习题 1.1.

2.

Proof: 假设 $\sqrt{p}$ 不是无理数，则存在 $r, s \in \mathbb{N}$ 且 $(r,s)=1$（表示 r,s 互质）

$\sqrt{p}=\frac{r}{s} \Rightarrow p=\frac{r^2}{s^2} \Rightarrow r^2=ps^2 \Rightarrow p \mid r^2$

p 是素数 $\Rightarrow p \mid r \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}.\ r=kp \Rightarrow r^2=k^2p^2$

又由于 $r^2=ps^2 \Rightarrow ps^2=k^2p^2 \Rightarrow s^2=k^2p$

$\Rightarrow p \mid s^2$. 由于 p 是素数 $\Rightarrow p \mid s$

因此 $p \mid s$. $p \mid r$. 这与 r,s 互质矛盾.

故 $\sqrt{p}$ 是无理数.

□

4.

(1) $|a+b| \geq |a|-|b|$

Case 1: $|a| \leq |b|$ 时，显然.

Case 2: $|a| \geq |b|$

等价于证明

$|a+b|^2 \geq (|a|-|b|)^2$

$a^2+2ab+b^2 \geq |a|^2-2|a||b|+|b|^2$

$\Longleftrightarrow \quad 2ab \geq -2|a||b|$

$\Longleftrightarrow \quad ab+|a||b| \geq 0$

$ab \geq 0$，上式显然成立

$ab<0$ 时 $\quad ab+|a||b|=ab-ab=0$ 仍成立.

□

(2)

由(1) $|a+b| \geq |a|-|b|$

取 $b=-b'$

$\Rightarrow |a-b'| \geq |a|-|-b'|=|a|-|b'|$

则 $\Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b| < 1$

$|a| < |b|+1$

□

6.

由 $x^n - 1 = \frac{x^n - 1}{1 + x + \cdots + x^{n-1}}$ $(x \neq 1)$

取 $x = \sqrt[n]{a}$

$$\sqrt[n]{a} - 1 = \frac{(\sqrt[n]{a})^n - 1}{1 + \sqrt[n]{a} + \cdots + (\sqrt[n]{a})^{n-1}} = \frac{a-1}{1 + (\sqrt[n]{a}) + \cdots + (\sqrt[n]{a})^{n-1}}$$

由于 $a > 1 \Rightarrow$ 右式 $> 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} - 1 > 0$

由于 $\sqrt[n]{a} > 1 \Rightarrow (\sqrt[n]{a})^k > 1$ $(k = 1, 2, \cdots n-1)$

右式 $< \frac{a-1}{\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{个}}} = \frac{a-1}{n}$

□

7.

取 n 充分大使得

$$\frac{1}{10^n} < b - a$$

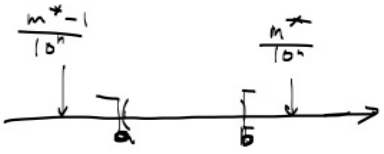
(取 $n > \lg \frac{1}{b-a}$ 即可)

假设 $A_n \cap (a,b) = \varnothing$.

则 $A_n = A_n \cap (-\infty, \infty) = A_n \cap \left((-\infty, a] \cup (a,b) \cup [b, +\infty)\right)$

$$= \left(A_n \cap (-\infty, a]\right) \cup \left(A_n \cap [b, +\infty)\right)$$

令 $B = A_n \cap (-\infty, a]$, $C = A_n \cap [b, +\infty)$



C 中有最小的 m^* 使得 $\frac{m^*}{10^n} \in C$, 但 $\frac{m^*-1}{10^n} \in B$

此时 $b - a \leq \frac{m^*}{10^n} - \frac{m^*-1}{10^n} = \frac{1}{10^n}$. 这与 n 选取矛盾.

$\Rightarrow A_n \cap (a,b) \neq \varnothing$

由于 $A_n \in \mathbb{Q}$, 故 a, b 中一定有有理数

□

8.

