrm{T}}y + \tfrac{1}{2}\|y\|^2, \\ \mathrm{s.t.} \quad & \|A^{\mathrm{T}}y\|_\infty \le \mu. \end{aligned} \tag{14}$$

- 引入约束$A^{\mathrm{T}}y + z = 0$，可以得到如下等价问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \underbrace{b^{\mathrm{T}}y + \frac{1}{2}\|y\|^2}_{f(y)} + \underbrace{I_{\|z\|_\infty \le \mu}(z)}_{h(z)}, \\ \mathrm{s.t.} \quad & A^{\mathrm{T}}y + z = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

- 对约束$A^{\mathrm{T}}y + z = 0$引入乘子x，对偶问题的增广拉格朗日函数为

$$L_\rho(y,z,x) = b^{\mathrm{T}}y + \frac{1}{2}\|y\|^2 + I_{\|z\|_\infty \le \mu}(z) - x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}y + z) + \frac{\rho}{2}\|A^{\mathrm{T}}y + z\|^2.$$

LASSO 问题的对偶形式

- 当固定y,x时，对z的更新即向无穷范数球$\{z|\|z\|_\infty \le \mu\}$做欧几里得投影，即将每个分量截断在区间$[-\mu,\mu]$中；当固定$z,x$时，对$y$的更新即求解线性方程组

$$(I+\rho AA^{\mathrm{T}})y = A(x^k - \rho z^{k+1}) - b.$$

- 因此得到ADMM 迭代格式为

$$\begin{aligned}
z^{k+1} &= \mathcal{P}_{\|z\|_\infty \le \mu}\left(x^k/\rho - A^{\mathrm{T}}y^k\right), \\
y^{k+1} &= (I+\rho AA^{\mathrm{T}})^{-1}\Big(A(x^k - \rho z^{k+1}) - b\Big), \\
x^{k+1} &= x^k - \tau\rho(A^{\mathrm{T}}y^{k+1} + z^{k+1}).
\end{aligned}$$

- 虽然ADMM 应用于对偶问题也需要求解一个线性方程组，但由于LASSO 问题的特殊性（$m \ll n$），求解y更新的线性方程组需要的计算量是$O(m^3)$，使用缓存分解技巧后可进一步降低至$O(m^2)$，这大大小于针对原始问题的ADMM．

- 对许多问题x本身不稀疏，但在某种变换下是稀疏的：

$$\min_x \quad \mu\|Fx\|_1 + \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2. \tag{16}$$

- 一个重要的例子是当$F \in \mathbb{R}^{(n-1)\times n}$是一阶差分矩阵

$$F_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1, \\ -1, & j = i, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

且$A = I$时，广义LASSO问题为

$$\min_x \quad \frac{1}{2}\|x - b\|^2 + \mu \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|,$$

这个问题就是图像去噪问题的TV模型；当$A = I$且F是二阶差分矩阵时，问题(16)被称为一范数趋势滤波．

广义LASSO问题

- 通过引入约束$Fx = z$:

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 + \mu\|z\|_1, \\ \text{s.t.} \quad & Fx - z = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

- 引入乘子y，其增广拉格朗日函数为

$$L_\rho(x, z, y) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2 + \mu\|z\|_1 + y^{\mathrm{T}}(Fx - z) + \frac{\rho}{2}\|Fx - z\|^2.$$

- 此问题的x迭代是求解方程组

$$(A^{\mathrm{T}}A + \rho F^{\mathrm{T}}F)x = A^{\mathrm{T}}b + \rho F^{\mathrm{T}}\left(z^k - \frac{y^k}{\rho}\right),$$

而z迭代依然通过ℓ_1范数的邻近算子.

- 因此交替方向乘子法所产生的迭代为

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= (A^{\mathrm{T}}A + \rho F^{\mathrm{T}}F)^{-1}\left(A^{\mathrm{T}}b + \rho F^{\mathrm{T}}\left(z^k - \frac{y^k}{\rho}\right)\right), \\
z^{k+1} &= \mathrm{prox}_{(\mu/\rho)\|\cdot\|_1}\left(Fx^{k+1} + \frac{y^k}{\rho}\right), \\
y^{k+1} &= y^k + \tau\rho(Fx^{k+1} - z^{k+1}).
\end{aligned}
$$

- 对于全变差去噪问题，$A^{\mathrm{T}}A + \rho F^{\mathrm{T}}F$是三对角矩阵，所以此时$x$迭代可以在$\mathcal{O}(n)$的时间复杂度内解决；对于图像去模糊问题，$A$是卷积算子，则利用傅里叶变换可将求解方程组的复杂度降低至$O(n\log n)$；对于一范数趋势滤波问题，$A^{\mathrm{T}}A + \rho F^{\mathrm{T}}F$是五对角矩阵，所以$x$迭代仍可以在$\mathcal{O}(n)$的时间复杂度内解决

考虑

$$
\begin{aligned}
\min_{X \in S^n} \quad & \langle C, X \rangle \\
\text{s.t.} \quad & \left\langle A^{(i)}, X \right\rangle = b_i, \quad i = 1, \cdots, m, \\
& X \succeq 0
\end{aligned}
$$

对偶问题为

$$
(D) \quad \begin{cases} \displaystyle\min_{y \in \mathbb{R}^m, S \in S^n} & -b^\top y \\ \quad\quad \text{s.t.} & \mathcal{A}^*(y) + S = C, \quad S \succeq 0, \end{cases}
$$

增广拉格朗日函数为

$$
\mathcal{L}_\mu(X, y, S) = -b^\top y + \langle X, \mathcal{A}^*(y) + S - C \rangle + \frac{1}{2\mu} \|\mathcal{A}^*(y) + S - C\|_F^2.
$$

ADMM迭代格式为

$$
\begin{aligned}
y^{k+1} &:= \arg\min_{y\in\mathbb{R}^m} \mathcal{L}_\mu(X^k,\ y,\ S^k), \\
&= -(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^{-1}\left(\mu(\mathcal{A}(X^k)-b)+\mathcal{A}(S^k-C)\right) \\
S^{k+1} &:= \arg\min_{S\in\mathcal{S}^n} \mathcal{L}_\mu(X^k,\ y^{k+1},\ S), \quad S\succeq 0, \\
X^{k+1} &:= X^k+\frac{\mathcal{A}^*(y^{k+1})+S^{k+1}-C}{\mu}.
\end{aligned}
$$

- 关于S的子问题:

$$
\min_{S\in\mathcal{S}^n} \quad \left\|S-V^{k+1}\right\|_F^2, \quad S\succeq 0,
$$

其中$V^{k+1}:=V(S^k,X^k)=C-\mathcal{A}^*(y(S^k,X^k))-\mu X^k$.
显示解为

$$
S^{k+1}:=V_\dagger^{k+1}:=Q_\dagger\Sigma_+Q_\dagger^\top
$$

其中$V^{k+1}=Q\Sigma Q^\top=\begin{pmatrix}Q_\dagger & Q_\ddagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma_+ & 0\\ 0 & \Sigma_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_\dagger^\top\\ Q_\ddagger^\top\end{pmatrix}$

更新拉格朗日乘子X^{k+1}

- 更新格式:

$$X^{k+1} := X^k + \frac{\mathcal{A}^*(y^{k+1}) + S^{k+1} - C}{\mu}$$

- 等价形式:

$$X^{k+1} = \frac{1}{\mu}(S^{k+1} - V^{k+1}) = \frac{1}{\mu} V_{\ddagger}^{k+1},$$

其中$V_{\ddagger}^{k+1} := -Q_{\ddagger}\Sigma_{-}Q_{\ddagger}$.

