Week 6 Lecture 7

Plan: 1. 闭区间套
2. 有限覆盖
3. 聚点原理

※ 定理 2.4.1 (闭区间套定理)

设 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间

满足: (1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, $n=1,2,\cdots$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

则存在唯一的 $c \in \mathbb{R}$, s.t.

$$\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

证明: 由(1)知, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$$

$\{a_n\}$ 单调上升, $\forall n \in \mathbb{N}$, b_n 为 $\{a_n\}$ 上界

$\{b_n\}$ 单调下降, $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n 为 $\{b_n\}$ 下界

则 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均收敛.

令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_n\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b = \inf\{b_n\}$

则 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \le a \le b \le b_n$

由(2) $a - b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

记 $c = a = b$.

故 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \le c \le b_n$

若有 $d \in \mathbb{R}$, 满足

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \le d \le b_n$.

则有 $d = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

故证了唯一性. ∎

注: (1) 若区间为开, 不一定成立

e.g. $(0, \frac{1}{n})$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n}) = \phi$.

(2) "闭区间套" 可松弛地为 "两两有公共点"。

例 2.4.1. 设 $\{[a_n, b_n]\}$, 满足

$[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \phi$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$.

则存在 $c \in \mathbb{R}$, s.t. $c \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

证明: $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j]$, 则有

$a_i \le b_j$, $a_j \le b_i$.

由 i, j 任意性知, $\forall n$, b_n 为 $\{a_n\}$ 上界

令 $c = \sup\{a_n\}$ (由确界定理)

则易知 $a_n \le c \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

※ Def.

设 $A \subseteq \mathbb{R}$, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一族子集组成的集合, 而 Λ 是一个指标集

(1) 若 $A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, 则 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 A 的一个覆盖.

(2) 若 $A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$, E_λ 是开区间

则 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 A 的一个开覆盖

定理2.4.2 (有限覆盖定理)

设$[a,b]$是一个闭区间，$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是$[a,b]$的一个开覆盖，则存在一个有限子覆盖.

即 $\exists E_1,\cdots,E_N\in\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, s.t.

$$[a,b]\subseteq\bigcup_{j=1}^{N}E_j$$

证明：若不然，则将$[a,b]$二等分必有一个不存在$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的有限子覆盖，记为$[a_1,b_1]$

再将$[a_1,b_1]$等分，如此下去得一列闭区间$[a_n,b_n]$，满足

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$, $\forall n\in\mathbb{N}$

(2) $b_n-a_n\to0\ (n\to\infty)$.

(3) $\forall n$, $[a_n,b_n]$不能被$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的有限子覆盖所覆盖.

由闭区间套定理，存在唯一ξ，s.t.

$$\{\xi\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$$

由$\xi\in[a,b]$，则$\exists\lambda_0\in\Lambda$ s.t.

$$\xi\in E_{\lambda_0}=(c,d)$$

由$\{a_n\}$单调上升，$\{b_n\}$单调下降

且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

故$\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. 若$n>N$

则 $[a_n,b_n]\subseteq(c,d)$

这与(3)矛盾，故证. 图

注：(1) 闭区间不能为开区间

$(\frac{1}{n},\frac{2}{n})$，$n=1,2,\cdots$是$(0,1)$的开覆盖，但无有限子覆盖.

(2) 应用中，局部$\Rightarrow$整体。

例2.4.2. 设$f(x)$定义在$[a,b]$上

$\forall x\in[a,b]$ $\exists\delta(x)>0$, s.t.

$f(x)$在$U(x,\delta(x))\cap[a,b]$上有界.

则$f(x)$在$[a,b]$上有界

证明：记$f(x)$在$U(x,\delta(x))\cap[a,b]$上的界为M_x，$M_x>0$

则$\mathcal{H}=\{U(x,\delta(x)):\forall x\in[a,b]\}$

是$[a,b]$的一个开覆盖

则存在有限子覆盖

$$[a,b]\subseteq\bigcup_{k=1}^{N}U(x_k,\delta(x_k))$$

令$M=\max\{M_{x_1},\cdots,M_{x_N}\}$

从而$\forall x\in[a,b]$，$|f(x)|\le M$.

即$f(x)$在$[a,b]$上有理.

例2.4.3 $[0,1]$区间全体实数不可列.

(阅读教材)

聚点原理

Def 设 $E \subseteq \mathbb{R}$，若 $x_0 \in \mathbb{R}$ 满足 $\forall \delta > 0$，有 $U_0(x_0, \delta) \cap E \neq \phi$，则称 x_0 是 E 的一个聚点.

注：(1) x_0 不一定属于 E

(2) 下面命题等价（练习）

(i) x_0 是 E 的聚点，

(ii) $\forall \delta > 0$，在 $U(x_0, \delta) \cap E$ 无穷多点，

(iii) 存在 E 中互异的点组成序列 $\{x_n\}$，s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

(3) 若 $x_0 \in E$，但不是 E 的聚点，则称是 E 的孤立点，

由定义，$\exists \delta > 0$. s.t. $U(x_0, \delta) \cap E = \{x_0\}$

例 2.4.4 $E = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\}$

0 是其聚点，$\forall n$，$\frac{1}{n}$ 是孤立点.

例 2.4.5 $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

其聚点全体是 $[0,1]$，无孤立点，

定理 2.4.3 (聚点原理)

$\mathbb{R}$ 中的任何一个有界无穷子集至少有一个聚点，（证略）

分析：E 有界 $E \subseteq [a,b]$

(1) 构造至多含 E 中一元素的 E 的有覆盖

$\Rightarrow$ 有限子覆盖，与无穷矛盾

(2) 构造闭区间套，找出一个聚点，

Def 设 $\{x_n\}$ 是一个序列，由 $\{x_n\}$ 的元素按原顺序构成的序列 $\{x_{n_k}\}$ 称为 $\{x_n\}$ 的一个子序列

定理 2.4.4. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，对 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$

(b) 若 $\{x_n\}$ 有两个极限不同的子列，则 $\{x_n\}$ 发散.

例 2.4.7 $x_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n})^n$，$n = 1, \cdots$

试证 $\{x_n\}$ 发散

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{2k})^{2k} = e$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (1 - \frac{1}{2k+1})^{2k+1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{2k})^{-2k} (1 + \frac{1}{2k})^{-1} = \frac{1}{e}$$

故 $\{x_n\}$ 发散

定理 2.4.5 (Bolzano-Weierstrass)

任何有界序列必有收敛的子列

分析：由聚点原理易证