习题 4.5

1. $f(x) = x e^{-x^2}$

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$= e^{-x^2}(1-2x^2)$

$f''(x) = e^{-x^2}(-4x) + (1-2x^2) \cdot e^{-x^2}(-2x)$

$= -2x \cdot e^{-x^2}(3-2x^2)$

x	$(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$	0	$(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	凸	拐点	凹	拐点	凸	拐点	凹

向上凸区间：$(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}})$，$(0, \sqrt{\frac{3}{2}})$

向下凸区间：$(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$，$(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$

拐点：$x = -\sqrt{\frac{3}{2}}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}$.

3. $y = x^2 \cdot e^{-x}$

$y' = e^{-x} \cdot (2x) + x^2 \cdot e^{-x}(-1)$

$= e^{-x} \cdot x \cdot (-x+2)$

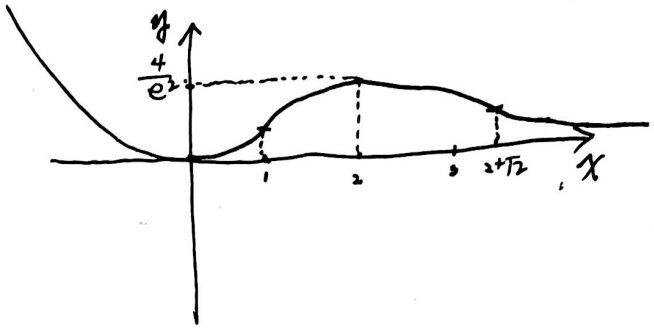
$y'' = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = e^{-x}(x - 2 - \sqrt{2})(x + 2 - \sqrt{2})$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2-\sqrt{2})$	$2-\sqrt{2}$	$(2-\sqrt{2}, 2)$	2	$(2, 2+\sqrt{2})$	$2+\sqrt{2}$	$(2+\sqrt{2}, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘ 凹	极小	↗ 凹	拐点	↗ 凸	极大	↘ 凸	拐点	↘ 凹

$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} y(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^{-x} = +\infty$

图形：



5. $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

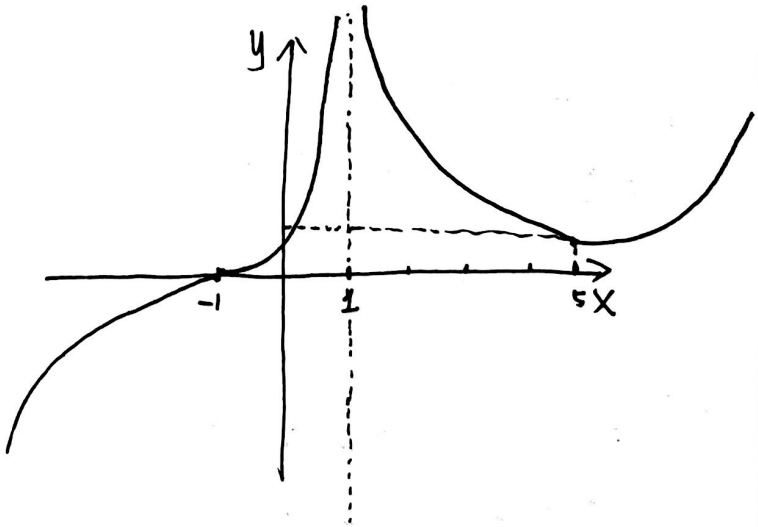
$y' = (x+1)^2 \cdot (x-1)^{-3} \cdot (x-5)$

$y'' = 24(x+1) \cdot (x-1)^{-4}$

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, +\infty)$
y	凸 ↗	拐点	↗ 凹	too	↘ 凹	拐点	↗ 凹
y'	$+$	0	$+$	N	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	N	$+$	$+$	$+$

$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$，$\lim_{x \to 1} y(x) = +\infty$，

$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$，$y(-1) = 0$，$y(5) = \frac{6^3}{4^2} > 0$.



7.

回顾：$f(x)$在(a,b)内向上凸 $\Leftrightarrow$

对$\forall x_0 \in (a,b)$成立

$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$，$\forall x \in (a,b)$，$x \neq x_0$.

证明：

用反证法，若$\exists x_1 \in (a,b)$，使$f''(x_1) > 0$，则

由二阶导数定义知

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_1+\Delta x) - f'(x_1)}{\Delta x} > 0$$

$\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$，使得当 $0 < \Delta x < \delta$ 时

$$f'(x_1+\Delta x) - f'(x_1) > 0 \quad \cdots\cdots (*1)$$

然而，由$f(x)$凹性，成立

$$f(x) < f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1), \forall x \in (a,b)$$

$\Rightarrow$ $$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < f'(x_1), \forall x \in (x_1, b)$$

$\Rightarrow$ $\exists \xi_x \in (x, x_1)$（微分中值定理）

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < f'(x_1) \quad \cdots\cdots (*2)$$

取 x 使 $x - x_1 = \frac{\delta}{2}$，则 $0 < \xi_x - x_1 < \delta$，由 $(*1)$

$$f'(\xi_x) - f'(x) > 0$$

这与$(*2)$矛盾

故 $\forall x \in (a,b)$，都有 $f''(x) \leq 0$.

习题 5.1

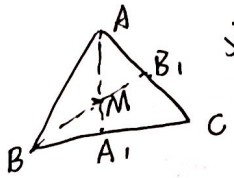
2.