- 注意到X^{k+1} 也是如下优化问题的最优解

$$\min_{X \in S^n} \quad \left\|\mu X + V^{k+1}\right\|_F^2, \quad X \succeq 0.$$

稀疏逆协方差矩阵估计

- 该问题的基本形式是

$$\min_X \quad \langle S, X\rangle - \ln\det X + \mu\|X\|_1, \tag{18}$$

其中S是已知的对称矩阵，通常由样本协方差矩阵得到．变量$X \in \mathcal{S}^n_{++}$，$\|\cdot\|_1$定义为矩阵所有元素绝对值的和．

- 目标函数由光滑项和非光滑项组成，因此引入约束$X = Z$将问题的两部分分离：

$$\begin{aligned} \min \quad & \underbrace{\langle S, X\rangle - \ln\det X}_{f(X)} + \underbrace{\mu\|Z\|_1}_{h(Z)}, \\ \text{s.t.} \quad & X = Z. \end{aligned}$$

引入乘子U作用在约束$X - Z = 0$上，可得增广拉格朗日函数为

$$L_\rho(X, Z, U) = \langle S, X\rangle - \ln\det X + \mu\|Z\|_1 + \langle U, X - Z\rangle + \frac{\rho}{2}\|X - Z\|_F^2.$$

稀疏逆协方差矩阵估计

- 首先，固定Z^k, U^k，则X子问题是凸光滑问题，对X求矩阵导数并令其为零，

$$S - X^{-1} + U^k + \rho(X - Z^k) = 0.$$

这是一个关于X的矩阵方程，可以求出满足上述矩阵方程的唯一正定的X为

$$X^{k+1} = Q\mathrm{Diag}(x_1, x_2, \cdots, x_n)Q^{\mathrm{T}},$$

其中Q包含矩阵$S - \rho Z^k + U^k$的所有特征向量，x_i的表达式为

$$x_i = \frac{-d_i + \sqrt{d_i^2 + 4\rho}}{2\rho},$$

d_i为矩阵$S - \rho Z^k + U^k$的第i个特征值.

- 固定X^{k+1}, U^k，则Z的更新为矩阵ℓ_1 范数的邻近算子.
- 最后是常规的乘子更新.

- 考虑矩阵分离问题：

$$\begin{aligned} \min_{X,S} \quad & \|X\|_* + \mu\|S\|_1, \\ \text{s.t.} \quad & X + S = M, \end{aligned} \tag{19}$$

其中$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_*$分别表示矩阵ℓ_1范数与核范数.

- 引入乘子Y作用在约束$X+S=M$上，我们可以得到此问题的增广拉格朗日函数

$$L_\rho(X,S,Y) = \|X\|_* + \mu\|S\|_1 + \langle Y, X+S-M\rangle + \frac{\rho}{2}\|X+S-M\|_F^2. \tag{20}$$

- 对于X子问题，

$$
\begin{aligned}
X^{k+1} &= \operatorname*{argmin}_X \ L_\rho(X, S^k, Y^k) \\
&= \operatorname*{argmin}_X \left\{ \|X\|_* + \frac{\rho}{2} \left\| X + S^k - M + \frac{Y^k}{\rho} \right\|_F^2 \right\}, \\
&= \operatorname*{argmin}_X \left\{ \frac{1}{\rho} \|X\|_* + \frac{1}{2} \left\| X + S^k - M + \frac{Y^k}{\rho} \right\|_F^2 \right\}, \\
&= U \mathrm{Diag}\left(\mathrm{prox}_{(1/\rho)\|\cdot\|_1}(\sigma(A)) \right) V^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

其中$A = M - S^k - \frac{Y^k}{\rho}$，$\sigma(A)$为$A$的所有非零奇异值构成的向量并且$U\mathrm{Diag}(\sigma(A))V^{\mathrm{T}}$为$A$的约化奇异值分解.

矩阵分离问题

- 对于S子问题，

$$
\begin{aligned}
S^{k+1} &= \operatorname*{argmin}_{S} \ L_\rho(X^{k+1}, S, Y^k) \\
&= \operatorname*{argmin}_{S} \left\{ \mu\|S\|_1 + \frac{\rho}{2}\left\| X^{k+1} + S - M + \frac{Y^k}{\rho} \right\|_F^2 \right\} \\
&= \operatorname{prox}_{(\mu/\rho)\|\cdot\|_1}\left(M - X^{k+1} - \frac{Y^k}{\rho} \right).
\end{aligned}
$$

- 那么交替方向乘子法的迭代格式为

$$
\begin{aligned}
X^{k+1} &= U\mathrm{Diag}\left(\operatorname{prox}_{(1/\rho)\|\cdot\|_1}(\sigma(A))\right)V^{\mathrm{T}}, \\
S^{k+1} &= \operatorname{prox}_{(\mu/\rho)\|\cdot\|_1}\left(M - L^{k+1} - \frac{Y^k}{\rho} \right), \\
Y^{k+1} &= Y^k + \tau\rho(X^{k+1} + S^{k+1} - M).
\end{aligned}
$$

图像去噪模型

$$b = Kx_t + w$$

- x_t 为未知图像
- b 为观察到的图像，模糊且有噪声; w 为噪声
- $N \times N$的像素点按列储存为长为N^2的向量

模糊矩阵K

- 表示一个2维的卷积，是有空间不动点的扩散函数
- 满足周期边界条件，有循环块(circulant blocks)
- 可对角化，即存在酉的2维离散傅立叶变换矩阵W，使得

$$K = W^H \mathbf{diag}(\lambda) W.$$

系数矩阵为$I + K^T K$ 的线性方程组可在$O(N^2 \log N)$ 的时间内求解。

$$\begin{array}{ll} \min & \|Kx-b\|_1+\gamma\|Dx\|_{tv} \\ \text{s.t.} & 0 \le x \le 1 \end{array}$$

目标函数的第二项称为**全变差罚函数**

- Dx 是离散化的水平和垂直的方向导数

$$\begin{pmatrix} I\otimes D_1 \\ D_1\otimes I \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $\|\cdot\|_{tv}$是欧式距离的和：$\|(u,v)\|_{tv}=\sum_{i=1}^n\sqrt{u_i^2+v_i^2}$

ADMM求解图像去模糊问题

考虑对原问题进行拆分:

$$\min \ \|u\|_1 + \gamma\|v\|_{tv}, \ \ \text{s.t. } u = Kx - b, \ v = Dx, y = x, 0 \le y \le 1$$

ADMM 算法要求:

- 将$\|u\|_1$ 和$\|v\|_{tv}$的proximal算子以及在集合C上的投影这三部分分离
- 在$O(N^2 \log N)$的时间内求解系数矩阵为$I + K^T K + D^T D$ 的线性方程组

图像去模糊的实例

- 1024×1024的图像，满足周期边界条件
- 高斯模糊
- 椒盐噪声(salt-and-pepper noise)：50% 的像素点被随机替换为0/1

original

noisy/blurred

restored

全局一致性优化问题

$$\begin{aligned}\min_{x_i,z} \quad & \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x_i),\\ \text{s.t.} \quad & x_i - z = 0,\ i = 1, 2, \cdots, N.\end{aligned}$$

- 增广拉格朗日函数为

$$L_\rho(x_1, \cdots, x_N, z, y_1, \cdots, y_N) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x_i) + \sum_{i=1}^{N} y_i^{\mathrm{T}}(x_i - z) + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{N} \|x_i - z\|^2.$$

- 固定z^k, y_i^k，更新x_i的公式为

$$x_i^{k+1} = \operatorname*{argmin}_x \left\{ \phi_i(x) + \frac{\rho}{2} \left\| x - z^k + y_i^k/\rho \right\|^2 \right\}. \tag{21}$$

- 注意：虽然表面上看增广拉格朗日函数有$(N+1)$个变量块，但本质上还是两个变量块. 这是因为在更新某个x_i时并没有利用其他x_i，所有x_i可以看成一个整体. 相应地，所有乘子y_i也可以看成一个整体.

