

几何群论-双曲空间上的群作用

杨文元(wyang@math.pku.edu.cn)

February 17, 2025

几何群论是通过构造在几何空间上的作用来研究无限离散群的研究领域，其中具有负曲率特征的空间和群的研究占有特别重要的位置。下面我们主要介绍双曲群与相对双曲群的一些参考书籍和相关论文。

1 双曲群基本理论

学习建议 1 (双曲群). 可以先学习Bowditch的notes, 然后再阅读H. Short等人的notes, 读完之后对双曲群会有一个比较初步的了解。其他书籍可以当做工具书, 在读文献时碰到相关结果了再去查找。

- Bowditch, A course on geometric group theory, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2006

双曲群原始论文:

- M. Gromov, Hyperbolic groups, in “Essays in Group Theory” (G. M. Gersten, ed.), MSRI Publ. 8, 1987, pp. 75-263

早期解释Gromov上述文章的三篇文献:

- H. Short (editor), Notes on hyperbolic groups, Group theory from a geometrical viewpoint, World Scientific Publishing Co., Inc., 1991.
- E. Ghys and P. de la Harpe (editors), Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov. Progress in Mathematics, 83. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990. xii+285 pp. ISBN 0-8176-3508-4 (一个英文版)
- M. Coornaert, T. Delzant and A. Papadopoulos, Geometrie et theorie des groupes: les groupes hyperboliques de Gromov, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1441, Springer-Verlag, Berlin, 1990, x+165 pp. (目前还没有英文版, 但里面有不少其他地方不容易找到的技术性结果, 更像一本书。上述两个文献是不少人notes合在一起形成的。)

比较现代且系统化的介绍:

- M. Bridson and A. Haefliger, Metric spaces of non-positive curvature, vol. 319, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer Verlag, Berlin, 1999.

- Cornelia Drutu and Michael Kapovich. Geometric group theory, volume 63 of American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 2018

学习建议 2 (组合群论). 组合群论一般认为是几何群论历史前身, 为后者许多研究问题的来源。学习几何群论的同时, 了解组合群论的基本概念是很有必要的。一个比较简明的介绍:

- CF Miller III, Combinatorial group theory.

Bass-Serre 理论是几何群论中一个基本工具和语言, 需要很好的掌握。

- Scott and Wall: Topological methods in group theory. 偏重拓扑的角度, 非常直观和富有启发性
- J.-P Serre, Trees, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation 偏重代数的方式, 清晰明快。

学习建议 3. 几何群论中很多技术和理论是从三维双曲流形的研究中发展起来, 并为之提供应用场景。因此, 学习和了解经典实双曲几何、三维流形以及曲面映射类群对几何群论是会有很大帮助。

经典双曲几何以及离散群介绍。

- A. Beardon, The Geometry of Discrete Groups (Graduate Texts in Mathematics) (v. 91)
- J. Ratcliffe, Foundations of Hyperbolic Manifolds (Graduate Texts in Mathematics) (v. 149).

如下参考书融合了双曲几何、曲面映射类群和三维流形基本理论于一身, 内容系统连贯, 有些内容详尽性略显不足。

- B. Martelli, An Introduction to Geometric Topology, Create Space Independent Publishing Platform (October 26, 2016). 电子版本可从作者主页下载

其中双曲几何可以进一步参考上述书籍, 曲面映射类群可以进一步参考:

- B. Farb and D. Margalit, A Primer on Mapping Class Groups (PMS-49), Princeton Mathematical Series.
- A. Fathi, F. Laudenbach and V. Poénaru, Thurston's Work on Surfaces (MN-48) Translated by: Djun Kim and Dan Margalit, Princeton University Press

学习建议 4. 一本很有趣的面向本科生一个读物, 介绍了许多具体的群 (但不含双曲群), 可增加学习兴趣。

- J. Meier, Groups, graphs and trees: An introduction to the geometry of infinite groups, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

2 双曲群边界理论

双曲群的边界理论在双曲群中占有重要的位置，是双曲群学习中不可或缺一部分。它主要包括拓扑动力学理论和测度理论。

首先可以阅读如下综述（五星推荐）

- I. Kapovich and N. Benakli, Boundaries of hyperbolic groups, Combinatorial and geometric group theory (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001), Contemp. Math., vol. 296, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 39–93.

边界动力学理论. Gromov边界上收敛群作用:

- Bowditch, Convergence groups and configuration spaces. Geometric group theory down under (Canberra, 1996), 23–54, de Gruyter, Berlin, 1999.
- （原始文献）F. W. Gehring and G. J. Martin, Discrete quasiconformal groups I, Proc. London Math. Soc. (3) 55 (1987), 331–358.

测度理论. 双曲群边界上的Patterson-Sullivan测度有很多应用。

- M. Coornaert. Mesures de Patterson–Sullivan sur le bord d’un espace hyperbolique au sens de Gromov. Pacific J. Math. 159(2) (1993), 241–270.
- P. Nicholls, The Ergodic Theory of Discrete Groups, Cambridge University Press, 1989 (介绍Kleinian群上理论，写的很详细)
- （原始文献）S. Patterson. The limit set of a Fuchsian group. Acta Math. 136(1) (1976), 241–273.
- （原始文献）D. Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 50(1979), 171–202.

3 相对双曲群

学习建议 5. 相对双曲群有若干不同的等价定义，表述差别很大，初学起来会比较困难些。相对双曲群是几何有限Kleinian群的自然推广，熟悉双曲三维流形理论会对它的学习帮助很多（参加学习建议3）。建议先读如下的综述：

- G. C. Hruska, Relative hyperbolicity and relative quasiconvexity for countable groups, Algebr. Geom. Topol. 10 (2010), no. 3, 1807–1856

Bowditch的论文给出了两个常用的等价定义，也是一个很好阅读起点：

- B. Bowditch, Relatively hyperbolic groups, Internat. J. Algebra Comput. 22 (2012), no. 3, 1250016, 66

Bowditch的论文其中一个定义是基于Farb的定义。另外，Osin的定义和Farb的定义都是从Cayley图出发来定义相对双曲群的。

- B. Farb, Relatively hyperbolic groups, *Geom. Funct. Anal.* 8 (1998) 810 – 840
- Denis Osin. Relatively hyperbolic groups: Intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 20, 2006

另外，关于如上双曲群和相对双曲群的部分相关内容，也可参考本人课程讲义，主要给出上课内容的证明，没有太多引导，仅供参考。背景知识请参考上面的书籍和文章了解

4 无柱双曲群

近年来，相对双曲群的理论大部分结果被推广到更一般地称为Acylindrically hyperbolic groups上，可以用来研究曲面的映射类群，自由群的外自同构群等许多非相对双曲群。有了前面的基础,可以先阅读Osin的2018年ICM报告综述和Bestvina的2022年ICM报告了解相关进展:

- D. Osin. Groups acting acylindrically on hyperbolic spaces, arXiv:1712.00814.
- M. Bestvina. Groups acting on hyperbolic spaces – a survey, arXiv:2206.12916

如下是几篇原始的相关论文:

- D. Osin. Acylindrically hyperbolic groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 368(2):851–888, 2016
- F. Dahmani, V. Guirardel, D. Osin, Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces, *Memoirs AMS* 245 (2017), no. 1156.
- Mladen Bestvina, Ken Bromberg, and Koji Fujiwara. Constructing group actions on quasi-trees and applications to mapping class groups. *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, 122:1–64, 2015.