Week 1 Lecture 2

Plan: 1. 几个不等式
2. 函数的定义
3 构造新函数

※回顾，x的绝对值

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$，有

$$-|x| \leq x \leq |x|, \quad -|y| \leq y \leq |y|.$$

相加得

$$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq (|x|+|y|)$$

因此 $|x+y| \leq |x|+|y|$.

称为三角不等式.

可推出 $||x|-|y|| \leq |x-y|$ (练习)

※伯努利(Bernoulli)不等式

对任意的 $x \geq -1$，正整数 n

有 $(1+x)^n \geq 1+nx$.

证明：用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$(1+x)^1 \geq 1+x$，成立

假设已证明

当 $x \geq -1$ 时 $(1+x)^{n-1} \geq 1+(n-1)x$

则 $(1+x)^n \geqslant (1+x)^{n-1}(1+x)$

$\geqslant (1+(n-1)x)(1+x)$

$= 1+nx+(n-1)x^2$

$\geqslant 1+nx$.

则由数学归纳法知，不等式对所有正整数成立.

※算术-几何平均不等式

对n个非负实数 $x_1, \cdots, x_n$

有 $\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$

证明：用数学归纳法

当 $n=1$ 时 $\frac{x_1}{1} \geqslant \sqrt[1]{x_1}$ 成立

假设已知 $n-1$ 时不等式成立

考虑 $x_1, \cdots, x_n$，不妨令 x_n 最大

则若令 $y = \dfrac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$

有 $x_n \geqslant y \geqslant \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}}$.

从而 $\left(\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n$

$= \left(y + \dfrac{x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n-ny}{n}\right)^n$

$= \left(y + \dfrac{(x_1+\cdots+x_{n-1})-(n-1)y+x_n-y}{n}\right)^n$

$= \left(y + \dfrac{x_n-y}{n}\right)^n$

$= y^n + n\,y^{n-1}\left(\dfrac{x_n-y}{n}\right) + \cdots$

$\geqslant y^n + y^{n-1}(x_n-y)$

$= y^n + x_n y^{n-1} - y^n$

$= x_n y^{n-1}$

$\geqslant x_1 \cdots x_{n-1} x_n$

即有 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$

由数学归纳法知，不等式对所有正整数成立.

例 设 $a, b > 0$，求证

① 当 $p>1$ 时 $a^p+b^p \leq (a+b)^p$

② 当 $0<p<1$ 时 $a^p+b^p \geqslant (a+b)^p$

证明：(1) 令 $p=1+h$, $h>0$ 则

$$(a+b)^p = (a+b)(a+b)^h$$
$$= a(a+b)^h + b(a+b)^h$$
$$\geq a\,a^h + b\,b^h$$
$$= a^p + b^p.$$

(2) 令 $p=1-h$, $0<h<1$, 则

$$(a+b)^p = (a+b)(a+b)^{-h}$$
$$= a(a+b)^{-h} + b(a+b)^{-h}$$
$$\leq a\,a^{-h} + b\,b^{-h}$$
$$= a^p + b^p.$$

※ 常用记号

全体正整数、整数、有理数、实数

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

区间

$[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$.

无穷区间

$(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$, $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$,

$(-\infty,+\infty)$.

a 的 ε 邻域, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, 记为 $U(a,\varepsilon)$

a 的去心邻域, $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\setminus\{a\}$, 记为 $U_0(a,\varepsilon)$

※ 函数的定义

Def. 对于给定的集合 $X\subseteq\mathbb{R}$, 如果存在某种对应法则 f, 使得对 X 中的每一个数 x, 在 $\mathbb{R}$ 中存在的唯一的 y 与之对应, 则称对应法则 f 为从 X 到 $\mathbb{R}$ 的一个函数,

记为 $f: X\to\mathbb{R}$

$$x \longmapsto y=f(x),$$

其中 y 为 f 在点 x 的值,

X 为函数 f 的定义域,

数集 $\{f(x): x\in X\}$ 为函数 f 的值域

记为 $f(X)$.

