Lecture 24

Plan: 换元法 (第一类, 第二类)

$u=u(x)$ $f(u)$ $f(u(x))$

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$$

第一换元法

第二换元法

第一类

定理 6.2.1 如果 $\int f(u)du = F(u)+C$

而 $u=u(x)$ 是可微函数, 则

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x))+C$$

证明: 由条件知 $dF(u) = f(u)du$

由一阶微分形式不变, 和 $u=u(x)$ 知

$$dF(u(x)) = F'(u(x))u'(x)dx$$
$$= f(u(x))u'(x)dx$$

则 $\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x))+C$.

例 6.2.2. $\int \frac{dx}{ax+b}$ $(a\neq 0)$

$$= \int \frac{1}{a}\frac{du}{u} \qquad u=ax+b,\ du=adx$$
$$= \frac{1}{a}\ln|u|+C$$
$$= \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$$

例 6.2.3 $\int (ax+b)^n dx$ $(a\neq 0,\ n\neq -1)$

$$= \int u^n \frac{1}{a}du \qquad u=ax+b,\ du=adx$$
$$= \frac{1}{a(n+1)}u^{n+1}+C$$
$$= \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C$$

例 6.2.5 $\int \frac{dx}{x^4-1}$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$$
$$\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\arctan x+C$$

注: 希望 $f(x)dx$ 分解成 $g(u(x))\cdot u'(x)dx$

例 6.2.6 $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$

$u=x^2+1$ $du=2xdx$, $xdx=\frac{1}{2}du$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|+C$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$$

注: 也可写成

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}|x^2+1|+C$$

例 6.2.8 $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$= \int \frac{dx}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}$$
$$= \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$$

例 6.2.9 $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

解法(I): $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

$=\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}}$

$=\int \frac{dx}{\frac{1}{2}\sqrt{1-(2x-1)^2}}$

$=\int \frac{d(2x-1)}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$

$=\arcsin(2x-1)+C$

解法(II): $u=\sqrt{x}$ $du=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2du$, $x=u^2$

$I=\int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}}=2\arcsin u+C$

$=2\arcsin(\sqrt{x})+C$

例 6.2.10 $I=\int \tan x\,dx$

$=\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}$

$=\int \frac{-d\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$

例 6.2.12 $I=\int \frac{dx}{\cos x}$

解法(I): $u=\sin x$ $du=\cos x\,dx$

$I=\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x}=\int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}$

$=\int \frac{du}{1-u^2}=\int \frac{du}{(1+u)(1-u)}$

$=\frac{1}{2}\int(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u})du$

$=\frac{1}{2}\ln|1+u|-\frac{1}{2}\ln|1-u|+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

解法(II) $I=\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$

$=\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}(1-\tan^2\frac{x}{2})}$

$\overset{t=\frac{x}{2}}{=}\int \frac{2dt}{\cos^2 t(1-\tan^2 t)}$

$\overset{s=\tan t}{=}2\int \frac{ds}{1-s^2}$

$=\ln\left|\frac{1+s}{1-s}\right|+C$

$=\ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$

例 6.2.13 $I=\int \frac{dx}{1+x^3}$ $J=\int \frac{x\,dx}{1+x^3}$

$I+J=\int \frac{1+x}{1+x^3}dx$

$=\int \frac{1}{1-x+x^2}dx$

$=\int \frac{1}{\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}-x)^2}dx$

$=\int \frac{\frac{4}{3}dx}{1+(\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{1}{2}-x))^2}$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+C$

$I-J=\int \frac{1-x}{1+x^3}dx=\int \frac{1-x+x^2}{1+x^3}dx-\int \frac{x^2}{1+x^3}dx$

$=\int \frac{1}{1+x}dx-\int \frac{\frac{1}{3}d(x^3+1)}{1+x^3}$

$=\ln|x+1|-\frac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$

$\Rightarrow I=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^3+1|+C$

$J=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln|x^3+1|+C$

定理 6.2.2. 设 $x=x(t)$ 在开区间 I 上可导，且 $x'(t)\neq 0$。如果

$$\int f(x(t))x'(t)dt = G(t)+C,$$

则 $$\int f(x)dx = G(t(x))+C,$$

这里 $t=t(x)$ 是 $x=x(t)$ 的反函数.

证明：$x'(t)\neq 0$，由达布知 $x(t)$ 严格单调，进而 $t(x)$ 存在，连续且严格单调

又由 $x'(t)\neq 0$，$x(t)$ 可导，知 $t'(x)=\frac{1}{x'(t)}$.

由条件知 $G'(t)=f(x(t))x'(t)$

则 $(G(t(x)))' = G'(t(x))\,t'(x)$

$= f(x(t(x)))\,x'(t)\,t'(x)$

$= f(x)$

则 $$\int f(x)dx = G(t(x))+C.$$

例 6.2.14. $I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx$

$x=a\sin t \quad |t|<\frac{\pi}{2} \quad dx=a\cos t\,dt$

则 $I=\int\sqrt{a^2\cos^2 t}\,a\cos t\,dt$

$=\int a^2\cos^2 t\,dt$

$=\int a^2\frac{1}{2}(1+\cos(2t))dt$

$=a^2\frac{t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$

$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C$

$\frac{x}{a}=\sin t$，$t=\arcsin\frac{x}{a}$

$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

$I=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$

回顾：$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ✓

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ ✓

$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$，$\coth x=\frac{1}{\tanh x}$，

$\operatorname{sech}^2 x+\tanh^2 x=1$

$\operatorname{csch}^2 x+\coth^2 x=1$

例 6.2.15 $I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \quad (x>a)$

令 $x=a\cosh t$，$t>0$

$t=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|-\ln a$

$\sqrt{x^2-a^2}=a\sqrt{\cosh^2 t-1}=a\sinh t$

$dx=a\sinh t\,dt$

$I=\int\frac{a\sinh t}{a\sinh t}dt$

$=\int 1\,dt=t+C$

$=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

例 6.2.16 $I=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx \quad (a>0)$

$x=a\sinh t \quad dx=a\cosh t\,dt$

$\sqrt{x^2+a^2}=a\sqrt{\sinh^2 t+1}=a\cosh t$

$I=t+C$

$=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$