习题 1.4

1. (1) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$

证：$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\dfrac{|x-a|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|}$，当 $x>0$ 时，有 $\dfrac{|x-a|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|}<\dfrac{|x-a|}{\sqrt{a}}$

因此对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$

取 $\delta=\min\{a,\varepsilon\sqrt{a}\}$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon$$

(2) $\lim\limits_{x\to a}x^2=a^2$

证：$|x^2-a^2|=|x-a||x+a|$

当 $|x-a|<1$ 时，有 $a-1<x<a+1\Rightarrow 2a-1<x+a<2a+1$

记 $M=\max\{|2a-1|,|2a+1|\}$

$\Rightarrow$ 当 $|x-a|<1$ 时，有 $|x+a|<M\Rightarrow|x^2-a^2|<|x-a|M$

因此对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|x^2-a^2|<\varepsilon$，只需 $|x-a|M<\varepsilon$

取 $\delta=\min\{1,\dfrac{\varepsilon}{M}\}$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|x^2-a^2|<\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$$

(3) $\lim\limits_{x\to a}e^x=e^a$

证：$|e^x-e^a|=e^a|e^{x-a}-1|$

因此，对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|e^x-e^a|<\varepsilon$，只需 $|e^{x-a}-1|<\dfrac{\varepsilon}{e^a}$

$\Rightarrow 1-\dfrac{\varepsilon}{e^a}<e^{x-a}<1+\dfrac{\varepsilon}{e^a}$

若 $\varepsilon\geq e^a$，则只需 $|x-a|<\ln(1+\dfrac{\varepsilon}{e^a})$，取 $\delta=\ln(1+\dfrac{\varepsilon}{e^a})$ 即可.

若 $\varepsilon<e^a$，则只需 $\ln(1-\dfrac{\varepsilon}{e^a})<x-a<\ln(1+\dfrac{\varepsilon}{e^a})$.

取 $\delta=\min\{|\ln(1-\dfrac{\varepsilon}{e^a})|,\ln(1+\dfrac{\varepsilon}{e^a})\}$ 即可.

daolien®

扫描全能王 创建

(4) $\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$

$|\cos x-\cos a|=\left|-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\le|x-a|$

对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，当$|x-a|<\delta$时，有$|\cos x-\cos a|<\varepsilon$

2. 由$\lim_{x\to a}f(x)=l$知

对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$|x-a|<\delta$时，有$|f(x)-l|<\varepsilon$

取$\varepsilon=1$，$\exists\delta>0$，当$|x-a|<\delta$时，有$|f(x)-l|<1$

$\Rightarrow l-1<f(x)<l+1\Rightarrow|f(x)|\le\max\{|l-1|,|l+1|\}$

$\Rightarrow f(x)$有界

3. (2) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}$

(4) $\lim_{x\to1}\frac{x^2-x-2}{2x^2-2x-3}$

$=\frac{1-1-2}{2-2-3}$

$=\frac{2}{3}$

(6) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{10}}{(2x+1)^{30}}$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{10}}{(2+\frac{1}{x})^{30}}$

$=\frac{2^{20}3^{10}}{2^{30}}$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$

(8) $\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$

$=\lim_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x+1)(x^3+1)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$

$=-1$

扫描全能王 创建

(10) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)}{x-1}$

$= n$

(12) $\lim_{x\to 0} \frac{a_0x^m+\cdots+a_m}{b_0x^n+\cdots+b_n}$

$= \frac{a_m}{b_n}$

(14) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6+8}}{x^3+1}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{8}{x^6}}}{1+\frac{1}{x^3}}$

$= 1$

(16) $\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^3-a^3}}$

$= \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x^2+ax+a^2}}$

$= \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x^2+ax+a^2}} + \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x^2+ax+a^2}}$

$= \lim_{x\to a^+} \frac{x-a}{\sqrt{x-a}\cdot\sqrt{x^2+ax+a^2}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{3}a}$

$= \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2+ax+a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})} + \frac{1}{\sqrt{3}a}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}a}$

4. (2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2)}{3x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x^2)\cdot 2x}{2x^2\cdot 3}$

$= 1\cdot 0 = 0$

(4) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cdot\frac{x}{2}}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}$

$= \sqrt{2}$

(6) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{-x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{(-k)}$

$= e^{-k}$

(8) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+100}$

$= \lim_{x\to+\infty} \left(\left[1+\frac{1}{x}\right]^x\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{100}$

$= e$

daoben®

扫描全能王 创建

JUST YOU...

5. 对 $\forall M>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $f(x)>M$

则称 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

对 $\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $x<-X$ 时，有 $f(x)<-M$

则称 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

扫描全能王 创建