Week 10 Lecture 15

Plan: 1. 一阶微分的形式不变性
2. 高阶导数
3. 高阶微分

回顾 $y=f(x)$ $U(x_0,\delta_0)$

$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$

记 $dy = A\Delta x$ (但 $\Delta y \neq dy$)

又 $y=x$ 时 $dy=\Delta x$, $dy=dx$

常记 $dy = A\,dx$ $(A=f'(x_0))$

设 $y=f(u)$ $u=g(x)$ 复合 $y=f(g(x))$

$dy = (f(g(x)))'dx = f'(g(x))g'(x)\,dx$

$du = g'(x)\,dx$

代入得 $dy = f'(g(x))\,du = f'(u)\,du$

这里 $u=g(x)$ 是 x 的函数.

再考虑 $y=f(u)$, 微分得 $dy=f'(u)du$

这里 u 是自变量

注意 u 是自变量 $du=\Delta u$.

但 u 是函数的话, Δu, du 不同

但是形式上, 相同

$\Rightarrow$ 一阶微分的形式不变性.

eg. 设 $y=f(x)$ $x=f^{-1}(x)$ $f'(x_0)\neq 0$

$dy = f'(x_0)\,dx$ $\frac{dy}{dx}=f'(x_0)$

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x_0)}$

e.g. $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$

$dx = x'(t)\,dt$

$dy = y'(t)\,dt$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)\,dt}{x'(t)\,dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$

例 4.34 设 $y=\frac{x-a}{1-ax}$, $(|a|<1)$

当 $|x|<1$ 时, 有 $\frac{dy}{1-y^2}=\frac{dx}{1-x^2}$

证明: $dy = \frac{1-a^2}{(1-ax)^2}dx$

$1-y^2 = 1-\frac{(x-a)^2}{(1-ax)^2} = \frac{(1-a^2)(1-x^2)}{(1-ax)^2}$

$= \frac{dy}{dx}(1-x^2)$

$\Rightarrow \frac{dx}{1-x^2}=\frac{dy}{1-y^2}$

例 4.35 由 $\sin y^2 = \cos 5x$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数

$2y\cos y^2\,dy = -\frac{\sin 5x}{2\sqrt{x}}dx$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin 5x}{4y\cos y^2\sqrt{x}}$

※ 高阶导数 对 $y=f(x)$

$(f'(x))'$ 二阶导数 记为 $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

$(f''(x))'$ 三阶导数

n 阶导数, 记为 $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $\frac{d^ny}{dx^n}$

例 4.43 $y=\ln(1+x)$ 求 $y^{(n)}$

$y' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$y'' = -1(1+x)^{-2}$

数学归纳可知

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n\geq 1)$$

例 4.4.4 设 $y=\sin(x)$，求 $y^{(n)}$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$(e^{ix})^{(n)} = (\cos x)^{(n)} + i(\sin x)^{(n)}$$

$$(e^{ix})^{(n)} = i^n e^{ix} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^n e^{ix}$$

$$= e^{i(x+\frac{n\pi}{2})}$$

$$= \cos(x+\tfrac{n\pi}{2}) + i\sin(x+\tfrac{n\pi}{2})$$

则 $(\cos x)^{(n)} = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x+\tfrac{n\pi}{2}).$$

定理 4.4.1 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$.

证明：数学归纳法.

例 4.4.6 $y=\arcsin(x)$，求 $y^{(n)}(0)$.

策略一，直接求，找规律

✓ 策略二，找 $y^{(n)}(0)$，$y^{(n+1)}(0)$ 之间的递推关系。

关键：找到一个"简单"的平台.

解：$y=\arcsin x \quad y(0)=0$

(*) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （不很麻烦）

$\sqrt{1-x^2}\,y' = 1 \qquad y'(0)=1$

$(1-x^2)(y')^2 = 1$

$(1-x^2)\,2y'y'' - 2x(y')^2 = 0$

$y'[(1-x^2)2y'' - 2xy'] = 0$

在 $|x|<1$ 时，由(*)知 $y'\neq 0$

则 $(1-x^2)y'' - xy' = 0 \quad (\Delta)$

法 $(1-x^2)^{(k)} = 0, \quad k\geq 3$

$x^{(k)} = 0, \quad k\geq 2$

对 (Δ) 求 $(n-2)$ 次导数

$$(1-x^2)y^{(n)} + C_{2n}^1(-2x)y^{(n+1)}$$

$$+ C_{n-2}^2(-2)y^{(n-2)} - xy^{(n+1)} - C_{n-2}^1 y^{(n-2)} = 0$$

代之 $x=0$，得

$$y^{(n)}(0) - (n-2)(n-3)y^{(n+1)}(0) - (n-2)y^{(n-2)}(0) = 0$$

又因 $y^{(0)}(0)=0$，$y^{(1)}(0)=1$ 得

$y^{(2n)}(0)=0$.

$y^{(2n+1)}(0) = (2n-1)^2(2n-3)^2\cdots 1^2$

$= [(2n-1)!!]^2$。

例 4.4.7 设 $y=y(x)$ 是由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (y>0)$ 确定

试求 y''.

解法一. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$$y' = \frac{b}{2a}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$= -\frac{bx}{a}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = -\frac{b}{a}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ (-\frac{bx}{a})\cdot(-\frac{1}{2})(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$$

$$= -\frac{b}{a}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{bx^2}{a}(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

解法二. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}(t)\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)'\frac{1}{x'(t)}$$

$$=+\frac{b}{a}\frac{1}{\sin^2 t}\cdot\frac{1}{-a\sin t}$$

$$=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

解法三. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y(x))^2}{b^2}=1$

$$\frac{2x}{a}+\frac{2y(x)y'(x)}{b^2}=0$$

$$\frac{x}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0,\quad y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{(y')^2+yy''}{b^2}=0$$

$$y''=\left(-\frac{b^2}{a^2}-y'^2\right)\frac{1}{y}$$

$$=-\frac{b^4}{a^2y^3}$$

※ 高阶微分

观察 $df=f'(x)dx$

dx 与 x 无关，df 是 x 的函数

二阶微分 $d^2f=d(df)$

$$=(df)'dx=f''(x)dx^2$$

注意 $dx^2=dx\,dx\neq d(x^2)=2x\,dx$

n 阶微分 $d^nf=f^{(n)}(x)dx^n$

（回顾 $f^{(n)}(x)=\frac{d^nf}{dx^n}$）

考虑 $y=f(u)$，u 为自变量

$$d^2y=f''(u)\,du^2$$

另考虑 $y=f(u)$，$u=g(x)$，$y=f(g(x))$

$$dy=f'(g(x))g'(x)\,dx$$

$$d^2y=f''(g(x))(g'(x))^2dx^2$$

$$+f'(g(x))g''(x)\,dx^2$$

$du=g'(x)\,dx$　　$d^2u=g''(x)\,dx^2$

$$\Rightarrow d^2y=f''(u)\,du^2+f'(u)\,d^2u$$

若 $d^2u\neq 0$，即 $g''(x)\neq 0$，则二阶微分不具有形式不变性.