- 迭代式(21)的具体计算依赖于ϕ_i的形式，在一般情况下更新x_i的表达式为
$$x_i^{k+1} = \mathrm{prox}_{\phi_i/\rho}\left(z^k - y_i^k/\rho\right).$$
- 固定x_i^{k+1}, y_i^k，问题关于z是二次函数，因此可以直接写出显式解：
$$z^{k+1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{k+1} + y_i^k/\rho\right).$$
- 综上，该问题的交替方向乘子法迭代格式为
$$\begin{aligned} x_i^{k+1} &= \mathrm{prox}_{\phi_i/\rho}\left(z^k - y_i^k/\rho\right), \ i = 1, 2, \cdots, N, \\ z^{k+1} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^{k+1} + y_i^k/\rho\right), \\ y_i^{k+1} &= y_i^k + \tau\rho(x_i^{k+1} - z^{k+1}), \ i = 1, 2, \cdots, N. \end{aligned}$$

形式一：考虑f是不可分(inseparable)函数，g是可分(separable)函数

$$\min_{\mathbf{x},\mathbf{z}} \sum_{l=1}^{L} (f_l(\mathbf{x}) + g_l(\mathbf{z}_l)), \text{ s.t. } \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{b}$$

- 将$\mathbf{x}$复制L份: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_L$
- 拆分矩阵和向量

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_L \end{bmatrix}, \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_L \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_L \end{bmatrix}$$

将$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$转化为

$$\mathbf{A}_l\mathbf{x}_l + \mathbf{z}_l = \mathbf{b}_l, \mathbf{x}_l - \mathbf{x} = \mathbf{0}, l = 1, \cdots, L.$$

分布式ADMM I

模型一：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x},\{\mathbf{x}_l\},\mathbf{z}} \quad & \sum_{l=1}^{L} (f_l(\mathbf{x}_l) + g_l(\mathbf{z}_l)) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_l\mathbf{x}_l + \mathbf{z}_l = \mathbf{b}_l, \mathbf{x}_l - \mathbf{x} = \mathbf{0}, l = 1, \cdots, L. \end{aligned}$$

- $\mathbf{x}_l$ 是$\mathbf{x}$ 的备份
- $\mathbf{z}_l$是$\mathbf{z}$的一部分
- 将$\{\mathbf{x}_l\}, \mathbf{z}, \mathbf{x}$分为两块
  - $\{\mathbf{x}_l\}$: 给定$\mathbf{z}$ 和$\mathbf{x}$，$\mathbf{x}_l$的更新是可分的
  - $(\mathbf{z}, \mathbf{x})$: 给定$\{\mathbf{x}_l\}$，$\mathbf{z}_l$ 和$\mathbf{x}$ 的更新也是可分的

  因此可以使用标准的2块的ADMM算法
- 还可以在目标函数中加入简单的正则项$h(\mathbf{x})$

分布式ADMM I

考虑用MPI建立L个计算节点。

- $\mathbf{A}_l$ 是仅储存在节点l 上的局部数据
- $\mathbf{x}_l, \mathbf{z}_l$ 是局部变量，$\mathbf{x}_l$ 仅在节点l上 储存和更新
- $\mathbf{x}$ 是全局变量，由MPI指派和计算
- $\mathbf{y}_l, \bar{\mathbf{y}}_l$ 分别是$\mathbf{A}_l\mathbf{x}_l + \mathbf{z}_l = \mathbf{b}_l$ 和$\mathbf{x}_l - \mathbf{x} = \mathbf{0}$对应的拉格朗日乘子，仅在节点$l$上 储存和更新

每次迭代中，

- 每个节点l 各自使用数据$\mathbf{A}_l$计算$\mathbf{x}_l^{k+1}$
- 每个节点l各自计算$\mathbf{z}_l^{k+1}$，并准备$\mathbf{P}_l = (\cdots)$
- MPI 收集$\mathbf{P}_l$ 并将他们的平均值$\mathbf{x}^{k+1}$ 分发到各节点上
- 每个节点l 各自计算乘子$\mathbf{y}_l^{k+1}, \bar{\mathbf{y}}_l^{k+1}$

分布式ADMM II

形式二：考虑f 和g均是可分的函数

$$\min \sum_{j=1}^{N} f_j(\mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^{M} g_i(\mathbf{z}_i), \ \text{s.t.}\ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{b},$$

其中

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N), \mathbf{z} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_M).$$

将$\mathbf{A}$ 分解为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1N} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2N} \\ & & \cdots & \\ \mathbf{A}_{M1} & \mathbf{A}_{M2} & \cdots & \mathbf{A}_{MN} \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_M \end{bmatrix}.$$

我们可以得到类似的模型

$$\min \sum_{j=1}^{N} f_j(\mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^{M} g_i(\mathbf{z}_i), \ \text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{N} \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j + \mathbf{z}_i = \mathbf{b}_i, i = 1, \cdots, M.$$

分布式ADMM II

注意到$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j'$在约束中是耦合的，因此令

$$\mathbf{p}_{ij} = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j,$$

模型二：

$$\min \sum_{j=1}^{N} f_j(\mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^{M} g_i(\mathbf{z}_i), \text{ s.t. } \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{p}_{ij} + \mathbf{z}_i = \mathbf{b}_i, \forall i, \\ \mathbf{p}_{ij} - \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j = 0, \forall i, j. \end{array}$$

ADMM迭代

- 交替更新$\{\mathbf{p}_{ij}\}$ 和$(\{\mathbf{x}_j\}, \{\mathbf{z}_i\})$
- 关于$\mathbf{p}_{ij}$ 的子问题有闭形式解
- 关于$(\{\mathbf{x}_j\}, \{\mathbf{z}_i\})$的子问题对$\mathbf{x}_j$ 和$\mathbf{z}_i$是可分的
    - $\mathbf{x}_j$的更新需要f_j 和$\mathbf{A}_{1j}^T\mathbf{A}_{1j}, \cdots, \mathbf{A}_{Mj}^T\mathbf{A}_{Mj}$;
    - $\mathbf{z}_i$的更新需要g_i.

思考：如何进一步将f_j和$\mathbf{A}_{1j}^T\mathbf{A}_{1j}, \cdots, \mathbf{A}_{Mj}^T\mathbf{A}_{Mj}$ 去耦合?

对每个$\mathbf{x}_j$，作M 个独立的备份$\mathbf{x}_{1j}, \mathbf{x}_{2j}, \cdots, \mathbf{x}_{Mj}$.
模型三：

$$\min \sum_{j=1}^{N} f_j(\mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^{M} g_i(\mathbf{z}_i), \ \text{s.t.} \ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{p}_{ij} + \mathbf{z}_i = \mathbf{b}_i, & \forall i, \\ \mathbf{p}_{ij} - \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{0}, & \forall i, j, \\ \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{ij} = \mathbf{0}, & \forall i, j. \end{array}$$

ADMM

- 交替更新$(\{\mathbf{x}_j\}, \{\mathbf{p}_{ij}\})$ 和$(\{\mathbf{x}_j\}, \{\mathbf{z}_i\})$
- 关于$(\{\mathbf{x}_j\}, \{\mathbf{p}_{ij}\})$的子问题是可分的
  - $\mathbf{x}_j$的更新只需要f_j ，即只需计算prox_{f_j}
  - $\mathbf{p}_{ij}$的更新有闭形式解
- 关于$(\{\mathbf{x}_{ij}\}, \{\mathbf{z}_i\})$的子问题也是可分的
  - $\mathbf{x}_{ij}$的更新需要$(\alpha I + \beta \mathbf{A}_{ij}^T \mathbf{A}_{ij})$;
  - $\mathbf{y}_i$的更新只需要g_i，即只需计算prox_{g_i}.

去中心化ADMM

对$\mathbf{x}$进行局部备份得到$\mathbf{x}_i$，不使用约束

$$\mathbf{x}_i - \mathbf{x} = 0, i = 1, \cdots, M,$$

而是考虑图$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \varepsilon)$ 其中$\mathcal{V}$为顶点集，ε为边集。

根据图$\mathcal{G}$建立约束

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j = \mathbf{0}, &\quad \forall (i,j) \in \varepsilon, \quad \text{or} \\ \mathbf{x}_i - \mathbf{z}_{ij} = \mathbf{0}, \mathbf{x}_j - \mathbf{z}_{ij} = \mathbf{0} &\quad \forall (i,j) \in \varepsilon, \quad \text{or} \\ \text{mean}\{\mathbf{x}_j : (i,j) \in \varepsilon\} - \mathbf{x}_i = \mathbf{0}, &\quad \forall i \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

去中心化ADMM

- 去中心化ADMM在互相连接的网络上运行
- 没有控制和分发数据的中心
- 应用:
  - wireless sensor networks
  - collaborative learning
- 去中心化ADMM交替进行如下步骤
  - 每个节点进行局部计算
  - 相邻节点交流或传播信息
- 因为数据没有共享或储存于某个中心，因此数据安全性得到保证
- 算法的收敛速度受如下条件影响
  - 问题的性质，如目标函数的凸性，问题的条件数等
  - 图的规模，连通性，谱性质等

V. Chandrasekaran, P.Parrilo, A. Willsky

包含正则项的极大似然模型

$$\min_{R,S,L} \langle R, \hat{\Sigma}_X \rangle - \text{log det}(R) + \alpha \|S\|_1 + \beta Tr(L), \text{ s.t. } R = S - L, R \succ 0, L \succeq 0,$$

