补充作业#2

考虑由两个元素$\{a,b\}$生成的自由群F，对它的两个子群完成下面的两个练习。

(1) $H = \langle aba^2, ba, a^2b, b^2, a^3 \rangle$.
(2) $H = \langle a^2, ab^2, ab^{-2}, b^{-1}ab^{-1}, b^{-1}a^{-1}b^{-1} \rangle$.

问题 1. 构造一个图的$immersion$：$\phi : \Gamma \to \mathcal{G}$使得$\Gamma$的基本群同构于$H$, 并写出一组自由基。

问题 2. 构造一个图的复叠映射$\phi : \Gamma \to \mathcal{G}$使得$\Gamma$的基本群同构于$H$。

一个（连通图之间的）覆盖映射$\phi : \Gamma \to \mathcal{G}$称为**正则**的，如果存在两点$x \in \Gamma$和$o \in \mathcal{G}$使得$\phi(x) = o$，且$\phi_*(\pi_1(\Gamma, x))$是$\pi_1(\mathcal{G}, o)$的正规子群。

证明 3. 正则覆盖映射的定义不依赖于基点$x \in \Gamma$和$o \in \mathcal{G}$的选取。

证明 4. 一个覆盖映射$\phi : \Gamma \to \mathcal{G}$是正则的，当且仅当$\phi_*(\pi_1(\Gamma, x))$中的闭路径$\gamma$的任意提升仍然是闭路径：$\gamma$在任意点$y \in \Gamma$的提升是闭路径，这里$\phi(y) = o$.

问题 5. 分别构造一个有限的图复叠映射$\phi : \Gamma \to \mathcal{G}$使它是正则的和非正则的。