2. (2)

法向量: $\vec{n}=(0,1,0)$

因此平面方程为 $y-2=0$

(4) 记 $M_1(5,-4,3)$ $M_2(-2,1,8)$

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-7,5,5)$

Oyz平面的法向量 $\vec{n_0}=(1,0,0)$

因此可取待求平面的法向量

$$\vec{n}=\vec{n_0}\times\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=-5j+5k$$

∴平面方程为 $-5(y+4)+5(z-3)=0$

即 $-y+z-7=0$

3. $\overrightarrow{AB}=(-5,-3,-3)$

$\overrightarrow{AC}=(4,-6,-1)$

设平面上任一点为 $M(x,y,z)$

则平面方程为

$$\overrightarrow{CM}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=0$$

即 $$\begin{vmatrix} x-6 & y+2 & z-7 \\ -5 & -3 & -3 \\ 4 & -6 & -1 \end{vmatrix}=0$$

即 $15x+17y-42z+238=0$

6. $\vec{n_1}=(2,-2,4)$ $\vec{n_2}=(3,1,-2)$

因此待求平面法向量为

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=16j+8k$$

∴平面方程为

$8(z+3)+16(y-0)=0$

即 $2y+z+3=0$

8. 将 L_1 的方程改写为

$$L_1:\begin{cases}\frac{x+12}{-6}=\frac{z-8}{3} \\ y=\frac{z-8}{3}\end{cases}$$

即 $\frac{x+12}{-6}=y=\frac{z-8}{3}$.

同理可将 L_2 改写为

$x-4=y=z+6$

两条直线的方向向量为

$\vec{s_1}=(-6,1,3)$ $\vec{s_2}=(1,1,1)$

∴平面法向量:

$\vec{n}=\vec{s_1}\times\vec{s_2}=(2,-9,7)$

平面过点 $(-12,0,8)$

因此平面方程为

$2(x+12)-9y+7(z-8)=0$

即 $2x-9y+7z-32=0$

10. $\vec{s_1}=(2,-1,1)$

$\vec{s_2}=(-2,1,-1)$

由于 $\vec{s_1}\times\vec{s_2}=0$，因此不能由此得到平面法向量

取两直线上两点 $M_1(1,-1,-1)$ $M_2(-2,2,0)$

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,3,1)$

因此 $\vec{n}=\vec{s_1}\times\overrightarrow{M_1M_2}=(-4,-5,3)$

∴平面方程为: $-4(x-1)-5(y+1)+3(z+1)=$

即 $-4x-5y+3z+2=0$

扫描全能王 创建

12.

(1) $\vec{n_1}=(2,1,-1)$ $\vec{n_2}=(3,-1,2)$

方向向量 $\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$=(1,-7,-5)$

取直线上一定点 $(0,6,7)$

$\Rightarrow$ 直线方程为 $x=\frac{y-6}{-7}=\frac{z-7}{-5}$

参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=-7t+6 \\ z=-5t+7 \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

(2) 将方程改为

$$\begin{cases} \frac{x+5}{3}=z \\ \frac{y+8}{2}=z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 方程为 $\frac{x+5}{3}=\frac{y+8}{2}=z$

参数方程为：$\begin{cases} x=3t-5 \\ y=2t-8 \\ z=t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$

16.

$$d=\frac{|(1,-2,0)\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

18. 即求点 $(1,-1,0)$ 到 $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$ 的距离

$$d=\frac{|(1,0,-1)\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}=2\sqrt{\frac{3}{7}}$$

20. 即求点 $(\frac{7}{3},0,0)$ 到平面 $3x+6y-2z+14=0$ 的距离.

$$d=\frac{|3\cdot\frac{7}{3}+14|}{|\vec{n}|}=\frac{21}{7}$$

习题 5.4

1. 将方程配方为：

$2(x-1)^2+3(y-1)^2+4(z+2)^2=5$

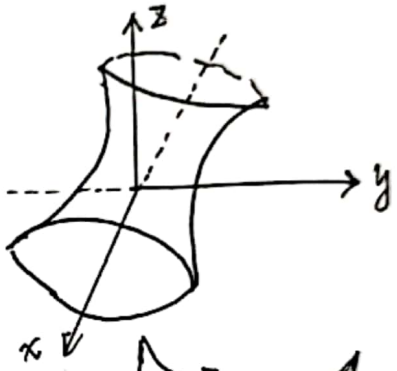
即 $\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}}+\frac{(z+2)^2}{\frac{5}{4}}=1$

