Week 4 Lecture 4

Plan: ① 序列的极限

② 无穷小量，无穷大量

第二章. 序列的极限

序列 正整数集$\mathbb{N}$到实数集$\mathbb{R}$的一个函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

$x_1=f(1),\ x_2=f(2),\ \cdots,\ x_n=f(n),\cdots$

记为 $\{x_n\}$　　x_n为通项

（$\{x_n\}=f(\mathbb{N})$也可指序列的数的集合）

有时通项无公式

（阅读 $[0,1)$ 中所有有理数排序）

※ 序列极限 "变化趋势"

例 2.1.1　$x_n=\frac{1}{n}$

例 2.1.2　$x_n=\frac{(-1)^n}{n}$

例 2.1.3.　$x_{2n}=\frac{1}{2n}$，$x_{2n+1}=\frac{1}{2^{2n+1}}$

例 2.1.4　$x_{2n+1}=\frac{1}{n}$，$x_{2n}=0$.

Def 设$\{x_n\}$为一序列

若$\exists\ a\in\mathbb{R}$, s.t. $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$

当$n>N$时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

则称该序列收敛，a为序列的极限

（$\{x_n\}$收敛于a）

记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a\ (n\to\infty)$

反之，$\{x_n\}$为发散序列.

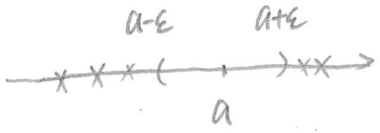
（注意，ε可任意小）

几何意义

$|x_n-a|<\varepsilon$, $\forall n>N$

即 $x_n\in V(a,\varepsilon)=(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$, $\forall n>N$

$\forall\varepsilon>0$, $V(a,\varepsilon)$外只有$\{x_n\}$有限项。



例 2.1.5 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

证明 $\forall\varepsilon>0$. 要使

$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$

则有 $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$

于是，$\forall\varepsilon>0$，取$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，就有

当$n>N$时 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon$

由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ 成立.

例 2.1.6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ $(|q|<1)$

证明：当$q=0$，显然成立

当$q\neq0$ $\forall\varepsilon>0$ 要使（不妨设$\varepsilon<1$）

$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$

只要 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$

注意 $\ln|q|<0$ $\ln\varepsilon<0$，则 $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$

所以 $\forall\varepsilon>0$（$\varepsilon<1$）取 $N=[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}]$

则当$n>N$时 $|q^n-0|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n=0$ 成立

例 2.1.7 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}=\frac{1}{3}$

证明：$\forall n\in\mathbb{N}$

$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}-\frac{1}{3}\right|=\frac{3n-2}{3(3n^2+2n+4)}<\frac{5n}{9n^2}=\frac{5}{9n}$

于是 $\forall \varepsilon>0$，取 $N=[\frac{5}{9\varepsilon}]+1$，

则当 $n>N$ 时

$$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}-\frac{1}{3}\right|<\frac{5}{9n}<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}=\frac{1}{3}$.

注：不等式估计可适当放大.

比如 $\forall \varepsilon$，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$.

※ 发散序列（肯定的语气）

$\{x_n\}$ 不收敛于 a，则 $\exists \varepsilon_0>0$，$V(a,\varepsilon_0)$ 以外有 $\{x_n\}$ 的无穷多项。

Def. 设 $\{x_n\}$ 是一个序列

$\forall a\in\mathbb{R}$，$\exists \varepsilon_0>0$ s.t.

$\forall N\in\mathbb{N}$，总有 $n_0>N$，满足 $|x_{n_0}-a|>\varepsilon_0$。

则 $\{x_n\}$ 是发散序列

注意："$\forall$"与"$\exists$"的互换

例 1.2.9. 证明 $\{x_n\}$ 发散

$$x_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & n=2k-1\\ n, & n=2k\end{cases},\ k=1,2,\cdots$$

证明：$\forall a\in\mathbb{R}$ 取 $\varepsilon_0=1$

则 $\forall N\in\mathbb{N}$，取 $n_0=2k_0>\max\{N,a+1\}$

其中 $k_0\in\mathbb{N}$.