证：



$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$$
$$= \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$
$$= \vec{OA} + \frac{1}{2}(\vec{OB} - \vec{OA})$$
$$= \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$

3. 证：



延长 AM 交 BC 于点 A_1，

延长 BM 交 AC 于点 B_1，

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$$
$$= \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AA_1}$$
$$= \vec{OA} + \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{BA_1})$$
$$= \vec{OA} + \frac{2}{3}(\vec{OB} - \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{BC})$$
$$= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}(\vec{OC} - \vec{OB})$$
$$= \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

4. (1) 不是，取 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 方向不同，平生矛盾.

(2) 不是 $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |a|^2 \cdot |b|^2 \cdot \cos^2\langle a,b\rangle$

$(\vec{a})^2 \cdot (\vec{b})^2 = |a|^2 \cdot |b|^2$

取 $\vec{a} \perp \vec{b}$，则左边为 0，右边 > 0，矛盾.

(且 $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$)

(3) 是，由混合积的性质.

8. 左边 $= |a|^2 \cdot |b|^2 \cdot \sin^2\langle a,b\rangle$

$+ |a|^2|b|^2 \cdot \cos^2\langle a,b\rangle$

$= |a|^2 \cdot |b|^2 =$ 右边

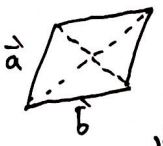
10.

左边 $= \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$+ \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$= 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2) =$ 右边

12 何意义：



平行四边形4条边平方和等于对角线平方和.

此式又被称为平行四边形恒等式.

11.

左边 $=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cdot\sin^2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle \le |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2=$右边

等号成立 $\Leftrightarrow \sin^2\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=1$，即 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{1}{2}\pi$，$\vec{a}\perp\vec{b}$.

习题 5.2

2. $\vec{AB}=(4,-2,0)$，$\vec{BA}=(-4,2,0)$

$\vec{AC}=(3,-1,1)$，$\vec{BC}=(-1,1,1)$

$|\vec{AB}|=|\vec{BA}|=2\sqrt{5}$，$|\vec{AC}|=\sqrt{11}$，$|\vec{BC}|=\sqrt{3}$

3. $3\vec{a}-2\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=(11,-9,1)$

6.

(1) $2\vec{a}\cdot 3\vec{b}=6\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}=-12$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{c}=1$

(3) $\cos\langle a,b\rangle=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{-2}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{25+4+1}}$

$=\frac{-2}{\sqrt{14}\cdot 30}=\frac{-1}{\sqrt{105}}$

8. $\vec{a}+k\vec{b}\perp\vec{a}-k\vec{b}$

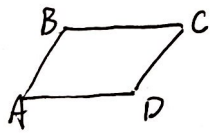
$\Leftrightarrow (\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}-k\vec{b})=0$

$\Leftrightarrow \vec{a}^2-k^2\cdot\vec{b}^2=0$

$\Leftrightarrow 4-k^2\cdot 36=0$

故 $k=\pm\frac{1}{3}$

10.



$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}=(2,0,2)$

$\vec{BD}=\vec{AD}-\vec{AB}=(-2,-2,2)$

$\cos\langle\vec{AC},\vec{BD}\rangle=\frac{\vec{AC}\cdot\vec{BD}}{|\vec{AC}|\cdot|\vec{BD}|}=0$

$\langle\vec{AC},\vec{BD}\rangle=\frac{1}{2}\pi$，夹角为 $\frac{1}{2}\pi$.

12.

混合积 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(a,b,c)$

$=\begin{pmatrix}3&4&5\\1&2&2\\9&14&16\end{pmatrix}=0$

故 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

15. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，$\alpha,\beta,\gamma\in[0,\pi]$

将 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}\gamma$ 代入

得 $\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2(2\alpha)=1$

$\Leftrightarrow \cos(2\alpha)+\cos^2(2\alpha)=0$

$\Leftrightarrow \cos(2\alpha)(\cos(2\alpha)+1)=0$

$\Leftrightarrow \cos(2\alpha)=0$ 或 $\cos(2\alpha)=-1$.

①若 $\cos(2\alpha)=0$，则 $\alpha=\frac{1}{4}\pi$ 或 $\frac{3}{4}\pi$，

但由于 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$ 时 $\gamma=\frac{3}{2}\pi\notin[0,\pi]$，故舍去

故 $\alpha=\frac{1}{4}\pi=\beta$，$\gamma=\frac{1}{2}\pi$

$\vec{a}=|\vec{a}|\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$=(1,1,0)$

②若 $\cos(2\alpha)=-1$，则 $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ 或 π

但由于 $\alpha=\pi$ 时 $\gamma=\pi\notin[0,\pi]$，故舍去.

故 $\alpha=\frac{1}{2}\pi=\beta$，$\gamma=\pi$

$\vec{a}=(0,0,-\sqrt{2})$

综上，$\vec{a}=(1,1,0)$ 或 $(0,0,-\sqrt{2})$.

16. $(7\vec{a}-5\vec{b})\perp(\vec{a}+3\vec{b})$

$(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$

$\Leftrightarrow \begin{cases}7\vec{a}^2-15\vec{b}^2+16\vec{a}\vec{b}=0\\7\vec{a}^2+8\vec{b}^2-30\vec{a}\vec{b}=0.\end{cases}$

令 $t=\frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2}$（由 $|\vec{a}|\neq 0$）代入上方程.

$\begin{cases}-15t^2+16t\cos\langle a,b\rangle=-7 \quad\cdots(1)\\8t^2-30t\cos\langle a,b\rangle=-7 \quad\cdots(2)\end{cases}$

(1)×15+(2)×8 得.

$(8^2-15^2)t^2=-7\times 23$

$\Rightarrow t^2=1$，$\Rightarrow t=1$ 代入(2)

得 $\cos\langle a,b\rangle=\frac{1}{2}$