Week 8 Lecture 11

Plan: 1. 间断点举例

2. 连续函数的性质(局部)

3. 闭区间上连续函数的性质(I)

回顾, 连续 $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

间断: Q1 $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ 存在?

Q2. $f(x_0+0) \overset{?}{=} f(x_0-0)$.

例 3.2.3 $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

在 $x=0$ 处

由 $|x\sin(\frac{1}{x})| \le |x|$ 知

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$, 可去间断点,

例3.2.4. $f(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ 在 $x=1$ 处

当 $x>1$ 时 $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(1+0)=1$

当 $\frac{1}{2}<x<1$ 时 $f(x) = \frac{1}{x}-1$, $f(1-0)=0$

由 $f(1+0)\neq f(1-0)$, $f(x)$ 在 $x=1$ 处为

跳跃间断点.

例 3.2.6. $f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

已证 $f(0+0)$, $f(0-0)$ 均不存在

$f(x)$ 在 $x=0$ 处为第二类间断点,

例 3.2.7

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x=\frac{q}{p}\in(0,1) \ p,q\in\mathbb{N} \text{ 互素} \\ 0 & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q} \\ 1 & x=0 \text{ 或 } 1 \end{cases}$$

$\forall x_0\in(0,1)$ $\forall \varepsilon>0$ 存在 $p\in\mathbb{N}$

s.t. $\frac{1}{p}<\varepsilon$, 则在 $(0,1)$ 内只有

有限点, 使 $R(x)\ge\frac{1}{p}$. 故 $\exists \delta$ s.t.

$\forall x\in \mathring{U}_0(x_0,\delta)$, $|R(x)-0| < \frac{1}{p} < \varepsilon$

则 $\lim_{x\to x_0} R(x) = 0$

则 $R(x)$ 在 $(0,1)\setminus\mathbb{Q}$ 上连续

在 $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ 上 可去间断

定理 3.1.8 设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_0^+(x_0,\delta_0)$ 上定义, 若 $f(x)$ 在 $\mathring{U}_0^+(x_0,\delta_0)$ 上单调上升

则 $f(x_0+0) = \inf\{f(x): x\in\mathring{U}_0^+(x_0,\delta_0)\}$

注: (1) 类似有 $\mathring{U}_0^-(x_0,\delta_0)$, 单调递减

等平行结果

(2) 确界可取 $\pm\infty$.

例 3.2.9. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上

单调, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内只能有第一类

间断点.

由定理 3.1.8 知, $\forall \xi\in(a,b)$

$f(\xi+0)$, $f(\xi-0)$ 均存在 (有限值)

注: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调上升

又在 $\xi\in(a,b)$ 处间断

则只能有 $f(\xi-0) < f(\xi+0)$

且 $f(x)$ 在 (a,b) 内取不到

$(f(\xi-0), f(\xi+0))\cap$ 值域 的值

※ 连续函数的性质

(1) 局部有界

(2) 局部保号 (常用)

(3) 四则运算

(4) 复合函数

定理 3.2.1. 设 $u=g(x)$ 在 x_0 连续, $y=f(u)$ 在 $u=g(x_0)$ 处连续, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 连续

(5) 反函数

定理 3.2.2 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续且严格单调, 则 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(I)$ 上连续

证明: 显然 $f^{-1}(y)$ 在在

不妨设单调递增, 则 $f^{-1}(y)$ 单调上升

另外由 $f(x)$ 连续, 则 $f(I)$ 为一区间 (练习)

$\forall y_0 \in f(I)$ $\exists x_0 \in I$, s.t. $x_0=f^{-1}(y_0)$

若 x_0 不是端点,

$\forall \varepsilon>0$, $\exists x_1, x_2 \in I$ s.t.

$$x_0-\varepsilon<x_1<x_0<x_2<x_0+\varepsilon$$

记 $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$ 则有

$$y_1<f(x_0)<y_2$$

令 $\delta=\min\{y_0-y_1, y_2-y_0\}$

则当 $y \in U(y_0,\delta)$ 时, $y_1<y<y_2$

且 由 $f(I)$ 是一个区间知 $y \in f(I)$

于是 $\forall y \in U(y_0,\delta)$

$$x_0-\varepsilon<f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y)<f^{-1}(y_2)<x_0+\varepsilon$$

