习题 4.1

2.

(1) $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 内可导且 $f(-1)=f(1)=0$，因此满足罗尔定理的使用条件.

$$f'(x)=(1+x)^{m-1}(1-x)^{n-1}(m-n-(m+n)x)$$

令 $f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{m-n}{m+n}$

(2) 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{x^2}-1}{x}=\infty$$

故 $f'(0)$ 不存在，不满足罗尔定理使用条件

4. (1) $\exists C$ 介于 x,y 之间，满足

$$\frac{\sin y-\sin x}{y-x}=\cos c$$

因此 $|\sin y-\sin x|=|\cos c||y-x|$

$$\le |y-x|$$

(2) $\exists C$ 介于 x,y 之间，满足

$$\frac{\tan y-\tan x}{y-x}=\sec^2 c$$

因此 $|\tan y-\tan x|=|\sec^2 c||y-x|$

$$\ge |y-x|$$

(3) $\exists C\in(a,b)$，满足

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{C}$$

$$\Rightarrow \ln\frac{b}{a}=\frac{1}{c}(b-a)$$

由 $\frac{1}{b}<\frac{1}{c}<\frac{1}{a}$，得

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$$

6. 考虑辅助函数

$$F(x)=c_1\sin x+\frac{c_2}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{c_n}{n}\sin nx$$

由 $F(0)=F(\pi)=0$，由 Rolle 定理知 $\exists c\in(0,\pi)$，使得 $F'(c)=0$

即 $f(c)=0$

8. 由中值定理知，$\exists C$ 介于 0 与 x 之间，满足

$$f(x)=f(0)+f'(c)x=kx+f(0)$$

令 $b=f(0)$ 即可

10. 令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

令 $g(x)=x\cos x-\sin x$

$$g'(x)=\cos x+(-x\sin x)-\cos x$$

$$=-x\sin x$$

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，有 $g'(x)<0$

故 $g(x)<g(0)=0$ $(x\in(0,\frac{\pi}{2}))$

因此 $f'(x)<0$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$

故 $f(\frac{\pi}{2})<f(x)<\lim_{x\to 0^+}f(x)$

即 $\frac{2}{\pi}<f(x)<1$

因此 $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$

11. $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

由 Lagrange 中值定理，$\exists C$ 介于 x 与 x_0 之间

$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c)$，且 $\lim_{x\to x_0}C=x_0$

因此 $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(c)=\lim_{x\to x_0}f'(x)$

扫描全能王 创建

4.2

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x - \ln(1+x)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{1-(1+x)^{-1}}$

$= \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{1-(1+x)^{-1}}{x}}$ $(\sin x \sim x)$

$= \lim_{x\to 0} -\frac{x}{1-(1+x)^{-1}}$

$= -1$

4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x}$

$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}$

$= \lim_{t\to +\infty} \frac{3-t}{1-3t}$ $(\text{令 } t=\tan^2 x)$

$= \frac{1}{3}$

6. $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x \quad (\alpha > 0)$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$

$= -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0$

8. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} (\tan x)^{2x-\pi}$

$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} e^{(2x-\pi)\ln \tan x}$

$= e^{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}}$

$= e^{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{1}{\sin x \cos x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}}}$

$= e^{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} -\frac{(2x-\pi)^2}{\sin 2x}}$

$= e^{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} -\frac{2x-\pi}{\cos 2x}}$

$= e^0 = 1$

10. $\lim_{y\to 0} \frac{y - \arcsin y}{\sin^3 y}$

$= \lim_{y\to 0} \frac{y - \arcsin y}{y^3}$ $(\sin y \sim y)$

$= \lim_{y\to 0} \frac{1-(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}}{3y^2}$

$= \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{1}{2}y^2}{3y^2}$ $((1+y)^{\alpha}-1 \sim \alpha y)$

$= -\frac{1}{6}$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x\sin^3 x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2-e^{-x^2}}{x^4}$ $(\sin x \sim x)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2x+2xe^{-x^2}}{4x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2+2e^{-x^2}}{4x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-4xe^{-x^2}}{8x}$

$= -\frac{1}{2}$

14. $\lim_{x\to +\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}$

$= \lim_{x\to +\infty} (\arctan \frac{1}{x})^{\frac{1}{\ln x}}$ $(\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2})$

$= e^{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln \arctan \frac{1}{x}}{\ln x}}$

$= e^{\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{\arctan \frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\right) \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}}$

$= e^{\lim_{x\to +\infty} -\frac{x}{\arctan \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2+1}}$

$= e^{\lim_{x\to +\infty} -\frac{x^2}{x^2+1}}$ $(\arctan \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x})$

$= e^{-1}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x + \sin x}{2x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x + \cos x}{2}$

$= 1$

扫描全能王 创建

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\arctan x-1}{\frac{1}{x}}} \qquad (\ \ln(1+t)\sim t\ ,\ t\to 0)$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}-1}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{1+x^2}} = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

扫描全能王 创建