x 为自变量, y 为因变量

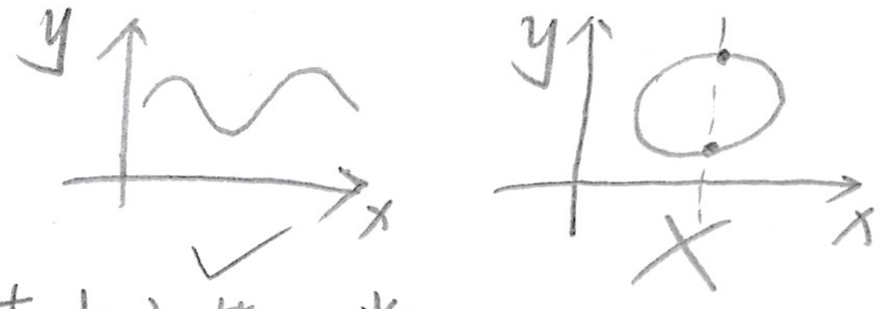
※ 函数3个基本要素:

定义域, 值域, 对应法则

※ 设 $y=f(x)$ 是定义在 X 上的函数

平面点集 $T=\{(x,y): y=f(x), x\in X\}$

为函数的图像.



※ 基本初等函数

① 常值函数 $y=C$

② 幂函数 $y=x^\alpha$ $(\alpha>0)$

③ 指数函数 $y=a^x$ $(a>0)$

④ 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$

⑤ 三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$

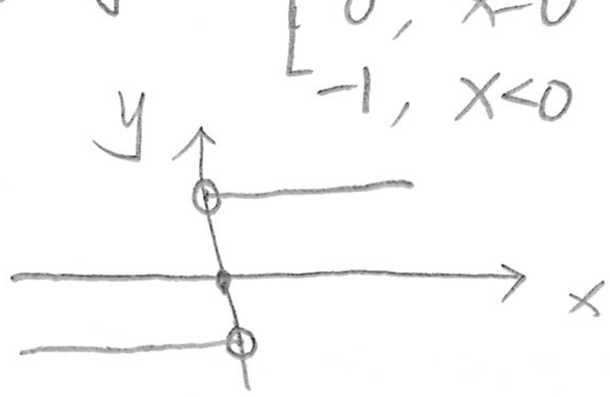
$y=\tan x$, $y=\cot x$

⑥ 反三角函数 $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$,

$y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

例 1.2.1. 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$



例 1.2.2 Dirichlet 函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

例 1.2.3 Gauss 取整函数

$y=[x]$，若 $x\in[n,n+1)$，$[x]=n$.

例 1.2.4 Riemann 函数

$$y=R(x)=\begin{cases}\frac{1}{p}, & x=\frac{q}{p}\in(0,1),\ p,q\in\mathbb{N}\\ & p,q\text{ 互素}.\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}.\\ 1, & x=0\text{ 或 }1.\end{cases}$$

例 1.2.5 特征函数，$E\subset\mathbb{R}$

$$y=\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$$

称为集 E 的特征函数

※ 构造新的函数

1. 四则运算

$(f_1\pm f_2)(x)=f_1(x)\pm f_2(x)$，$x\in X$

$(f_1f_2)(x)=f_1(x)f_2(x)$，$x\in X$

$\frac{f_1}{f_2}(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$，$x\in X$，$f_2(x)\neq0$

2. 限制和延拓

设 $f(x)$，$x\in X_1$ 和 $g(x)$，$x\in X_2$

满足 $X_1\subset X_2$，且 $f(x)\equiv g(x)$，$\forall x\in X_1$.

则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 X_1 上的限制

$g(x)$ 是 $f(x)$ 在 X_2 上的延拓.

例 ① $y_1=|x|$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$y_2=x\,\mathrm{sgn}x$，$x\in(-\infty,+\infty)$

y_1，y_2 是同一个函数

② $f(x)=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$g(x)=x^2$，$x\in(0,+\infty)$

这两个函数不同.

3. 函数的复合

设 $y=f_1(x)$，$x\in X_1$，$y=f_2(x)$，$x\in X_2$

若 $Y_1=f(X_1)\subseteq X_2$，则

定义在 X_1 上的函数

$y=f_2(f_1(x))$ 为 f_1，f_2 的复合函数

记为 $f_2\circ f_1: X_1\to\mathbb{R}$

f_1 内函数，f_2 外函数

一般地 $f\circ g\neq g\circ f$

例 $f(x)=x^4+1$，$x\in\mathbb{R}$　$g(x)=x^4$，$x\in\mathbb{R}$

$f(g(x))=(x^4)^2+1=x^8+1$，$x\in\mathbb{R}$

$g(f(x))=(x^2+1)^4$，$x\in\mathbb{R}$

例 1.2.6 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\text{个}}(x)$

$$f\circ f(x)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$$

假设 $\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{k}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$

则当 $n=k+1$ 时

$$\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k\text{个}}(x)=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}\right)$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}$$

由数学归纳法知

$$\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\text{个}}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$