作业#5

假设群G通过同胚作用在拓扑空间X上，它称为不连续群作用如果任意一点$x \in X$, 存在一个领域U使得集合$\{g : gU \cap U \neq \emptyset\}$是有限的。

关于不连续群等距作用，我们有若干等价的定义：

证明 1. 假设群G通过同胚作用在度量空间X上，且群G配备离散拓扑。证明下列条件是等价于这个作用是不连续群作用：

(1) 任意X中的紧集K, 集合$\{g : gK \cap K \neq \emptyset\}$是有限的。

(2) 映射$G \times X \to X \times X$： $(g, x) \to (gx, x)$是**逆紧的***(proper)*：紧集的原像是紧集。

(3) 任意一点$x \in X$的稳定子群是有限的, 且其轨道Gx是离散的。

（提示：离散拓扑中，紧集是有限的集合。度量空间中，集合的序列紧性等价于紧性。）

证明 2. 假设有限群G通过同胚自由地作用在拓扑空间X。证明该作用为不连续群作用。

证明 3. 假设群G在*Hausdorff*空间X上的作用是不连续群作用。证明复叠映射$X \to X/G$是正则的：即X的基本群嵌入到X/G的基本群中为正规子群。

（提示：这里我们并不假设X是单连通的。可以通过证明复叠空间是正则的当且仅当复叠变换群在Fiber上的作用是可迁的）

证明 4. 假设X是单连通空间且有复叠映射$Y \to X$。证明：X与Y是同胚的。

证明 5. 假设群G在*Hausdorff*空间X上的作用是自由的不连续群作用。证明任意给定子群$H \subset G$, 我们定义的$\phi : X/H \to X/G :$

$$\forall x \in X, Hx \to Gx$$

是复叠映射且有如下的交换图表:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & X/H \arrow[d, "\phi"] \\
& X/G
\end{tikzcd}$$

其中映射i, j为相应的轨道映射。

证明 6. 考虑群$G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$作用在$\mathbb{R}^2$上：$(m, n) \cdot (x, y) = (m + x, n + y)$。证明商空间$\mathbb{R}^2/G$同胚于环面$S^1 \times S^1$。

对于万有复叠映射$p : (\hat{X}, \hat{x}_0) \to (X, x_0)$，我们知道$\pi_1(X, x_0)$可以通过路径提升得到$p^{-1}(x_0)$上的一个群的右作用：对任意$[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$，定义一个双射$L_{[\gamma]} : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_0)$，把$\hat{x}$映为路径$\gamma$在$\hat{x}$处提升的终点。

另一方面，我们知道$\pi_1(X, x_0)$同构于复叠变换群，从而限制在$p^{-1}(x_0)$得到一个群作用。具体而言，对任意$[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$， 定义一个双射$A_{[\gamma]} : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_0)$。对任意$\hat{x} \in p^{-1}(x_0)$, 取一条从$\hat{x}_0$到$\hat{x}$的路径$\alpha$，然后把$p(\alpha)$在$L_{[\gamma]}(x_0)$处提升的终点定义为$A_{[\gamma]}(\hat{x})$。

问题 7. 请分别考察两个线圈一点并的图*Rose*和环面$S^1 \times S^1$的基本群在他们万有复叠上这两个作用是否相同：即是否存在$[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$使得$A_{[\gamma]} \neq L_{[\gamma]}$。试证明当$X$的基本群交换时，这两个作用是相同的。