其中X为观察到的变量, $\Sigma_X^{-1} \approx R = S - L$, S稀疏, L低秩. 目标函数的前两项来自对数极大似然函数

$$l(K;\Sigma) = \log\det(K) - \mathrm{tr}(K\Sigma).$$

引入指示函数

$$\mathcal{I}(L \succeq 0) := \begin{cases} 0, & \textit{if } L \succeq 0 \\ +\infty, & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

模型可以改写为3项的ADMM算法

$$\min_{R,S,L} \langle R, \hat{\Sigma}_X \rangle - \text{log det}(R) + \alpha \|S\|_1 + \beta \text{Tr}(L) + \mathcal{I}(L \succeq 0), \text{ s.t. } R - S + L = 0.$$

稳定主成分追踪(PCP)

模型一：

$$\begin{aligned} \min_{L,S,Z} \quad & \|L\|_* + \rho\|S\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & L + S + Z = M \\ & \|Z\|_F \le \sigma, \end{aligned}$$

注：$M =$ 低秩矩阵+ 稀疏矩阵+ 噪声.
在图像处理中还要加入非负约束$L \ge 0$.
模型二：

$$\begin{aligned} \min_{L,S,Z,K} \quad & \|L\|_* + \rho\|S\|_1 + \mathcal{I}(\|Z\|_F \le \sigma) + \mathcal{I}(K \ge 0) \\ \text{s.t.} \quad & L + S + Z = M \\ & L - K = 0. \end{aligned}$$

约束可以整合为

$$\begin{pmatrix} I & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L \\ S \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix}.$$

混合全变差和l_1正则

原始模型：

$$\min_x \; TV(x) + \alpha\|Wx\|_1, \; \text{s.t. } \|Rx-b\|_2 \le \sigma.$$

新模型：

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \Sigma_i \|z_i\|_2 + \alpha\|Wx\|_1 + \mathcal{I}(\|y\|_2 \le \sigma) \\ \text{s.t.} \quad & z_i = D_i x, \forall i = 1, \cdots, N \\ & y = Rx - b. \end{aligned}$$

将变量分为两块：x 和$(y, \{z_i\})$

$$\begin{pmatrix} R \\ D_1 \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} y \\ z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

x的子问题不易求解.

将变量去耦合的方法

- 使用线性化技巧简化proximal算子，进行非精确更新
- 引入新变量作为桥梁，类似分布式ADMM

例如考虑如下问题

$$\min_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{y}} (f_1(\mathbf{x}_1)+f_2(\mathbf{x}_2))+g(\mathbf{y}), \ \text{s.t.} \ (\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1+\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2)+\mathbf{B}\mathbf{y}=\mathbf{b}.$$

在ADMM迭代中$(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$的子问题中$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$是耦合的，但是进行线性化后$\mathbf{x}_1$和$\mathbf{x}_2$的子问题是独立的.

$$\min_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2}(f_1(\mathbf{x}_1)+f_2(\mathbf{x}_2))+\left\langle \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2t}\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^k \\ \mathbf{x}_2^k \end{bmatrix} \right\|_2^2.$$

非凸约束问题

考虑如下约束优化问题：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & f(\boldsymbol{x}), \\ s.t. \quad & \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}, \end{aligned}$$

其中f是凸的，但是$\mathcal{S}$是非凸的。可以将上述问题改写为：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & f(\boldsymbol{x}) + \mathbb{I}_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{z}), \\ s.t. \quad & \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

交替方向乘子法产生如下迭代：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{k+1} &= \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}} \left(f(\boldsymbol{x}) + (\rho/2)\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}^k + \boldsymbol{u}^k\|_2^2\right), \\ \boldsymbol{z}^{k+1} &= \Pi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{x}^{k+1} + \boldsymbol{u}^k), \\ \boldsymbol{u}^{k+1} &= \boldsymbol{u}^k + (\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{z}^{k+1}) \end{aligned}$$

其中，$\Pi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{z})$是将$\boldsymbol{z}$投影到集合$\mathcal{S}$中。因为$f$是凸的，所以上述$\boldsymbol{x}$-极小化步是凸问题，但是$\boldsymbol{z}$-极小化步是向一个非凸集合的投影。

一般来说，这种投影很难计算，但是在下面列出的这些特殊情形中可以精确求解。

- 基数：如果$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{card}(\boldsymbol{x}) \le c\}$，其中$\boldsymbol{card}(\boldsymbol{v})$表示非零元素的数目，那么$\Pi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{v})$保持前$c$大的元素不变，其他元素变为0。
  例如回归选择（也叫特征选择）问题：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \quad & \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2, \\ s.t. \quad & \boldsymbol{card}(\boldsymbol{x}) \le c. \end{aligned}$$

- 秩：如果$\mathcal{S}$是秩为c的矩阵的集合，那么$\boldsymbol{card}(\boldsymbol{V})$可以通过对$\boldsymbol{V}$做奇异值分解，$\boldsymbol{V} = \sum_i \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T$，然后保留前$c$大的奇异值及奇异向量，即$\Pi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{V}) = \sum_{i=1}^{c} \sigma_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T$。
- 布尔约束：如果$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x}_i \in \{0, 1\}\}$，那么$\Pi_{\mathcal{S}}(\boldsymbol{v})$就是简单地把每个元素变为0和1中离它更近的数。

非负矩阵分解和补全问题可以写成如下形式：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}} \quad & \|\mathcal{P}_\Omega(\boldsymbol{XY}-\boldsymbol{M})\|_F^2, \\ s.t. \quad & \boldsymbol{X}_{ij} \geq 0, \boldsymbol{Y}_{ij} \geq 0, \forall i,j, \end{aligned}$$

其中，Ω表示矩阵$\boldsymbol{M}$中的已知元素的下标集合，$\mathcal{P}_\Omega(\boldsymbol{A})$表示得到一个新的矩阵$\boldsymbol{A}'$，其下标在集合$\Omega$中的所对应的元素等于矩阵$\boldsymbol{A}$的对应元素，其下标不在集合$\Omega$中的所对应的元素为0。注意到，这个问题是非凸的。

为了利用交替方向乘子法的优势，我们考虑如下的等价形式：

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}} \quad & \frac{1}{2}\|\boldsymbol{XY}-\boldsymbol{Z}\|_F^2, \\ s.t. \quad & \boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}, \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{V}, \\ & \boldsymbol{U} \geq 0, \boldsymbol{V} \geq 0, \\ & \mathcal{P}_\Omega(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{M}) = 0. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Pi}) = {} & \frac{1}{2}\|\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z}\|_F^2 + \boldsymbol{\Lambda}\bullet(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{U}) \\
& + \boldsymbol{\Pi}\bullet(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{V}) + \frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{U}\|_F^2 + \frac{\beta}{2}\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{V}\|_F^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{X}^{k+1} &= \underset{\boldsymbol{X}}{\operatorname{argmin}}\ L_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}^k,\boldsymbol{Z}^k,\boldsymbol{U}^k,\boldsymbol{V}^k,\boldsymbol{\Lambda}^k,\boldsymbol{\Pi}^k),\\
\boldsymbol{Y}^{k+1} &= \underset{\boldsymbol{Y}}{\operatorname{argmin}}\ L_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{X}^{k+1},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}^k,\boldsymbol{U}^k,\boldsymbol{V}^k,\boldsymbol{\Lambda}^k,\boldsymbol{\Pi}^k),\\
\boldsymbol{Z}^{k+1} &= \underset{\mathcal{P}_\Omega(\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{M})=0}{\operatorname{argmin}}\ L_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{X}^{k+1},\boldsymbol{Y}^{k+1},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{U}^k,\boldsymbol{V}^k,\boldsymbol{\Lambda}^k,\boldsymbol{\Pi}^k),\\
\boldsymbol{U}^{k+1} &= \underset{\boldsymbol{U}\geq 0}{\operatorname{argmin}}\ L_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{X}^{k+1},\boldsymbol{Y}^{k+1},\boldsymbol{Z}^{k+1},\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}^k,\boldsymbol{\Lambda}^k,\boldsymbol{\Pi}^k),\\
\boldsymbol{V}^{k+1} &= \underset{\boldsymbol{V}\geq 0}{\operatorname{argmin}}\ L_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{X}^{k+1},\boldsymbol{Y}^{k+1},\boldsymbol{Z}^{k+1},\boldsymbol{U}^{k+1},\boldsymbol{V},\boldsymbol{\Lambda}^k,\boldsymbol{\Pi}^k),\\
\Lambda^{k+1} &= \Lambda^k + \tau\alpha(\boldsymbol{X}^{k+1}-\boldsymbol{U}^{k+1}),\\
\Pi^{k+1} &= \Pi^k + \tau\beta(\boldsymbol{Y}^{k+1}-\boldsymbol{V}^{k+1}).
\end{aligned}
$$

提纲

Douglas-Rachford splitting算法

考虑复合优化问题

$$\min \quad f(x) = g(x) + h(x)$$

其中g, h 是闭凸函数.

