

第九次作业答案

4.4.1 (2) 我们知道 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林公式可以写成如下的形式:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n)$$

在上面的表达式中带入 $-x$, 我们得到:

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

从而对于本问题我们就有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} &= \frac{1}{2} (\ln(1-x) - \ln(1+x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{2k} x^k + o(x^n) \\ &= -\sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + o(x^{2n-1}) \end{aligned}$$

其中 $x \rightarrow 0$.

(4) 直接对原式化简:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = (x + 3) + \frac{2}{x - 1}$$

在 $(1+x)^a$ 的麦克劳林公式中令 $a = -1$, 再代入 $-x$ 得到下面的公式:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

于是我们就有:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1} = 1 - x - 2 \sum_{k=2}^n x^k + o(x^n)$$

其中 $x \rightarrow 0$.

4.4.2 (1) 在 e^x 和 $\sin x$ 的麦克劳林公式中分别取到 x^3 和 x^4 项, 也就是:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

相乘之后化简, 我们直接就得到:

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

其中 $x \rightarrow 0$, 注意 x^4 项消去了.

(3) 注意我们在 $(1+x)^a$ 的麦克劳林公式中令 $a = 1/2$, 得到下面的公式:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

然后在该表达式中分别代入 $x^3 - 2x$ 和 $x^2 - 3x$, 则我们有:

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt{1-3x+x^2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}(x^3-2x) - \frac{1}{8}(x^3-2x)^2 + \frac{1}{16}(x^3-2x)^3 + o(x^3)\right) \\ & \quad - \left(1 + \frac{1}{2}(x^2-3x) - \frac{1}{8}(x^2-3x)^2 + \frac{1}{16}(x^2-3x)^3 + o(x^3)\right) \\ &= \left(1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{15}{16}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{17}{16}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

其中 $x \rightarrow 0$.

4.4.3 (2) 本题可以直接通过求导得到结果 (需要递推), 这里我们用另一种方法. 注意到 $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$. 我们在 $(1+x)^a$ 的麦克劳林公式中令 $a = -1/2$, 再代入 $-x^2$, 我们就得到公式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}(-x^2)^k + o(x^{2n}) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n}) \end{aligned}$$

两边同时取原函数我们就得到:

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

4.4.4 (2) 先通分, 然后再利用麦克劳林公式进行化简:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x+x^2/2+o(x^2))-x-1}{x(1+x+o(x)-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3) 与上一题一样, 通分后用麦克劳林公式化简:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) \frac{1}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - x^3/6 + o(x^3)) - x(1 - x^2/2 + o(x^2))}{x(x+o(x))^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4.4.5 我们直接计算两者之间的误差, 注意利用 $\sin x$ 在 a 处的 Taylor 展开 (或者 $\sin(x+a)$ 的麦克劳林展开), 采用拉格朗日余项:

$$\begin{aligned} & |\sin a + x \cos a - \sin(x+a)| \\ &= \left| \sin a + x \cos a - \left(\sin a + x \cos a - \frac{\sin a}{2}x^2 - \frac{\cos a}{6}\xi^3 \right) \right| \\ &= \left| \frac{\sin a}{2}x^2 + \frac{\cos a}{6}\xi^3 \right| \\ &\leq \left| \frac{\sin a}{2} \right| |x|^2 + \left| \frac{\cos a}{6} \right| |\xi|^3 \end{aligned}$$

其中 $x \rightarrow 0$, $\xi \in (0, x)$. 当 $|\sin a| = 1$ 时, $\cos a = 0$, 此时上式就是我们要证的结论. 当 $|\sin a| \neq 1$ 时, 注意 $|\cos a|/6 < 1$, 因此我们有:

$$\left| \frac{\sin a}{2} \right| |x|^2 + \left| \frac{\cos a}{6} \right| |\xi|^3 \leq \left(\left| \frac{\sin a}{2} \right| + |x| \right) |x|^2$$

由于 $|\sin a|/2 < 1/2$, 因此可以取到足够小的 δ , 使得 $|x| < \delta$ 时, $|\sin a|/2 + |x| < 1/2$, 例如 $\delta = (1 - |\sin a|)/2$. 因此综上, 得证当 $x \rightarrow 0$ 时, 成立:

$$|\sin a + x \cos a - \sin(x+1)| \leq \frac{|x|^2}{2}$$

4.5.1 (2) 直接求导, 得到:

$$y' = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} = \frac{x-2}{x^3}$$

求解方程得知其零点为 $x = 2$. 当 $x < 0$ 时 $y' > 0$, 从而 $(-\infty, 0)$ 是 y 一个单调递增区间; $0 < x < 2$ 时 $y' < 0$, 从而 $(0, 2)$ 是 y 一个单调递减区间, 注意在 0 处函数没有定义; $x > 2$ 时 $y' > 0$, 从而 $(2, +\infty)$ 是 y 一个单调递增区间, 并且 $x = 2$ 是 y 的一个极小值点.

(4) 直接求导, 得到:

$$y' = -\frac{1}{x^2} \ln^2 x + \frac{2}{x^2} \ln x = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$$

求解方程知其零点为 $x = 1$ 和 $x = e^2$. 当 $0 < x < 1$ 时 $y' < 0$, 从而 $(0, 1)$ 是 y 的一个单调递减区间; 当 $1 < x < e^2$ 时, $y' > 0$, 从而 $(1, e^2)$ 是 y 的一个单调递增区间, $x = 1$ 是 y 的一个极小值点; $x > e^2$ 时, $y' < 0$, 从而 $(e^2, +\infty)$ 是 y 的一个单调递减区间, 并且 $x = e^2$ 是 y 的一个极大值点.