由上知 $\exists r \in \mathbb{Q}$, s.t.

$$\sqrt{2} - a < r < \sqrt{2} - b$$

$$\Longleftrightarrow \quad a < r + \sqrt{2} < b$$

由于 $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r + \sqrt{2}$ 是无理数

(若 $r + \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ 矛盾)

□

2주차 1-2

2. (1) $f(X) = (1, 10)$

(2) $f(X) = (-\infty, \ln 2]$

(3) $f(X) = [0, 2]$

(4) $f(X) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

4.

$f(-x) = \frac{2-x}{2+x}$

$f(x+1) = \frac{3+x}{1-x}$

$f(x)+1 = \frac{4}{2-x}$

$f(\frac{1}{x}) = \frac{2x+1}{2x-1}$

$\frac{1}{f(x)} = \frac{2-x}{2+x}$

5.

$$\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} = \frac{(x+\delta x)^3 - x^3}{\delta x} = \frac{3x^2\delta x + 3x(\delta x)^2 + \delta x^3}{\delta x}$$

$$= 3x^2 + 3x\delta x + (\delta x)^2$$

7.

$x \geq 0$, $g(x) = x \geq 0$

$x < 0$, $g(x) = 1 - x > 1 > 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $f(g(x)) = 0$

$x \geq 0$, $g(f(x)) = g(0) = 0$

$x < 0$, $g(f(x)) = g(-x) = -x$

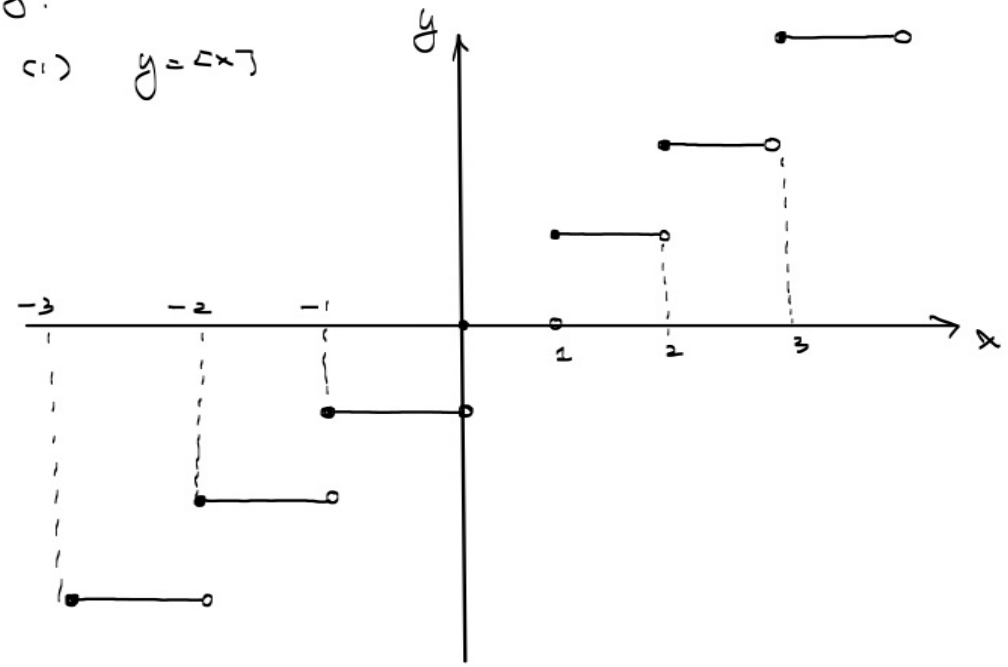
$0 < -x$

$\updownarrow$

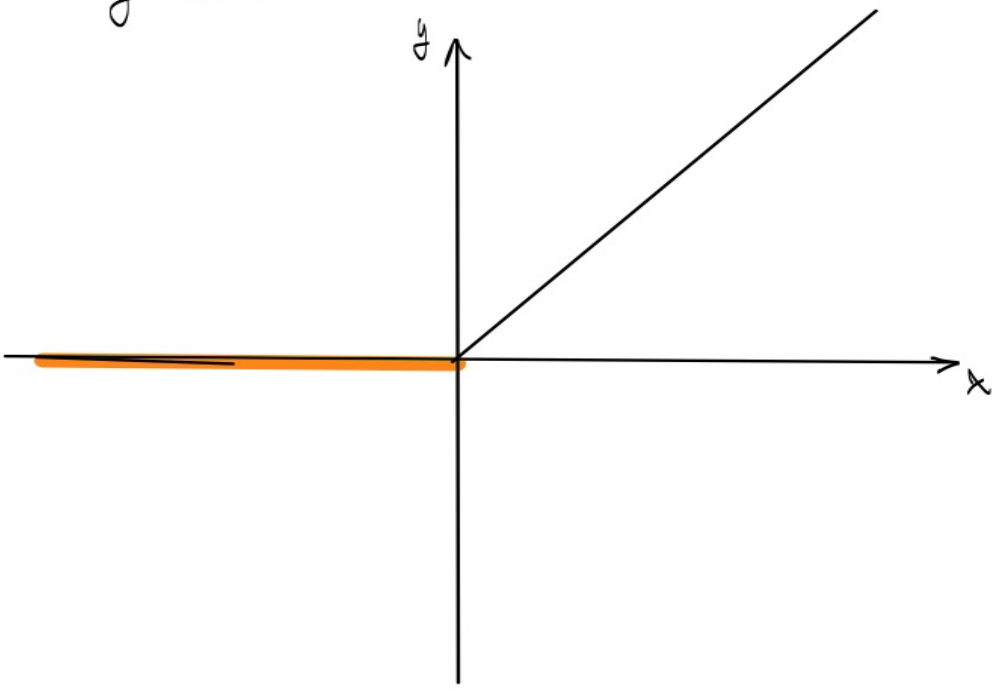
$-x > 0$

8.

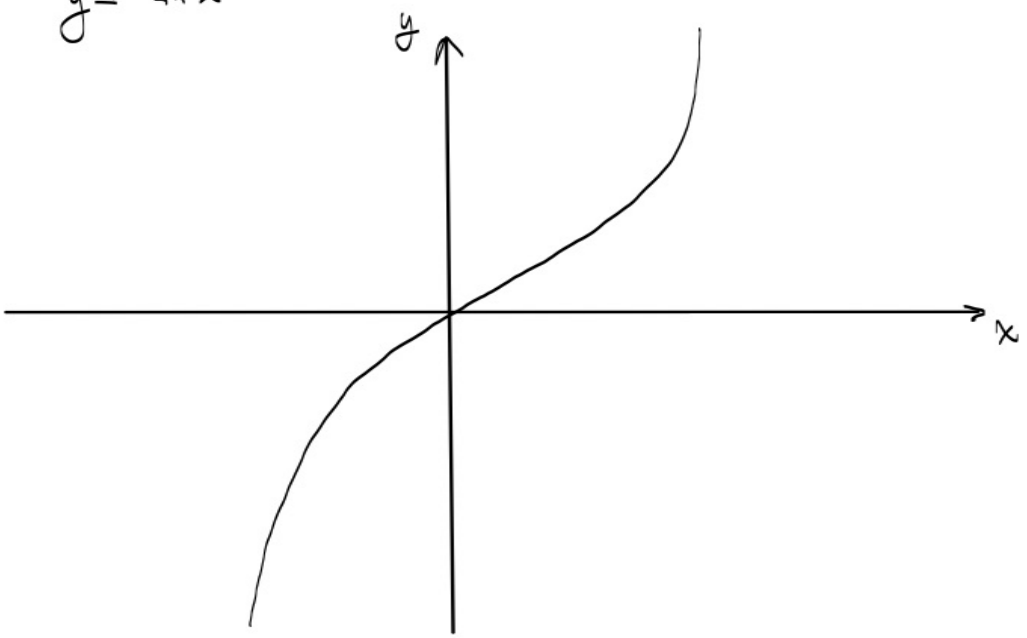
(1) $y = [x]$



(2) $y = |x| + x$



(3) $y = \sinh x$



(4) $y = \operatorname{ch} x$

(5) $$y = \begin{cases} x^2 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & , \quad -1 \leq x < 0 \end{cases}$$