Douglas-Rachford迭代: 从任意初始点z^0开始，

$$\begin{aligned} x^k &= \mathrm{prox}_{th}(z^{k-1}) \\ y^k &= \mathrm{prox}_{tg}(2x^k - z^{k-1}) \\ z^k &= z^{k-1} + y^k - x^k \end{aligned}$$

- t为正常数
- 通常用于g, h 的proximal算子计算代价较小的场景
- 在较弱的条件下(如极小点存在)，迭代点列x^k收敛

等价形式

- 从y的更新开始

$$y^+ = \mathrm{prox}_{tg}(2x - z); \quad z^+ = z + y^+ - x; \quad x^+ = \mathrm{prox}_{th}(z^+)$$

- 交换z和x的更新顺序

$$y^+ = \mathrm{prox}_{tg}(2x - z); \quad x^+ = \mathrm{prox}_{th}(z + y^+ - x); \quad z^+ = z + y^+ - x$$

- 作变量替换$w = z - x$

DR 迭代的等价形式: 从任意初始点$x^0 \in \mathbf{dom}\, h, w^0 \in t\partial h(x^0)$开始

$$\begin{aligned} y^+ &= \mathrm{prox}_{tg}(x - w) \\ x^+ &= \mathrm{prox}_{th}(y^+ + w) \\ w^+ &= w + y^+ - x^+ \end{aligned}$$

DR迭代和不动点迭代

Douglas-Rachford迭代可以写成不动点迭代的形式

$$z^k = F(z^{k-1}),$$

其中$F(z) = z + \mathrm{prox}_{tg}(2\mathrm{prox}_{th}(z) - z) - \mathrm{prox}_{th}(z)$

DR迭代和不动点迭代的关系

- 若z是不动点，则$x = \mathrm{prox}_{th}(z)$是目标函数的极小点

$$\begin{aligned} z = F(z), \quad x = prox_{th}(z) &\Rightarrow \mathrm{prox}_{tg}(2x - z) = x = \mathrm{prox}_{th}(z) \\ &\Rightarrow x - z \in t\partial g(x); z - x \in t\partial h(x) \\ &\Rightarrow 0 \in t\partial g(x) + t\partial h(x) \end{aligned}$$

- 若x是目标函数的极小点，$u \in t\partial g(x) \cap -t\partial h(x)$，则$x - u = F(x - u)$

Douglas-Rachford迭代的松弛形式

- 不动点迭代的松弛形式

$$z^+ = z + \rho(F(z) - z)$$

$1 < \rho < 2$ 称为超松弛，$0 < \rho < 1$称为次松弛

- DR迭代的松弛形式一

$$\begin{aligned} x^+ &= \mathrm{prox}_{th}(z) \\ y^+ &= \mathrm{prox}_{tg}(2x^+ - z) \\ z^+ &= z + \rho(y^+ - x^+) \end{aligned}$$

- DR迭代的松弛形式二

$$\begin{aligned} y^+ &= \mathrm{prox}_{tg}(x - w) \\ x^+ &= \mathrm{prox}_{th}((1-\rho)x + \rho y^+ + w) \\ w^+ &= w + \rho y^+ + (1-\rho)x - x^+ \end{aligned}$$

凸的原始问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f_1(x_1) + f_2(x_2) \\ \text{s.t.} \quad & A_1x_1 + A_2x_2 = b \end{aligned}$$

对偶问题

$$\max \quad -b^Tz - f_1^*(-A_1^Tz) - f_2^*(-A_2^Tz)$$

对对偶问题应用Douglas-Rachford 迭代：

$$\underbrace{b^Tz + f_1^*(-A_1^Tz)}_{g(z)} + \underbrace{f_2^*(-A_2^Tz)}_{h(z)}$$

$$
\begin{aligned}
y^{k+1} &= \mathrm{prox}_{tg}(x^k - w^k), \\
x^{k+1} &= \mathrm{prox}_{th}(w^k + y^{k+1}), \\
w^{k+1} &= w^k + y^{k+1} - x^{k+1}.
\end{aligned}
$$

- 第一式的最优性条件为

$$
0 \in tb - tA_1 \partial f_1^*(-A_1^{\mathrm{T}} y^{k+1}) - x^k + w^k + y^{k+1},
$$

上式等价于存在$x_1^k \in \partial f_1^*(-A_1^{\mathrm{T}} y^{k+1})$，使得

$$
y^{k+1} = x^k - w^k + t(A_1 x_1^k - b).
$$

这就是如下更新的最优性条件.

$$
x_1^k = \mathop{\mathrm{argmin}}_{x_1} \left\{ f_1(x_1) + (x^k)^{\mathrm{T}}(A_1 x_1 - b) + \frac{t}{2} \|A_1 x_1 - b - w^k/t\|_2^2 \right\}.
$$

- 类似地，第二式的最优性条件为

$$0 \in tA_2\partial f_2^*(-A_2^\mathrm{T}x^{k+1}) + w^k + y^{k+1} - x^{k+1},$$

其等价于存在$x_2^k \in \partial f_2^*(-A_2^\mathrm{T}x^{k+1})$，使得

$$x^{k+1} = x^k + t(A_1x_1^k + A_2x_2^k - b).$$

进一步等价于如下更新的最优性条件.

$$x_2^k = \underset{x_2}{\operatorname{argmin}} \left\{ f_2(x_2) + (x^k)^\mathrm{T}(A_2x_2) + \frac{t}{2}\|A_1x_1^k + A_2x_2 - b\|_2^2 \right\}.$$

- 由第一、第二式的等价形式整理可得$w^{k+1} = -tA_2x_2^k$.

DR迭代与ADMM

定义增广拉格朗日函数

$$L_t(x_1, x_2, z) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + z^T(A_1x_1 + A_2x_2 - b) + \frac{t}{2}\|A_1x_1 + A_2x_2 - b\|_2^2$$

1. 关于x_1极小化增广拉格朗日函数

$$\begin{aligned} x_1^k &= \operatorname*{argmin}_{x_1} L_t(x_1, x_2^{k-1}, z^{k-1}) \\ &= \operatorname*{argmin}_{x_1} \left(f_1(x_1) + (z^{k-1})^T A_1x_1 + \frac{t}{2}\|A_1x_1 + A_2x_2^{k-1} - b\|_2^2 \right) \end{aligned}$$

2. 关于x_2极小化增广拉格朗日函数

$$\begin{aligned} x_2^k &= \operatorname*{argmin}_{x_2} L_t(x_1^k, x_2, z^{k-1}) \\ &= \operatorname*{argmin}_{x_2} \left(f_2(x_2) + (z^{k-1})^T A_2x_2 + \frac{t}{2}\|A_1x_1^k + A_2x_2 - b\|_2^2 \right) \end{aligned}$$

3. 对偶变量更新$z^k = z^{k-1} + t(A_1x_1^k + A_2x_2^k - b)$

非扩张函数

定义

函数f 称为非扩张的*(non-expansive)*, 若

$$\|x-y\|^2 \geq \|f(x)-f(y)\|^2;$$

函数f称为固定非扩张的*(firmly non-expansive)*, 若

$$(f(x)-f(y))^\top(x-y) \geq \|f(x)-f(y)\|^2.$$

定理：prox_h 是固定非扩张的，进而也是非扩张的，因而是Lipschitz连续的(常数为1).