4.5.3 设等腰三角形底边长度为 x , 则每条腰的长度都是 $p - x/2$, 并且考虑到边长是正的, 以及三角不等式, 我们有基本要求 $0 < x < p$. 利用勾股定理我们得知其高为 $\sqrt{p^2 - px}$

利用旋转体的体积公式 (或者圆锥体积公式), 我们得到旋转体的体积为:

$$2 \times \frac{1}{3} \pi (p^2 - px) \frac{x}{2} = -\frac{\pi p}{3} x^2 + \frac{\pi p^2}{3} x$$

直接利用二次函数的性质就能得到其最大值在 $x = p/2$ 时取到.

4.5.4 题目条件即要求成立 $f(-1) = 2$ 和 $f'(-1) = 0$, 计算后得到关于 l 和 k 的二元一次方程组:

$$\begin{cases} -1 + l - k = 2 \\ 3 - 2l + k = 0 \end{cases}$$

解得 $l = 0$, $k = -3$, 原函数和其导数为 $f(x) = x^3 - 3x$ 和 $f'(x) = 3x^2 - 3$. 导函数的零点为 $x = 1$ 和 $x = -1$, 并且分析符号知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递增, $(-1, 1)$ 单调递减, $(1, +\infty)$ 单调递增, 并且 $x = -1$ 是其极大值点, $x = 1$ 是其极小值点. 在 $[0, 3]$ 上, 由上面的结论知最小值在 $x = 1$ 处取到 -2 , 比较端点处的值之后得知最大值在 $x = 3$ 处取到 18 .

4.5.5 设高度为 x , 则根据勾股定理有 $r^2 = x^2 + a^2$, 并且 $\sin \varphi = x/r$. 因此根据定义, 照度为:

$$J(x) = K \frac{x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

求导后得到:

$$J'(x) = K \frac{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x^2}{(x^2 + a^2)^3} = K \frac{a^2 - 2x^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}$$

注意取值范围为 $x \geq 0$. 从而当 $0 \leq x < a/\sqrt{2}$ 时 $J'(x) > 0$, $J(x)$ 单调递增; $x > a/\sqrt{2}$ 时 $J'(x) < 0$, $J(x)$ 单调递减, 最大值在 $x = a/\sqrt{2}$ 时取到.

4.5.7 设圆锥体的高为 x , 则根据球的性质以及勾股定理, 底面到球心的距离为 $x - a$, 圆锥体的底面半径为 $\sqrt{a^2 - (x - a)^2}$, 这里取值范围 $a \leq x < 2a$ (注意同样的底面半径对应两个内接圆锥, 很明显大于 a 的圆锥体积更大, 只考虑这个). 利用圆锥体积公式, 圆锥的体积为:

$$V = \frac{1}{3}\pi(a^2 - (x - a)^2) \cdot x = -\frac{\pi}{3}x^3 + \frac{2\pi a}{3}x^2$$

对其求导, 得到:

$$V' = -\pi x^2 + \frac{4\pi a}{3}x$$

从此表达式看出 $a < x < 4a/3$ 时 $V' > 0$, 此时 V 单调递增; $4a/3 < x < 2a$ 时 $V' < 0$, 此时 V 单调递减, 因此 $x = 4a/3$ 时取到体积的最大值, 此时底面半径为 $\sqrt{a^2 - a^2/9} = 2\sqrt{2}a/3$.

4.5.8 只需要计算该距离的平方最短, 表达式为:

$$f(x) = (x - 18)^2 + y^2 = x^2 - 36x + y^2 + 324 = x^2 - 32x + 324$$

这是关于 x 的二次函数, 最小值在 $x = 16$ 处取到. 此时距离最短的点为 $(16, 8)$ 或者 $(16, -8)$.

4.5.11 设平行于 x 轴的底边对应于直线 $y = t$, 则为了使内接三角形为等腰三角形, 顶点只能为 $(0, b)$ 或者 $(0, -b)$. 考虑到为了使面积最大, 根据对称性, 我们不妨顶点为 $(0, b)$ 并且 $-b < t \leq 0$ 成立.

将直线代入椭圆方程, 我们得到底边两个顶点的横坐标为:

$$\pm \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{t^2}{b^2}\right)}$$

并且等腰三角形的高为 $b - t$, 因此根据面积公式我们就得到:

$$S = \frac{1}{2}(b - t)2\sqrt{a^2 - t^2} = \frac{a}{b}(b - t)\sqrt{b^2 - t^2}$$

求导我们就得到:

$$S' = \frac{a}{b} \left(-\sqrt{b^2 - t^2} - \frac{t(b - t)}{\sqrt{b^2 - t^2}} \right) = \frac{a}{b} \frac{2t^2 - bt - b^2}{\sqrt{b^2 - t^2}}$$

分子的两个根为 $t = b$ 和 $t = -b/2$, 利用取值范围我们可以看出当 $-b < t < -b/2$ 时 S 单调递增, $-b/2 < t < 0$ 时 S 单调递减, 从而最大值在 $t = -b/2$ 时取到, 代入原式知最大面积为 $3\sqrt{3}ab/4$.