Lecture 20

Plan: 1. 带Lagrange余项的Taylor泰勒公式

2. 函数的单调性.

回顾 $f(x)$ 在 x_0 处存在 n 阶导数

$$f(x)=f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$R_n=o((x-x_0)^n)$ $(x\to x_0)$ Peano余项

目标：对余项进行定量估计

定理 5.3.2. 设 $f(x)\in C^n[a,b]$，而且在 (a,b) 内存在 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x, x_0\in[a,b]$ 有

$$f(x)=f(x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 介于 x, x_0 之间。

分析：$R_n(x)=o((x-x_0)^n)=O((x-x_0)^{n+1})$

比较 $R_n(x)$ 与 $(x-x_0)^{n+1}$

证明：作两个辅助函数

$$F(t)=f(x)-\left[f(t)+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right],$$

$$G(t)=(x-t)^{n+1}.$$

不妨设 $x_0<x$，则 $F(t), G(t)$ 在 $[x_0,x]$ 上连续，在 (x_0,x) 上可导

且 $F(x)=0$ $G(x)=0$

$$G'(t)=-(n+1)(x-t)^n$$

$$F'(t)=-f'(t)+f'(t)-f''(t)(x-t)+f''(t)(x-t)-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

由 Cauchy 微分中值定理

$$\frac{F(x_0)}{G(x_0)}=\frac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

整理即可。

注：(1) $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ 为 Lagrange 余项

(2) ξ 可表为 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$，其中 $0<\theta<1$.

例 5.3.13. 求 e 的近似值

s.t. 误差不超过 10^{-5}.

解：由带 Lagrange 余项的泰勒展开

$$e^x=1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

令 $x=1$ 得 $(0<\theta<1)$

$$e=1+1+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

欲使 $\frac{e^\theta}{(n+1)!}<10^{-5}$，可令

$$\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<10^{-5}$$

只需取 $n=8$ 即可

$$e\approx 1+1+\cdots+\frac{1}{8!}\approx 2.71828.$$

例 5.3.14. 试证 e 是无理数

证明：反证，假设 e 是无理数

令 $e=\frac{m}{N}$，$m,N\in\mathbb{N}$

由泰勒公式

$$(*)\quad e-(1+1+\cdots+\frac{1}{n!})=\frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

取 $n>N$，当时

由 $1<e^\theta<3$，$0<\frac{e^\theta}{n+1}<1$

$(*)$ 两边乘以 $n!$ 得

$$n!\left(e-(1+\cdots+\frac{1}{n!})\right)=\frac{e^\theta}{n+1}$$

则 L.H.S. 是整数，而 $\frac{e^\theta}{n+1}\in(0,1)$

故矛盾，则 e 是无理数

例 5.3.15. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)$

分析：观察 ① $\sin(2\pi m)=0$，$\forall m\in\mathbb{Z}$

② e 可以被有理数"无限"逼近

解：由泰勒公式

$$e=1+1+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{e^\theta}{(n+2)!}$$

$$n!\,e=\underbrace{(1+\cdots+\frac{1}{n!})n!}+\frac{1}{n+1}+\frac{e^\theta}{(n+1)(n+2)}$$

$$=k+\frac{1}{n+1}+\frac{e^\theta}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)=\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+\frac{e^\theta 2\pi}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n2\pi}{n+1}+o(1)$$

$$=2\pi$$

* Lagrange 插值多项式

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义

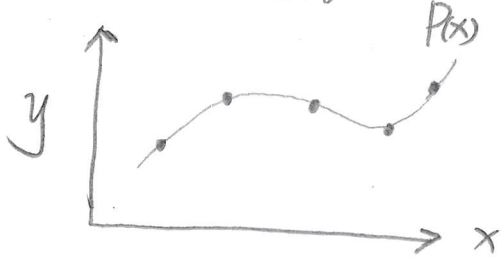
已知 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个不同点

$x_0,x_1,\cdots,x_n$，且知函数值

$$y_i=f(x_i)\quad(i=0,1,\cdots,n)$$

目标：寻找一个多项式 $P(x)$

s.t. $P(x_i)=y_i$。



方法：构造 $l_i(x)$ $(i=0,\cdots,n)$

s.t. $l_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

则 $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$

易知 $P(x_j)=y_j l_j(x_j)=y_j$.

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

记号：$w(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\frac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)}$$

称为 n 阶 Lagrange 插值多项式

$\{l_i(x)\}_{i=1}^n$ 为 Lagrange 插值基函数

$x_0,\cdots x_n$ 为插值节点，

函数的单调性



定理 5.4.1 设 $f(x)$ 在区间 I 内可导，则

(I) $f(x)$ 在 I 内单调上升 $\Leftrightarrow f'(x)\geq 0,\ \forall x\in I$

(II) $f(x)$ 在 I 内单调下降 $\Leftrightarrow f'(x)\leq 0,\ \forall x\in I$.

证明：只证(I)，只考虑开区间

$\Rightarrow$ 当 $f(x)$ 在 I 内单调上升，

$\forall x\in I$，$\exists \Delta x>0$ s.t. $x+\Delta x\in I$

由 $f(x+\Delta x)\geq f(x)$，则

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$$

由 $f(x)$ 在 I 内可导，则

$$f'(x)=f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$$

$\Leftarrow$ $\forall x_1,x_2\in I$，不妨设 $x_1<x_2$

在 $[x_1,x_2]$ 上用 Lagrange 微分中值定理得：$\exists \xi\in(x_1,x_2)$ s.t.

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geq 0$$

故 $f(x_1)\leq f(x_2)$

即 $f(x)$ 在 I 内单调上升

注：$f(x)$ 在 I 上严格单调上升(下降)

$\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) $\forall x\in I$

且在任何子区间上 $f'(x)$ 不恒为 0.

例 5.4.1 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin x-x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

当 $x>0$ 时

$f'(x)=e^{\sin x-x}(\cos\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}\geq 0$

且 $f'(x)=0$ 只在 $x=\frac{1}{2k\pi}$, $k\in\mathbb{N}$ 时

又 $\lim_{x\to 0+0} f(x)=0=f(0)$

则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续

则可知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调上升。

例 5.4.2. 证明 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$

令 $f(x)=\tan x-x-\frac{1}{3}x^3$

$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1-x^2=\tan^2 x-x^2$

当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时 $f'(x)>0$

且 $f(0)=0$，则当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时

$f(x)>f(0)=0$

即有 $\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$