Lecture 18

Plan: 洛必达法则 (II)

回顾: $\frac{0}{0}$ 型

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

(2) $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

极限: $x\to a$, $x\to a+0$, $x\to a-0$

$x\to\infty$, $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

极限值: l 可为有限, $\pm\infty$, ∞.

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

引: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ $(\alpha>0)$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha}}{\frac{1}{\ln x}}$ "$\frac{0}{0}$"

麻烦, 甚至不可算。

定理 5.2.3 设 $f(x), g(x)$ 在 $U_0(a,\delta_0)$ 上可导, 且: (1) $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

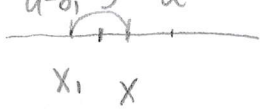
(2) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in U_0(a,\delta_0)$

(3) $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (有限或无穷)

则 $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

证明: 只证 l 有限 $x\to a-0$ 的情形

由 (2)(3) 知 $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta_1\in(a,\delta_0)$ s.t. 当 $a-\delta_1<\xi<a$ 时



有 $\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right| < \frac{\varepsilon}{3}$

则 $\forall x\in(a-\delta_1, a)$, 在 $[a-\delta_1, x]$ 上使用 Cauchy 知 令 $x_1 = a-\delta_1$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ 其中 } \xi\in(x_1,x)$$

减去 l, 得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} - l = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l$$

$$f(x) - f(x_1) - lg(x) + lg(x_1) = \left[\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right](g(x)-g(x_1))$$

$$f(x) - lg(x) = f(x_1) - lg(x_1) + \left[\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right](g(x)-g(x_1))$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} - l = \frac{f(x)-lg(x_1)}{g(x)} + \left[\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right]\left[1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right]$$

由 (1) 知, 对于固定 x_1

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x_1)-lg(x_1)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x\to a-0} \frac{g(x_1)}{g(x)} = 0$$

则 $\exists \delta_2$ s.t. 当 $a-\delta_2<x<a$ 时

$$\left|\frac{f(x_1)-lg(x_1)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}$$

则 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 当 $x\in(a-\delta, a)$ 时

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \leq \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - l\right|\left|1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(x_1)-lg(x_1)}{g(x)}\right| \leq \varepsilon$$

因而有 $\lim\limits_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

注：$x\to a$，$x\to a+0$，$x\to a-0$ 均可证.

定理 5.2.4 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $U=\{x:|x|>h\}$ 上可导，满足 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$

(2) $g'(x)\neq 0$，$\forall x\in U$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ (有限或无穷)

则有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

注：$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 均可证

例 5.2.4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon}$，$(\varepsilon>0)$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon}=0$

例 5.2.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}$ $(\alpha>0)$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\overset{L'H}{=}$ ---

$\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha-[\alpha-[\alpha]+1)x^{\alpha-[\alpha]}}{e^x}$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha-(\alpha-[\alpha])x^{\alpha-[\alpha]-1}}{e^x}$ "$\frac{0}{\infty}$"

$=0$

记号. $n\in\mathbb{N}$，I 区间

C^nI：I 上具有 n 阶连续导数的函数的集合.

$C^\infty I$：任意阶导数 ---

$C^0 I$：连续 ---

例 5.2.6

设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0.\\ 0, & x=0.\end{cases}$

证明 $f(x)\in C^\infty(-\infty,+\infty)$.

分析：只需检查 $x=0$ 处导数

证明：$x\neq 0$ 时 $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$ "$\frac{0}{0}$"

$\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{1}$?

$\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^{-t^2}}{\frac{1}{t}}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0$

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$

$\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t^3}{et^2}$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

$=0$ (L'H 3次)

则有 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$

故 $f(x)\in C^1(-\infty,+\infty)$

归纳可知.

$f^{(n)}(x)=\begin{cases}P_{3n}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

可证 $f^{(n)}(x)\to f^{(n)}(0)=0$ $(x\to 0)$

(练习)

※ 其他不定式

转化成 "$\frac{0}{0}$" 或 "$\frac{\infty}{\infty}$"

例 5.2.7 $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\alpha \ln x \quad (\alpha>0)$ "$0\cdot\infty$"

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \quad \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}} = 0.$$

注: 若 $= \lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x^\alpha}{\frac{1}{\ln x}}$ "$\frac{0}{0}$"

则 L'H 会使计算更复杂。

例 5.2.8 求 $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

$(a_k>0,\ k=1,2,\cdots,n)$

a 为 0 或 $\pm\infty$

解: $y=\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$\ln y = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)$$

先求 $\lim\limits_{x\to a}\ln y$

(1) $a=0$ 时

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)}{x} \quad \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{n\left(a_1^x\ln a_1+\cdots+a_n^x\ln a_n\right)\cdot\frac{1}{n}}{a_1^x+\cdots+a_n^x}$$

$$= \frac{(\ln a_1+\cdots+\ln a_n)\cdot\frac{1}{n}}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\ln(a_1\cdots a_n)$$

则 $\lim\limits_{x\to 0} y = (a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$

(2) (3) $a=\pm\infty$ 时 (练习)

注: (1) L'H 未必可行

eg. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=1$

但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\cos x)$

不存在。

(2) 需要验证条件

eg. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$

错例 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$ "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$\overset{\text{L'H}}{\cancel{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{-\sin x}$$

$$= -1$$