作业#4

我们假设以下出现拓扑空间$\hat{X}, X, Y, Z$为道路连通和局部道路连通的。

证明 1. 给定复叠映射$p : \hat{X} \to X$和一点$x_0 \in X$。那么这些子群集合$\{p_\star(\pi_1(\hat{X}, \hat{x})) : \hat{x} \in p^{-1}(x_0)\}$恰好是$\pi_1(X, x_0)$中的一个子群的共轭类。

证明 2. 证明复叠映射$p : \hat{X} \to X$是开映射，从而说明复叠映射是商映射。

证明 3. 给定有限复叠映射$p : \hat{X} \to X$。证明$\hat{X}$是紧的$Hausdorff$空间当且仅当X是紧的$Hausdorff$空间。

一个映射$f : Y \to X$称为局部同胚，如果每一点$y \in Y$都存在一个开邻域V使得$U = f(V)$是开集并且$f : V \to U$是一个同胚。由定义，任意的复叠映射是局部同胚的。

证明 4. 给定一个局部同胚$f : Y \to X$。如果Y是紧的，那么任意的$x \in X$, 原像$f^{-1}(x)$是有限集合。假设X, Y是连通的$Hausdorff$空间，那么$f : Y \to X$是满射，从而说明是复叠映射。

证明 5. 如果X的基本群$\pi_1(X)$有限，那么任意的连续映射$f : X \to S^1$同伦于常值映射，其中S^1为单位圆周。

证明 6. 一个拓扑空间X称为单连通的，如果基本群为平凡群。任意两个$X \to S^1$的连续映射是同伦的。