Lecture 19

Plan: 1. 泰勒公式 (Taylor)
2. Peano 余项 (remainder)
3. Lagrange 余项

用简单函数逼近复杂函数

↓

e.g. 多项式 $P_n(x)$

在区间 I 上，用 $P_n(x)$ 逼近 $f(x)$

误差为 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

{ 一点逼近
一个区间上的逼近

回顾. $f(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 上定义

在 x_0 连续 $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + o(1)\ (x \to x_0)$

在 x_0 可导 $\Rightarrow$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\ (x \to x_0)$

在 x_0 有高阶导数

定理 5.3.1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数 $(n \geq 1)$，则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)\ (x \to x_0)$$

证明: 只需证

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^n}\left\{ f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + f^{(n)}(x_0)/n!\,(x-x_0)^n] \right\} = 0$$

使用 L'H $(n-1)$ 次 ("$\frac{0}{0}$") 得

$$LHS = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n!(x-x_0)}\left\{ f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)] \right\}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{n!}\left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right)$$

$= 0 = RHS$. 证毕

注: $P_n = f(x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

称为 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 多项式

$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

为 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 公式 (展开)

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

为 Taylor 公式的余项.

当 $x_0 = 0$ 时，Taylor 公式也称为 Maclaurin 公式.

当 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数

$R_n = o((x-x_0)^n)\ (x \to x_0)$

称为 Peano 余项

※ 唯一性

若 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，且在 x_0 附近

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

则 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ (k = 0, 1, \cdots, n)$

例 5.3.1 $f(x)=e^x$

$f^{(k)}(x)=e^x \quad f^{(k)}(0)=e^0=1$

$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{1}{k!}$

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ (x\to 0)$

$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)\ (x\to 0)$

例 5.3.2 $f(x)=\sin x$

$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$

$f^{(2k)}(0)=0 \quad f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k,\ k=0,1,\cdots,n.$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$+o(x^{2n})\ (x\to 0)$

$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+o(x^{2n})\ (x\to 0)$

例 5.3.3 $f(x)=\cos x$

$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$

$f^{(2k)}(0)=(-1)^k \quad f^{(2k+1)}(0)=0$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$+o(x^{2n+1})\ (x\to 0)$

$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})\ (x\to 0)$

例 5.3.4 $f(x)=\ln(1+x)$

$f'=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$

$f^{(k)}=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$

$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!$

$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$+o(x^n)\ (x\to 0)$

$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)\ (x\to 0)$

例 5.3.5 $f(x)=(1+x)^\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$a_0=1,\ a_k=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$

$+o(x^n)\ (x\to 0)$

注：建议记忆

例 5.3.6. $f(x)=\sin^2(1+x^2)$

$\sin^2(1+x^2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2+2x^2)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\cos 2\cos 2x^2-\sin 2\sin 2x^2\right)$

$\cos(2x^2)=1-\frac{(2x^2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^n(2x^2)^{2n}}{(2n)!}$

$+o(x^{4n+2})\ (x\to 0)$

$\sin(2x^2)=2x^2-\frac{(2x^2)^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$

$+o(x^{4n})\ (x\to 0)$

$\sin^2(1+x^2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2+(\sin 2)x^2+\cdots$

$+\frac{1}{2}\sin 2\,(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{4n-2}$

$-\frac{1}{2}\cos 2\,(-1)^n\frac{2^{2n}x^{4n}}{(2n)!}+o(x^{4n})\ (x\to 0)$

例5.3.7 $\arctan x$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = \cdots$

$= \frac{1}{1-(-x^2)}$

$= 1 - x^2 + x^4 \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}) \quad (x \to 0)$

$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \quad (x \to 0)$

例5.3.9 $e^{\cos x}$ (到 x^4)

分析: $\cos x \to 1 \quad (x \to 0)$

$\cos x - 1 \to 0 \quad (x \to 0)$

$\cos x - 1 = O(x^2)$

$e^{\cos x} = e e^{\cos x - 1}$

$= e\left(1 + (\cos x - 1) + \frac{1}{2}(\cos x - 1)^2 + o(x^4)\right)$

$= e\left[1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)\right.$

$\left. + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)\right]$

$= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4) \quad (x \to 0)$

例5.3.10 $e^x \ln(1+x)$

$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)$

$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$

$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \quad (x \to 0)$

例5.3.11 $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x} - \sqrt{x^2-2x}\right)$

分析 $x \to +\infty \quad \frac{1}{x} \to 0+0$

$\sqrt[3]{x^3+3x} = x\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= x\left(1 + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$\sqrt{x^2-2x} = x\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= x\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x} - \sqrt{x^2-2x}\right)$

$= \lim_{x \to +\infty} x\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + o(1)\right)$

$= 1$