中心坐标 $(1,1,-2)$

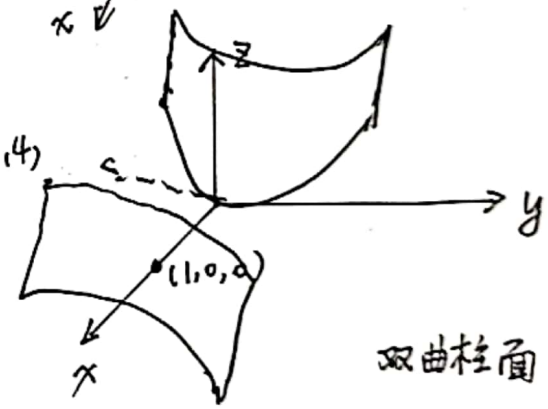
三个半轴长 $a=\frac{\sqrt{10}}{2}$ $b=\frac{\sqrt{15}}{3}$ $c=\frac{\sqrt{5}}{2}$

2.

(2) 单叶双曲面

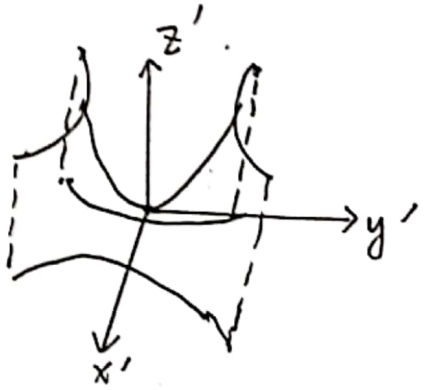


(4)



双曲柱面

(6) 双曲抛物面



扫描全能王 创建

3. 令 $x-1 = R\sin\varphi\cos\theta$

$y+1 = R\sin\varphi\sin\theta$

$z-3 = R\cos\varphi$

得到参数方程为 $\begin{cases} x = 1+R\sin\varphi\cos\theta \\ y = -1+R\sin\varphi\sin\theta \\ z = 3+R\cos\varphi \end{cases}$

$\varphi\in[0,\pi]$ $\theta\in[0,2\pi]$

(2) 选择 z 为一个参数，将方程化为

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1+\frac{z^2}{16}$

令 $\begin{cases} x = 2\sqrt{1+\frac{z^2}{16}}\cos\theta \\ y = 3\sqrt{1+\frac{z^2}{16}}\sin\theta \\ z = z \end{cases}$

$\theta\in[0,2\pi]$, $z\in(-\infty,+\infty)$

习题 6.1

1. 2.

(1) 开集、区域

(2) 开集、区域、有界区域

(3) 有界闭区域

(4) 开集

$\partial E_4 = \{(x,y)\mid x=0 \text{ 或 } y=\sin\frac{1}{x}\}$

3. 对 $\forall q\in\mathbb{R}$, $\forall\varepsilon>0$

在 $U_\varepsilon(q)$ 内既有有理数，也有无理数

因此 $\forall q\in\mathbb{R}$, q 既不是 Q 的内点

也不是外点

因此 $\partial Q = \mathbb{R}$

4. (1) 令 $\gamma = \alpha+t\beta$，t 为常数

由 $|\gamma|^2\geq 0$ 得

$t^2|\beta|^2+2t\alpha\cdot\beta+|\alpha|^2\geq 0$ 对 $\forall t$ 成立

即 $4(\alpha\cdot\beta)^2-4|\beta|^2|\alpha|^2\leq 0$ 成立

$\Rightarrow |\alpha\cdot\beta|\leq|\alpha|\cdot|\beta|$

(2)

$|\alpha-\beta|^2 = |\alpha|^2-2\alpha\cdot\beta+|\beta|^2$

$(|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|)^2 = |\alpha-\gamma|^2+2|\alpha-\gamma||\gamma-\beta|+|\gamma-\beta|^2$

$= |\alpha|^2-2\alpha\cdot\gamma+|\gamma|^2+|\gamma|^2-2\gamma\cdot\beta+|\beta|^2+2|\alpha-\gamma||\gamma-\beta|$

$\Rightarrow |\alpha-\beta|^2-(|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|)^2$

$= -2\alpha\beta+2\alpha\cdot\gamma+2\gamma\cdot\beta-2|\alpha-\gamma||\gamma-\beta|-2|\gamma|^2$

$= 2((\alpha-\gamma)\cdot(\gamma-\beta)-|\alpha-\gamma||\gamma-\beta|)$

$\leq 2(|\alpha-\gamma|\cdot|\gamma-\beta|-|\alpha-\gamma||\gamma-\beta|)$

$=0$

$\therefore |\alpha-\beta|\leq|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$

(3) 设 P、Q、R 为 $\mathbb{R}^n$ 中三个点

则由 (2) 知

$d(P,Q)\leq d(P,R)+d(R,Q)$

扫描全能王 创建