- 设$u=\mathrm{prox}_h(x), v=\mathrm{prox}_h(y)$，由proximal算子的性质

$$x-u\in\partial h(u), y-v\in\partial h(v) \quad \Rightarrow \quad (x-u-y+v)^\top(u-v)\geq 0$$

- 由柯西不等式, $\|u-v\|^2 \leq (x-y)^\top(u-v) \leq \|x-y\|\|u-v\|$, 因此

$$\|\mathrm{prox}_h(x)-\mathrm{prox}_h(y)\|_2 \leq \|x-y\|_2.$$

定义迭代映射F, G如下

$$
\begin{aligned}
F(z) &= z + \mathrm{prox}_{tg}(2\mathrm{prox}_{th}(z) - z) - \mathrm{prox}_{th}(z) \\
G(z) &= z - F(z) \\
&= \mathrm{prox}_{th}(z) - \mathrm{prox}_{tg}(2\mathrm{prox}_{th}(z) - z)
\end{aligned}
$$

- F 是固定非扩张的

$$
(F(z) - F(\hat{z}))^T(z - \hat{z}) \geq \|F(z) - F(\hat{z})\|_2^2 \quad \forall z, \hat{z}
$$

- 进而G 也是固定非扩张的

$$
\begin{aligned}
& (G(z) - G(\hat{z}))^T(z - \hat{z}) \\
= \ & \|G(z) - G(\hat{z})\|_2^2 + (F(z) - F(\hat{z}))^T(z - \hat{z}) - \|F(z) - F(\hat{z})\|_2^2 \\
\geq \ & \|G(z) - G(\hat{z})\|_2^2
\end{aligned}
$$

F固定非扩张性的证明.

- 设$x = \mathrm{prox}_{th}(z), \hat{x} = \mathrm{prox}_{th}(\hat{z})$, 以及

$$y = \mathrm{prox}_{tg}(2x - z), \quad \hat{y} = \mathrm{prox}_{tg}(2\hat{x} - \hat{z})$$

- 代入$F(z) = z + y - x$ 和$F(\hat{z}) = \hat{z} + \hat{y} - \hat{x}$:

$$\begin{aligned}
&(F(z) - F(\hat{z}))^T(z - \hat{z}) \\
&\geq (z + y - x - \hat{z} - \hat{y} + \hat{x})^T(z - \hat{z}) - (x - \hat{z})^T(z - \hat{z}) + \|x - \hat{x}\|_2^2 \\
&= (y - \hat{y})^T(z - \hat{z}) + \|z - x - \hat{z} + \hat{x}\|_2^2 \\
&= (y - \hat{y})^T(2x - z - 2\hat{x} + \hat{z}) - \|y - \hat{y}\|_2^2 + \|F(z) - F(\hat{z})\|_2^2 \\
&\geq \|F(z) - F(\hat{z})\|_2^2
\end{aligned}$$

其中用到了prox_{th}和prox_{tg} 的固定非扩张性

$$(x - \hat{x})^T(z - \hat{z}) \geq \|x - \hat{x}\|_2^2, \quad (2x - z - 2\hat{x} + \hat{z})^T(y - \hat{y}) \geq \|y - \hat{y}\|_2^2$$

$\square$

不动点迭代格式

$$\begin{aligned} z^k &= (1-\rho_k)z^{k-1} + \rho_k F(z^{k-1}) \\ &= z^{k-1} - \rho_k G(z^{k-1}) \end{aligned}$$

假设

- 最优值$f^* = \inf_x(g(x) + h(x))$ 有些且可取到
- $\rho_k \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$, 其中$0 < \rho_{\min} < \rho_{\max} < 2$

结论

- z^k 收敛到F 的不动点z^*
- $x^k = \mathrm{prox}_{th}(z^{k-1})$ 收敛到原目标函数的极小点$x^* = \mathrm{prox}_{th}(z^*)$ (利用prox_{th} 的连续性)

Proof.

设z^* 为$F(z)$ 的任意不动点，即为$G(z)$的零点. 考虑第k步迭代，记$z = z^{k-1}, \rho = \rho_k, z^+ = z^k$, 则

$$\begin{aligned} \|z^+ - z^*\|_2^2 - \|z - z^*\|_2^2 &= 2(z^+ - z)^T(z - z^*) + \|z^+ - z\|_2^2 \\ &= -2\rho G(z)^T(z - z^*) + \rho^2\|G(z)\|_2^2 \\ &\le -\rho(2-\rho)\|G(z)\|_2^2 \\ &\le -M\|G(z)\|_2^2 \end{aligned} \tag{22}$$

其中$M = \rho_{\min}(2 - \rho_{\max})$, 第三行用到了$G$的固定非扩张性.

- (22) 可以推出

$$M\sum_{k=0}^{\infty}\|G(z^k)\|_2^2 \le \|z^0 - z^*\|_2^2, \quad \|G(z^k)\|_2 \to 0$$

- 并且$\|z^k - z^*\|_2$不增；进而z^k 有界
- 因为$\|z^k - z^*\|_2$ 不增, 因此极限$\lim_{k\to\infty}\|z^k - z^*\|_2$ 存在

Proof.

- 因为迭代点列z^k 有界，因此它有收敛子列
- 设$\bar{z}_k$ 收敛子列，极限为$\bar{z}$; 由G的连续性,

$$0 = \lim_{k\to\infty} G(\bar{z}_k) = G(\bar{z})$$

因此$\bar{z}$ 是G 的零点，且极限$\lim_{k\to\infty} \|z^k - \bar{z}\|_2$ 存在

- 设存在两个子列分别收敛于$\bar{z}_1, \bar{z}_2$, 即极限

$$\lim_{k\to\infty} \|z^{k_{j_1}} - \bar{z}_1\|_2, \quad \lim_{k\to\infty} \|z^{k_{j_2}} - \bar{z}_2\|_2$$

均存在, 则由z^k 的收敛性知

$$\|\bar{z}_2 - \bar{z}_1\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|z^k - \bar{z}_1\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|z^k - \bar{z}_2\|_2 = 0$$

□

提纲

假设

我们先引入一些必要的假设.

- $f_1(x), f_2(x)$均为闭凸函数，且每个ADMM 迭代子问题存在唯一解；
- 原始问题的解集非空，且Slater 条件满足.

注：假设给出的条件是很基本的.

- f_1和f_2的凸性保证了要求解的问题是凸问题，每个子问题存在唯一解是为了保证迭代的良定义
- 在Slater 条件满足的情况下，原始问题的KKT 对和最优解是对应的，因此可以很方便地使用KKT 条件来讨论收敛性.

由于原始问题解集非空，不妨设(x_1^*,x_2^*,y^*)是KKT 对，即满足条件

$$-A_1^{\mathrm{T}}y^* \in \partial f_1(x_1^*), \quad -A_2^{\mathrm{T}}y^* \in \partial f_2(x_2^*), \quad A_1x_1^* + A_2x_2^* = b.$$

我们最终的目的是证明ADMM 迭代序列$\{(x_1^k,x_2^k,y^k)\}$收敛到原始问题的一个KKT 对，因此引入如下记号来表示当前迭代点和KKT 对的误差：

$$(e_1^k,e_2^k,e_y^k) \stackrel{\text{def}}{=\!=} (x_1^k,x_2^k,y^k) - (x_1^*,x_2^*,y^*).$$

我们进一步引入如下辅助变量来简化之后的证明：

$$\begin{aligned}
u^k &= -A_1{}^{\mathrm{T}}[y^k + (1-\tau)\rho(A_1e_1^k + A_2e_2^k) + \rho A_2(x_2^{k-1} - x_2^k)], \\
v^k &= -A_2{}^{\mathrm{T}}[y^k + (1-\tau)\rho(A_1e_1^k + A_2e_2^k)], \\
\Psi_k &= \frac{1}{\tau\rho}\|e_y^k\|^2 + \rho\|A_2e_2^k\|^2, \\
\Phi_k &= \Psi_k + \max\,(1-\tau, 1-\tau^{-1})\rho\|A_1e_1^k + A_2e_2^k\|^2.
\end{aligned} \tag{23}$$

引理

假设$\{(x_1^k, x_2^k, y^k)\}$为交替方向乘子法产生一个迭代序列，那么，对任意的$k \geq 1$有

$$u^k \in \partial f_1(x_1^k),\ v^k \in \partial f_2(x_2^k), \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\Phi_k - \Phi_{k+1} \geq & \min(\tau, 1+\tau-\tau^2)\rho\|A_2(x_2^k - x_2^{k+1})\|^2 \\ & + \min(1, 1+\tau^{-1}-\tau)\rho\|A_1e_1^{k+1} + A_2e_2^{k+1}\|^2. \end{aligned} \tag{25}$$

注：只有当$\tau \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$时，(25) 式中不等号右侧的项才为非负．

ADMM的收敛性分析

Proof.

