Lecture 23

Plan: 1. 函数作图

2. 原函数与不定积分

作图 { 描点
手工(用导数)

Steps: (1) 函数定义域

(2) 有界性, 奇偶性, 周期性

(3) $f'(x)=0$, ↗↘, 极值

(4) $f''(x)=0$, ∪∩, 拐点

(5) 渐近线(垂直, 水平, 斜)

(6) 其他重要点, (如截距)

(7) 描草图.

例 5.4.13. $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$

(1) 定义域 $x\neq -1$

(5) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$, $x=-1$ 是垂直渐近线

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=-5$

$y=x-5$, 是斜渐近线 $(x\to\infty)$

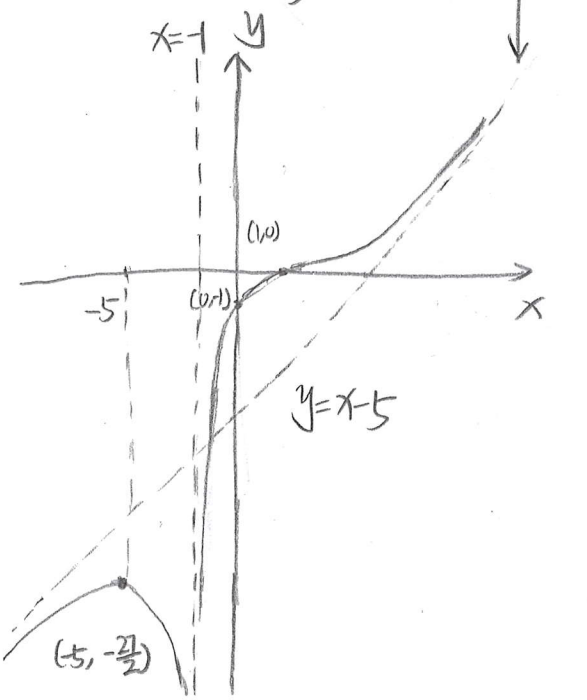
(6) $f(0)=-1$, $f(1)=0$

(3)(4) $f'(x)=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$,

$f'(x)=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-5$

$f''(x)=\frac{24(x-1)}{(x+1)^4} \Rightarrow x_1=1$

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	∄	+	0	+
$f''(x)$	−	−	−	∄	+	0	+
$f(x)$	↗ 凸	$-\frac{27}{2}$ 极大	↘ 凸	∄ 间断	↗ 凹	0 极小	↗ 凹



原函数

Def: 在区间 I 上给定 $f(x)$, 若存在定义在 I 上的函数 $F(x)$, s.t.

$F'(x)=f(x)$, $\forall x\in I$, or $dF(x)=f(x)dx$, $\forall x\in I$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数

注:(1) 若 $F'(x)=G'(x)=f(x)$, 则

$F(x)=G(x)+C$, C 为常数

(2) 若 $F(x)=f(x)$，则 $f(x)$ 的所有原函数为 $F(x)+C$，C 为任意常数

Def 若 $f(x)$ 存在原函数，则称 $f(x)$ 的全体原函数为 $f(x)$ 的不定积分

记为 $\int f(x)dx$

积分号 被积函数 积分变量

记号：

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

$$\int F'(x)dx = F(x)+C$$

$$\int dF(x) = F(x)+C$$

基本不定积分

(1) $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$, $(\alpha\neq -1)$

(2) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$

(3) $\int e^x dx = e^x+C$

(4) $\int \cos x\,dx = \sin x+C$

(5) $\int \sin x\,dx = -\cos x+C$

(6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x+C$

(7) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x+C$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x+C$

(9) $\int \sinh x\,dx = \cosh x+C$

(10) $\int \cosh x\,dx = \sinh x+C$

(11) $\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x+C$

回顾：① $[f(x)\pm g(x)]' = f'(x)\pm g'(x)$

② $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

③ $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$

性质 6.1.1.

$$\int [f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

性质 6.1.2

$$\int (kf(x))dx = k\int f(x)dx$$

例 6.1.1

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx$$

$$= \int \left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C$$

例 6.1.2

$$\int \tan^2 x\,dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$$

$$= \tan x - x + C$$

例 6.1.3 $\int \frac{1}{\sin^2 2x}\,dx$

$= \int \frac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$

$= \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

$= \frac{1}{4}(\tan x - \cot x) + C$

例 $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$

$= \int \frac{1}{(x+2)(x-2)}\,dx$

$= \int \frac{(x+2)-(x-2)}{4(x+2)(x-2)}\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right)dx$

$= \frac{1}{4}\left(\ln|x-2| - \ln|x+2|\right) + C$

$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

☆ 换元法初步

回顾：一阶微分形式不变性

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

于是

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

第一换元法

第二换元法