Lecture 17

Plan: 1. 柯西微分中值定理

2. 洛必达法则 (I)

定理 5.1.4 (Cauchy)

若 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，而且 $g'(x)\neq 0$，则在 (a,b) 内存在一点 ξ，s.t.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

分析：① 若分别用 Lagrange，则

$\exists \xi_1,\xi_2\in(a,b)$ s.t.

$$f'(\xi_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g'(\xi_2)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

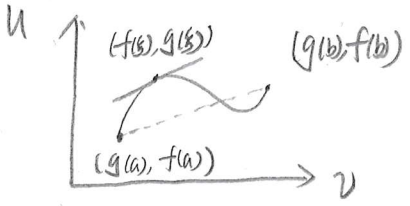
$$\Rightarrow \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

但 ξ_1,ξ_2 可不同.

② 几何意义

$$\begin{cases} u=g(x), \\ v=f(x), \end{cases} \quad x\in[a,b]$$

切线斜率 $\frac{dv}{du}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$



证明：由 $g'(x)\neq 0$ 可知 $g(a)\neq g(b)$

构造

$$G(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\right]$$

$G(a)=0 \quad G(b)=0$

由 Rolle 知，$\exists \xi\in(a,b)$ s.t. $G'(\xi)=0$

即 $f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0$

即证。 ∎

例 5.1.7. 设 $f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，而且 $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}f'(x)=l$.

证明：$f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上一致连续

证明：由 $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}f'(x)=l$ 知，$\exists M>0$ 且 $c\in(0,1)$ s.t.

$$|\sqrt{x}f'(x)|\leq M, \quad \forall x\in(0,c]$$

则 $\forall x_1,x_2\in(0,c]$，$x_1\neq x_2$

由 Cauchy 知 $\exists \xi$ 在 x_1,x_2 间

s.t. $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}=\frac{f'(x)}{(\sqrt{x})'}\Big|_{x=\xi}=2\sqrt{\xi}f'(\xi)$

则有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leq 2M|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|$

再由 $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$?

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|^2\leq|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}||\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}|$$

$$=|x_1-x_2|$$

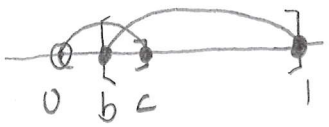
$$\Rightarrow |\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leq|x_1-x_2|^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\leq 2M|x_1-x_2|^{\frac{1}{2}}$$

则对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon^2}{(2M)^2}$，则当 $x_1,x_2\in(0,c]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

于是 $f(x)$ 在 $(0,c]$ 上一致连续



又由 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上连续

易证(练习) $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上一致连续

※ 回忆 若 $\lim_{x\to a} f(x)=A$, $\lim_{x\to b} g(x)=B$

则 (1) $\lim_{x\to a} f(x)\pm g(x) = A\pm B$.

(2) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$.

(3) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ $(B\neq 0)$

(4) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B$

例外：不定式

$\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$,

1^∞, 0^0, ∞^0.

但基本都可以化成 $\frac{0}{0}$ 型

定理 5.2.1 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $U_0(a,\delta)$ 上可导

且: (1) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

(2) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in U_0(a,\delta)$

(3) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (有限或无穷)

则有 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

证明：只证 l 为有限数

补充定义 $f(a)=0$, $g(a)=0$

则 $f(x)$, $g(x)$ 在 a 点连续

$\forall x\in(a-\delta,a)$, 在 $[x,a]$ 上

使用 Cauchy 微分中值定理

$\exists \xi\in(x,a)$ s.t. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

则由(3)知 $\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

同理可证 $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

于是有 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. ▨

定理 5.2.2. 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $(a>0)$

$U=\{x: |x|>a\}$ 上可导,

满足: (1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

(2) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in U$

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$. (有限或无穷)

证明：只证 l 有限

考虑 $x=\frac{1}{t}$, 则 $t\to 0+0$ $(x\to+\infty)$

于是 $\lim_{t\to 0+0} f(\frac{1}{t})=0$, $\lim_{t\to 0+0} g(\frac{1}{t})=0$

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

于是 由定理 5.2.1

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0+0} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = l$$

于是 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

同理 $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

于是有 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. ▨

例 5.2.1 $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x - x}{\sin x - x}$ "$\frac{0}{0}$"

$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{\cos x - 1}$ "$\frac{0}{0}$"

$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{-\sin x}$ "$\frac{0}{0}$"

$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x}{-\cos x}$ "$\frac{1}{-1}$"

$= -1$

例 5.2.2. $\lim_{x\to 0+0} \frac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}$

$\overset{t=\sqrt{x}}{=} \lim_{t\to 0+0} \frac{t}{1-e^{2t}}$ "$\frac{0}{0}$"

$\overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0+0} \frac{1}{-2e^{2t}}$ "$\frac{1}{-2}$"

$= -\frac{1}{2}$

例 5.2.3 $\lim_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$ "$\infty\cdot 0$"

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$ "$\frac{0}{0}$"

$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$ "$\frac{0}{0}$"

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}$

$= 1$