先证明(24)式的两个结论．根据交替方向乘子法的迭代过程，对x_1^{k+1}我们有

$$0 \in \partial f_1(x_1^{k+1}) + A_1^{\mathrm{T}} y^k + \rho A_1^{\mathrm{T}}(A_1 x_1^{k+1} + A_2 x_2^k - b).$$

将$y^k = y^{k+1} - \tau\rho(A_1 x_1^{k+1} + A_2 x_2^{k+1} - b)$代入上式，消去$y^k$就有

$$-A_1^{\mathrm{T}}\left(y^{k+1} + (1-\tau)\rho(A_1 x_1^{k+1} + A_2 x_2^{k+1} - b) + \rho A_2(x_2^k - x_2^{k+1})\right) \in \partial f_1(x_1^{k+1}).$$

根据u^k的定义自然有$u^k \in \partial f_1(x_1^k)$ (注意代回$b = A_1 x_1^* + A_2 x_2^*$)．类似地，对x_2^{k+1}我们有

$$0 \in \partial f_2(x_2^{k+1}) + A_2^{\mathrm{T}} y^k + \rho A_2^{\mathrm{T}}(A_1 x_1^{k+1} + A_2 x_2^{k+1} - b),$$

同样利用y^k的表达式消去y^k，得到

$$-A_2^{\mathrm{T}}\left(y^{k+1} + (1-\tau)\rho(A_1 x_1^{k+1} + A_2 x_2^{k+1} - b)\right) \in \partial f_2(x_2^{k+1}).$$

Proof.

根据v^k的定义自然有$v^k \in \partial f_2(x_2^k)$.
接下来证明不等式(25). 首先根据(x_1^*, x_2^*, y^*)的最优性条件以及关系式(24),

$$\begin{aligned} u^{k+1} &\in \partial f_1(x_1^{k+1}), \quad & -A_1^{\mathrm{T}} y^* &\in \partial f_1(x_1^*), \\ v^{k+1} &\in \partial f_2(x_2^{k+1}), \quad & -A_2^{\mathrm{T}} y^* &\in \partial f_2(x_2^*). \end{aligned}$$

根据凸函数的单调性,

$$\begin{aligned} \left\langle u^{k+1} + A_1^{\mathrm{T}} y^*, x_1^{k+1} - x_1^* \right\rangle &\geq 0, \\ \left\langle v^{k+1} + A_2^{\mathrm{T}} y^*, x_2^{k+1} - x_2^* \right\rangle &\geq 0. \end{aligned}$$

将上述两个不等式相加,结合u^{k+1}, v^{k+1}的定义,并注意到恒等式

$$A_1 x_1^{k+1} + A_2 x_2^{k+1} - b = (\tau\rho)^{-1}(y^{k+1} - y^k) = (\tau\rho)^{-1}(e_y^{k+1} - e_y^k), \quad (26)$$

Proof.

我们可以得到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau\rho}\left\langle e_y^{k+1}, e_y^k - e_y^{k+1}\right\rangle - (1-\tau)\rho\|A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - b\|^2 \\
&+ \rho\left\langle A_2(x_2^{k+1} - x_2^k), A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - b\right\rangle \\
&- \rho\left\langle A_2(x_2^{k+1} - x_2^k), A_2e_2^{k+1}\right\rangle \geq 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

不等式(27)的形式和不等式(25)还有一定差异，主要的差别就在

$$\rho\left\langle A_2(x_2^{k+1} - x_2^k), A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - b\right\rangle$$

这一项上．我们接下来估计这一项的上界．

Proof.

引入新符号

$$
\begin{aligned}
\nu^{k+1} &= y^{k+1} + (1-\tau)\rho(A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - b), \\
M^{k+1} &= (1-\tau)\rho\left\langle A_2(x_2^{k+1} - x_2^k), A_1x_1^k + A_2x_2^k - b\right\rangle,
\end{aligned}
$$

则$-A_2^{\mathrm{T}}\nu^{k+1} \in \partial f_2(x_2^{k+1})$以及$-A_2^{\mathrm{T}}\nu^k \in \partial f_2(x_2^k)$. 再利用单调性知

$$
\left\langle -A_2^{\mathrm{T}}(\nu^{k+1} - \nu^k), x_2^{k+1} - x_2^k\right\rangle \geq 0. \tag{28}
$$

根据这些不等式关系我们最终得到

$$
\begin{aligned}
&\rho\left\langle A_2(x_2^{k+1} - x_2^k), A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - b\right\rangle \\
={}& (1-\tau)\rho\left\langle A_2(x_2^{k+1} - x_2^k), A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - b\right\rangle \\
&+ \left\langle A_2(x_2^{k+1} - x_2^k), y^{k+1} - y^k\right\rangle \\
={}& M^{k+1} + \left\langle \nu^{k+1} - \nu^k, A_2(x_2^{k+1} - x_2^k)\right\rangle \leq M^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Proof.

估计完这一项之后，不等式(27)可以放缩成

$$\frac{1}{\tau\rho}\left\langle e_y^{k+1}, e_y^k - e_y^{k+1}\right\rangle - (1-\tau)\rho\|A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - b\|^2 + M^{k+1} - \rho\left\langle A_2(x_2^{k+1} - x_2^k), A_2e_2^{k+1}\right\rangle \geq 0.$$

上式中含有内积项，利用恒等式

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a-b\|^2) = \frac{1}{2}(\|a+b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2),$$

进一步得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\tau\rho}(\|e_y^k\|^2 - \|e_y^{k+1}\|^2) - (2-\tau)\rho\|A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - b\|^2 \\ &+ 2M^{k+1} - \rho\|A_2(x_2^{k+1} - x_2^k)\|^2 - \rho\|A_2e_2^{k+1}\|^2 + \rho\|A_2e_2^k\|^2 \geq 0.\end{aligned} \tag{29}$$

Proof.

此时除了M^{k+1}中的项，(29)中的其他项均在不等式(25)中出现．由于M^{k+1}的符号和τ的取法有关，下面我们针对τ的两种取法进行讨论．

情形一 $\tau \in (0,1]$，此时$M^{k+1} \geq 0$，根据基本不等式，

$$
\begin{aligned}
&2\left\langle A_2(x_2^{k+1} - x_2^k), A_1x_1^k + A_2x_2^k - b\right\rangle \\
\leq &\|A_2(x_2^{k+1} - x_2^k)\|^2 + \|A_1x_1^k + A_2x_2^k - b\|^2.
\end{aligned}
$$

代入不等式(29)得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau\rho}\|e_y^k\|^2 + \rho\|A_2e_2^k\|^2 + (1-\tau)\rho\|A_1e_1^k + A_2e_2^k\|^2 \\
&- \left[\frac{1}{\tau\rho}\|e_y^{k+1}\|^2 + \rho\|A_2e_2^{k+1}\|^2 + (1-\tau)\rho\|A_1e_1^{k+1} + A_2e_2^{k+1}\|^2\right] \\
\geq &\rho\|A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - b\|^2 + \tau\rho\|A_2(x_2^{k+1} - x_2^k)\|^2.
\end{aligned} \tag{30}
$$

ADMM的收敛性分析

Proof.

情形二 $\tau > 1$，此时$M^{k+1} < 0$，根据基本不等式，

$$
\begin{aligned}
&-2\left\langle A_2(x_2^{k+1} - x_2^k), A_1x_1^k + A_2x_2^k - b\right\rangle \\
\leq &\tau\|A_2(x_2^{k+1} - x_2^k)\|^2 + \frac{1}{\tau}\|A_1x_1^k + A_2x_2^k - b\|^2.
\end{aligned}
$$

同样代入不等式(29)可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau\rho}\|e_y^k\|^2 + \rho\|A_2e_2^k\|^2 + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)\rho\|A_1e_1^k + A_2e_2^k\|^2 \\
&- \left[\frac{1}{\tau\rho}\|e_y^{k+1}\|^2 + \rho\|A_2e_2^{k+1}\|^2 + \left(1 - \frac{1}{\tau}\right)\rho\|A_1e_1^{k+1} + A_2e_2^{k+1}\|^2\right] \\
\geq &\left(1 + \frac{1}{\tau} - \tau\right)\rho\|A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} - b\|^2 \\
&+ (1 + \tau - \tau^2)\rho\|A_2(x_2^{k+1} - x_2^k)\|^2.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

□

定理

在假设的条件下，进一步假定A_1, A_2列满秩．如果$\tau \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$，则序列$\{(x_1^k, x_2^k, y^k)\}$收敛到原始问题的一个KKT对．

Proof.