即 $|f^{-1}(y)-x_0|<\varepsilon$

则 $f^{-1}(y)$ 在 y_0 连续

若 x_0 是端点, 类似可证单侧连续. □

阅读初等函数的连续性

※ 闭区间上连续函数

(1) 有界性

定理 3.3.1 设函数 $f(x) \in C[a,b]$

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

分析: ① 闭区间套

② 有限覆盖

注: ① 开区间不一定成立

e.g. $f(x)=\frac{1}{x}$ $x \in (0,1)$

② 有界 $\Rightarrow \sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, $\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$ 有限

(2) 最值定理

定理 3.3.2 设 $f(x) \in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大, 最小值, 即

$\exists \xi, \eta \in [a,b]$ s.t. $f(\xi) \le f(x) \le f(\eta)$, $\forall x \in [a,b]$

证明: 令 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, 则由上确界

$\exists$ 序列 $\{x_n\} \subset [a,b]$ s.t.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=M$$

由 $\{x_n\}$ 有界, 必存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$

设 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$，则 $\xi \in [a,b]$，再由连续性

即有 $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi) = M$

同理可证 $\exists \xi \in [a,b]$ s.t. $f(\xi) = \inf_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$

记号 $\inf_{x\in[a,b]} \{f(x)\} = \min_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$,

$\sup_{x\in[a,b]} \{f(x)\} = \max_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$

(3) 介值定理，定理 3.3.3

设 $f(x) = C[a,b]$，记 $m = \min_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$

$M = \max_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$，则 $f([a,b]) = [m,M]$

即 $\forall \eta \in (m,M)$，$\exists \xi \in [a,b]$，s.t. $f(\xi) = \eta$

证明：由最值定理，$\exists x_1, x_2 \in [a,b]$

s.t. $f(x_1) = m$，$f(x_2) = M$，不妨令 $x_1 < x_2$

$\forall \eta \in (m,M)$，定义

$E = \{x \in [x_1, x_2] : f(x) > \eta\}$

显然 $x_1 \notin E$，$x_2 \in E$（非空，有下界）

令 $\xi = \inf E$，下面证 $f(\xi) = \eta$

显然，$f(\xi) \geq \eta$，若 $f(\xi) > \eta$

由局部保号性 $\exists \delta$，s.t. 当 $x \in U(\xi, \delta)$

有 $f(x) > \eta$

注意：$[x_1, x_2] \cap (\xi - \delta, \xi)$ 非空，故取

$\xi' \in [x_1, x_2] \cap (\xi - \delta, \xi)$

则 $\xi' < \xi$，且 $f(\xi') > \eta$

这与 $\xi = \inf E$ 矛盾

例 3.3.3 设 $f(x) \in C[a,b]$

$x_j \in [a,b]$，$j = 1, 2, \cdots, n$

证明 $\exists \xi \in [a,b]$ s.t. $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$

证明：记 $m = \inf_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$，$M = \sup_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$

则 $m \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \leq M$

由介值定理，$\exists \xi \in [a,b]$ s.t.

$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)$

注：此题换成 (a,b) 仍对，（练习）

定理 3.3.4 零点存在定理

$f(x)$ 在区间 I 上连续，若 $\exists \alpha, \beta \in I$

$\alpha < \beta$ 且 $f(\alpha) f(\beta) < 0$ 且 $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$

s.t. $f(\xi) = 0$

例 3.3.4：证明 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a > 0)$

至少有一个根

令 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$= ax^3 \left(1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}\right)$

显然，$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

则 $\exists \alpha < 0$，$\beta > 0$ s.t. $f(\alpha) < 0$，$f(\beta) > 0$

显然 $f(x) \in C[\alpha, \beta]$.

则 $\exists \xi \in (\alpha, \beta)$ s.t. $f(\xi) = 0$.