Week 5 Lecture 6

Plan: 1. 单调收敛定理
2. 两个常数

Def. 若序列 $\{x_n\}$ 满足

$x_n \le x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

则称 $\{x_n\}$ 是单调上升序列.

若满足 $x_n \ge x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

则称 $\{x_n\}$ 是单调下降序列.

统称单调序列.

定理 2.3.1 (单调收敛原理)

单调有界序列必收敛.

证明: 只证单调上升情形

设 $\{x_n\}$ 单调上升, 且有上界 M.

数集 $\{x_n\}$ 非空有上界, 由确界定理,

数集 $\{x_n\}$ 有上确界, 令 $a = \sup\{x_n\}$

则由定义知:

(1) $x_n \le a$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$a - \varepsilon < x_N \le a$

则 $n > N$ 时 $a - \varepsilon < x_N \le x_n \le a$

因而 $|x_n - a| < \varepsilon$

故证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ □

例 2.3.1 设 $A > 0$, $x_1 > 0$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})$, $n \in \mathbb{N}$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求它的值

易知 $x_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

故 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n})$

$\ge \sqrt{x_n \frac{A}{x_n}} = \sqrt{A}$, $n \ge 2$

则 $\{x_n\}$ 有下界

另外 $x_{n+1} - x_n$

$= \frac{1}{2}(x_n + \frac{A}{x_n}) - x_n$

$= \frac{A - x_n^2}{2x_n} \le 0$

则 $\{x_n\}$ 单调下降

由单调收敛原理知, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 取极限知

$a = \frac{1}{2}(a + \frac{A}{a})$

则 $a = \pm\sqrt{A}$,

由保序性 $a \ge \sqrt{A}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$.

例 2.3.2 $x_1 = 1$, $x_{n+1} = -x_n$, $n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在

若令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a = -a$, $a = 0$.

这是错的!

例2.3.3 设序列$\{a_n\}$满足

$a_1=1$, $a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$, $n\in\mathbb{N}$

证明$\{a_n\}$收敛，并求极限

观察$\{a_{2k+1}\}$单调上升，$\{a_{2k}\}$单调下降

可证明：$\lim_{n\to\infty}x_n=a$的充要条件是

$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=a=\lim_{n\to\infty}x_{2n+1}$ (练习)

证明：易知 $a_{n+2}=1+\frac{1}{a_{n+1}}$

$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{a_n}}$

$=2-\frac{1}{a_n+1}$.

$$a_{n+2}-a_n=\frac{a_n-a_{n-2}}{(a_{n-2}+1)(a_n+1)} \quad (*)$$

易知 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_k\in(1,2)$, $k=3,4,\cdots$

由(*)易证$\{a_{2k+1}\}$单调上升，

而$\{a_{2k}\}$单调下降（数学归纳）

由单调收敛原理知$\{a_{2k+1}\}$$\{a_{2k}\}$收敛

令 $\lim_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$, $\lim_{k\to\infty}a_{2k}=b$

易知 $a,b\in[1,2]$

$a=2-\frac{1}{a+1}$, $b=2-\frac{1}{b+1}$

则有 $a=b=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

于是$\{a_n\}$收敛，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

无理数e

考察 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $y_n=(1+\frac{1}{n})x_n>x_n$

$x_n=\frac{(n+1)^n}{n^n}$, $y_n=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}}$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\frac{n+1}{n}$$

$$=\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\frac{n+1}{n}$$

$$\geq\left[1-\frac{1}{n+1}\right]\frac{n+1}{n}$$ (伯努利)

$$=1$$

$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n+2}$$

$$\geq\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)\frac{n+1}{n+2}$$

$$=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1$$

则$\{x_n\}$单调上升有上界

$\{y_n\}$单调下降有下界

于是$\{x_n\}$，$\{y_n\}$收敛

由 $y_n=(1+\frac{1}{n})x_n$ 知

则$\{x_n\}$，$\{y_n\}$极限相同记为e.

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e$$

$e=2.71828\cdots$

$\ln x=\log_e x$

已知 $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (\square)$$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

故 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $(\triangle)$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

注意 $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}=\ln(n+1)$$

故 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}<\ln(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ $(\divideontimes)$

考虑 $Z_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$

由$(\divideontimes)$知 $Z_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$

$$>\ln(n+1)-\ln n>0$$

$$Z_n-Z_{n+1}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)-\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right)$$

$$=\ln(n+1)-\ln n-\frac{1}{n+1}$$

$$=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}>0 \quad (\text{由}(\triangle))$$

则 $\{Z_n\}$ 单调下降有下界，则收敛

记 $C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$

C 为欧拉常数，$C=0.577216\cdots$

令 $\alpha_n=1+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n-C$

则有 $\alpha_n=o(1)$ $(n\to\infty)$

由$(\square)$连乘，得

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e^n<\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

化解可得 $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<\left(\frac{n+1}{e}\right)^n(n+1)$

$$\frac{n+1}{e}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{e}\sqrt[n]{n+1}$$

可知 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$

且可证 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$ (练习)

例2.3.4. 求 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$

记 $S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$$S_{2n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}-\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$=C+\ln 2n+\alpha_{2n}-(C+\ln n+\alpha_n)$$

$$=\ln 2+\alpha_{2n}-\alpha_n$$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2$

$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2$

则 $\lim_{n\to\infty}S_n=\ln 2$