前证引理表明Φ_k都是有界列，根据Φ_k的定义(23)可知

$$\|e_y^k\|, \quad \|A_2 e_2^k\|, \quad \|A_1 e_1^k + A_2 e_2^k\|$$

均有界．根据不等式

$$\|A_1 e_1^k\| \leq \|A_1 e_1^k + A_2 e_2^k\| + \|A_2 e_2^k\|,$$

可以进一步推出$\{\|A_1 e_1^k\|\}$也是有界序列．注意到$A_1^{\mathrm{T}} A_1 \succ 0, A_2^{\mathrm{T}} A_2 \succ 0$，因此以上有界性也等价于$\{(x_1^k, x_2^k, y^k)\}$是有界序列．

ADMM的收敛性分析

Proof.

另一个直接结果是无穷级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A_1 e_1^k + A_2 e_2^k\|^2, \sum_{k=0}^{\infty} \|A_2(x_2^{k+1} - x_2^k)\|^2$$

都是收敛的，这表明

$$\begin{aligned} \|A_1 e_1^k + A_2 e_2^k\| = \|A_1 x_1^k + A_2 x_2^k - b\| &\to 0, \\ \|A_2(x_2^{k+1} - x_2^k)\| &\to 0. \end{aligned} \tag{32}$$

利用这些结果我们就可以推导收敛性了．首先证明迭代点子列的收敛性．由于$\{(x_1^k, x_2^k, y^k)\}$是有界序列，因此它存在一个收敛子列，设

$$(x_1^{k_j}, x_2^{k_j}, y^{k_j}) \to (x_1^{\infty}, x_2^{\infty}, y^{\infty}).$$

由(23)式中的u^k, v^k的定义及(32)式可得$\{u^k\}$与$\{v^k\}$相应的子列也收敛.

Proof.

记

$$u^{\infty} \overset{\text{def}}{=\!=} \lim_{j\to\infty} u^{k_j} = -A_1^{\mathrm{T}} y^{\infty}, \quad v^{\infty} = \lim_{j\to\infty} v^{k_j} = -A_2^{\mathrm{T}} y^{\infty}. \tag{33}$$

从(24)式我们知道对于任意的$k \geq 1$，有$u^k \in \partial f_1(x_1^k)$，$v^k \in \partial f_2(x_2^k)$．由次梯度映射的图像是闭集可知

$$-A_1 y^{\infty} \in \partial f_1(x_1^{\infty}), \quad -A_2 y^{\infty} \in \partial f_2(x_2^{\infty}).$$

由(32)的第一式可知

$$\lim_{j\to\infty} \|A_1 x_1^{k_j} + A_2 x_2^{k_j} - b\| = \|A_1 x_1^{\infty} + A_2 x_2^{\infty} - b\| = 0.$$

这表明$(x_1^{\infty}, x_2^{\infty}, y^{\infty})$是原始问题的一个KKT 对．因此上述分析中的$(x_1^*, x_2^*, y^*)$均可替换为$(x_1^{\infty}, x_2^{\infty}, y^{\infty})$．

Proof.

注意到Φ_k是单调下降的，且对子列$\{\Phi_{k_j}\}$有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{j\to\infty} \Phi_{k_j} \\
&= \lim_{j\to\infty} \left(\frac{1}{\tau\rho}\|e_y^{k_j}\|^2 + \rho\|A_2 e_2^{k_j}\|^2 + \max\left\{1-\tau, 1-\frac{1}{\tau}\right\}\rho\|A_1 e_1^{k_j} + A_2 e_2^{k_j}\|^2 \right) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

这说明

$$
\|e_y^k\| \to 0, \quad \|A_2 e_2^k\| \to 0, \quad \|A_1 e_1^k + A_2 e_2^k\| \to 0,
$$

进一步有

$$
0 \le \limsup_{k\to\infty} \|A_1 e_1^k\| \le \lim_{k\to\infty} \left(\|A_2 e_2^k\| + \|A_1 e_1^k + A_2 e_2^k\| \right) = 0.
$$

注意到$A_1^{\mathrm{T}}A_1 \succ 0$，$A_2^{\mathrm{T}}A_2 \succ 0$，所以最终我们得到全序列收敛. $\square$

- 考虑最优化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & 0, \\ \text{s.t.} \quad & A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0, \end{aligned} \tag{34}$$

其中$A_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1,2,3$为三维空间中的非零向量，$x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$是自变量．该问题实际上就是求解三维空间中的线性方程组，若A_1, A_2, A_3之间线性无关，则问题(34) 只有零解．此时容易计算出最优解对应的乘子为$y = (0,0,0)^\mathrm{T}$．

- 增广拉格朗日函数为

$$L_\rho(x,y) = 0 + y^\mathrm{T}(A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3) + \frac{\rho}{2}\|A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3\|^2.$$

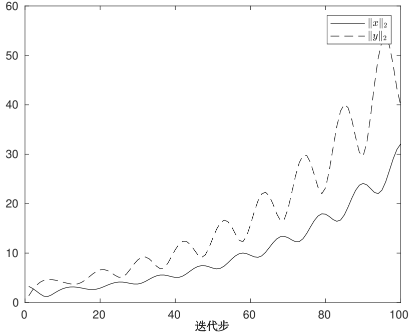
- 当固定x_2, x_3, y时，对x_1求最小可推出
$$A_1^{\mathrm{T}} y + \rho A_1^{\mathrm{T}}(A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3) = 0,$$
整理可得
$$x_1 = -\frac{1}{\|A_1\|^2}\left(A_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{y}{\rho} + A_2x_2 + A_3x_3\right)\right).$$
可类似地计算x_2, x_3的表达式

- 因此多块交替方向乘子法的迭代格式可以写为
$$\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= -\frac{1}{\|A_1\|^2}A_1^{\mathrm{T}}\left(\frac{y^k}{\rho} + A_2x_2^k + A_3x_3^k\right), \\
x_2^{k+1} &= -\frac{1}{\|A_2\|^2}A_2^{\mathrm{T}}\left(\frac{y^k}{\rho} + A_1x_1^{k+1} + A_3x_3^k\right), \\
x_3^{k+1} &= -\frac{1}{\|A_3\|^2}A_3^{\mathrm{T}}\left(\frac{y^k}{\rho} + A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1}\right), \\
y^{k+1} &= y^k + \rho(A_1x_1^{k+1} + A_2x_2^{k+1} + A_3x_3^{k+1}).
\end{aligned} \tag{35}$$

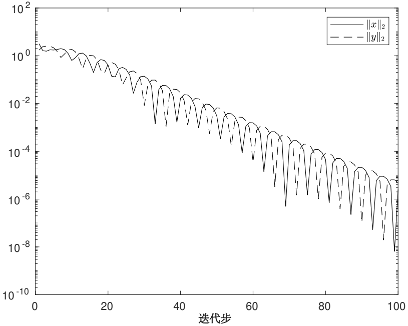
- 自变量初值初值选为$(1,1,1)$，乘子选为$(0,0,0)$. 选取A为

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \text{或}\quad \widehat{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&2&2\end{bmatrix}.$$

- 下图记录了在不同A下x和y的ℓ_2范数随迭代的变化过程.



(a) 系数矩阵为$\widetilde{A}$



(b) 系数矩阵为$\widehat{A}$

References

Douglas-Rachford method, ADMM, Spingarn's method

- J. E. Spingarn, *Applications of the method of partial inverses to convex programming: decomposition*, Mathematical Programming (1985)
- J. Eckstein and D. Bertsekas, *On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal algorithm for maximal monotone operators*, Mathematical Programming (1992)
- P.L. Combettes and J.-C. Pesquet, *A Douglas-Rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery*, IEEE Journal of Selected Topics in Signal Procesing (2007)
- S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, J. Eckstein, *Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers* (2010)
- N. Parikh, S. Boyd, *Block splitting for distributed optimization* (2013)

image deblurring: the example is taken from

D. O'Connor and L. Vandenberghe, *Primal-dual decomposition by operator splitting and applications to image deblurring* (2014)