则 $n_0>N$

且 $x_{n_0}-a=2k_0-a>1=\varepsilon_0$

即 a 不是 $\{x_n\}$ 的极限

由 a 的任意性知，$\{x_n\}$ 发散

※无穷小量

Def. 设 $\{x_n\}$ 是一个序列

若 $x_n\to 0$ $(n\to\infty)$ 则称 $\{x_n\}$ 为无穷小量

记为 $x_n=o(1)$ $(n\to\infty)$

无穷小量是极限为0的一个变量

例 2.1.10 证明 $\{\frac{a^n}{n!}\}$ 是无穷小量 $(a>1)$

证明：当 $n>[a]+1$，

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]}\cdot\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n}$$

$$<\frac{a^{[a]}}{[a]!}\frac{a}{n}\triangleq C\frac{a}{n}$$

$\forall \varepsilon>0$，要使 （不正规记号）

$|\frac{a^n}{n!}-0|<\varepsilon$，只需 $C\frac{a}{n}<\varepsilon$

即 $n>\frac{Ca}{\varepsilon}$.

于是，$\forall \varepsilon>0$，取 $N=[\frac{Ca}{\varepsilon}]+1$

则若 $n>N$，就有 $|\frac{a^n}{n!}-0|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$,

$\{\frac{a^n}{n!}\}$ 是无穷小量

例 2.1.11 略

定理 2.1.1 设 $\{x_n\}$ 是一个序列

(1) $\{x_n\}$ 是无穷小量

$\Leftrightarrow$ $\{|x_n|\}$ 是无穷小量

(2) 若 $\{x_n\}$ 是无穷小量

M 是一个常数，则 $\{Mx_n\}$ 是无穷小量

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

$\Leftrightarrow$ $\{x_n-a\}$ 是无穷小量

（证明略）

无穷大量

观察 $x_n=(-1)^n$ 和 $x_n=(-1)^n n$

Def. 设 $\{x_n\}$ 为一个序列

① 若 $\forall M>0, \exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时有 $x_n>M$，则称 $\{x_n\}$ 为正无穷大量（$\{x_n\}$ 极限为 $+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$）

② 若 $\forall M>0, \exists N\in\mathbb{N}$，当 $n>N$ 时有 $x_n<-M$，则称 $\{x_n\}$ 为负无穷大量（$\{x_n\}$ 极限为 $-\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$）

③ 若 $\{|x_n|\}$ 是正无穷大量，则称 $\{x_n\}$ 为无穷大量

注意：有穷极限 a $\Rightarrow$ 收敛到 a

无穷极限 $\Rightarrow$ 发散到 $+\infty$、$-\infty$ 或 ∞。

例 2.1.12 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$

证明：当 $n>2^k$ 时

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$>1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2\text{个}}+\cdots\underbrace{\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{个}}$$

$$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k-1\text{个}}$$

$$>\frac{k}{2}$$

故 $\forall M>0$，要 $x_n>M$

需取 $k>2M$，即可取 $N=2^{[2M]+1}$

则当 $n>N$ 时 $x_n>\frac{[2M]+1}{2}>\frac{2M}{2}=M$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$。

定理 2.1.2 假定 $x_n\neq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\{x_n\}$ 是无穷小量 $\Leftrightarrow$ $\{\frac{1}{x_n}\}$ 是无穷大量

证明略

例 2.1.13 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$（$a$ 有限或 $\pm\infty$）

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=a$.

证明：(A) a 有限时

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\forall\varepsilon>0$ $\exists N_1\in\mathbb{N}$ s.t. 当 $n>N_1$ 时 $|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$

而对于取定的 N_1 由于

$|x_1-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|$ 不随 n 变化

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x_1-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}=0$

故对同一 $\varepsilon>0$，$\exists N_2\in\mathbb{N}$，s.t.

当 $n>N_2$ 时 $\frac{|x_1-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$

故取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时

$$\left|\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}-a\right|$$

$$\leq\frac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_n-a|}{n}$$

$$=\frac{|x_1-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}$$

$$+\frac{|x_{N_1+1}-a|+\cdots+|x_n-a|}{n}$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{2n}\varepsilon<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}=a$

(B) $\pm\infty$ 时，练习。