Week 8 Lecture 12

Plan: 1. 一致连续

2. 无穷大(小)量的阶

考查 $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,1)$, 连续

$|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{|xx_0|}$

对于 $\varepsilon>0$, 若 $x_0\to 0+0$, 则需要相应小的 δ, 才有 $|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}|<\varepsilon$ 当 $x\in U(x_0,\delta)$

Def 设函数 $f(x)$ 在 I 上有定义

若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 当 $x_1,x_2\in I$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续

注: 一致连续 $\Rightarrow$ 连续

定理 3.3.5 设 $f(x)$ 在区间 I 上定义, 则 $f(x)$ 在 I 上一致连续

$\Leftrightarrow$ 对任意 $\{x_n'\}\subset I$, $\{x_n''\}\subset I$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$, 必有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$

例 3.3.8 证明 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续, 但对 $x_0>0$, 在 $[x_0,+\infty)$ 上一致连续

分析: 证伪, 用序列

证真, 用定义.

证明: 取 $\varepsilon_0=1$, $x_n'=\frac{1}{n}$, $x_n''=\frac{1}{n+1}$

则 $x_n'-x_n''\to 0$ $(n\to\infty)$

但 $|x_n'-x_n''|=1$

所以 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致连续

对 $x_0>0$, $\forall x_1,x_2\in[x_0,+\infty)$

有 $|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}|=\frac{|x_1-x_2|}{x_1x_2}\le\frac{|x_1-x_2|}{x_0^2}$

则 $\forall\varepsilon>0$ 取 $\delta=x_0^2\varepsilon>0$ 则

当 $x_1,x_2\in[x_0,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时

$|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}|\le\frac{|x_1-x_2|}{x_0^2}<\varepsilon$

所以 $f(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上一致连续

定理 3.3.6 (康托尔 Cantor's)

设 $f(x)\in C[a,b]$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

分析: 有限覆盖 + 柯西

证明: 定义

$$F(x)=\begin{cases}f(a), & x\in(-\infty,a)\\ f(x), & x\in[a,b]\\ f(b), & x\in(b,+\infty)\end{cases}$$

$F(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

$\forall\varepsilon>0$, $x\in[a,b]$, 由连续性

$\exists\delta_x>0$ s.t. 当 $x',x''\in U(x,2\delta_x)$ 时

$|F(x')-F(x'')|<\varepsilon$

显然，$\{U(x,\delta_x): x\in[a,b]\}$ 是 $[a,b]$ 的一个开覆盖，必有有限个 $x_1,\cdots,x_m$

s.t. $[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{m}U(x_i,\delta_{x_i})$

令 $\delta=\min\{\delta_{x_j}: j=1,\cdots,m\}$，$\delta>0$

则当 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x''-x'|<\delta$ 时

必有一个 $U(x_j,\delta_{x_j})$ s.t. $x'\in U(x_j,\delta_{x_j})$

而 $|x''-x_j|\le|x''-x'|+|x'-x_j|\le 2\delta_x$

于是 $x',x''\in U(x_j,2\delta_{x_j})$

则 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

于是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

注：$f(x)$ 在 (a,b) 上连续，则

$f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续 $\Leftrightarrow$

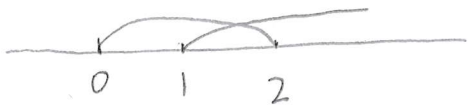
$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 都存在

证略.

例 3.3.10 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续

证明：$f(x)\in C[0,+\infty)$

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\frac{|x'-x''|}{|\sqrt{x'}+\sqrt{x''}|}$$



$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta_1=\varepsilon$，则当 $x',x''\in[1,\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|\le|x'-x''|<\varepsilon$

由康托尔定理 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 一致连续

$\exists\delta_2>0$，s.t. 当 $x',x''\in[0,2]$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时有 $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|<\varepsilon$

因此取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,1\}$，

对 $x',x''\in[0,+\infty)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时

必有 x',x'' 同时落在 $[0,2]$ 或 $[1,+\infty)$ 上

因而 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

故 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

无穷大(小)量

定义 3.4.1 设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ $(\delta_0>0)$ 上有定义

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\ (\infty)$，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的一个无穷小(大)量.

定义 3.4.2，设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量，且 $g(x)\neq0$，$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小量，$f(x)=o(g(x))$ $(x\to x_0)$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l\neq0$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小量

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小量，$f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$

(4) 若 $\exists M>0$，$\delta>0$ s.t. $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 有 $|f(x)|\le M|g(x)|$，$f(x)=O(g(x))$ $(x\to x_0)$

特别地，$f(x)=O(1)$ $(x\to x_0)$ 有界

$f(x)=o(1)$ $(x\to x_0)$ 无穷小.

注：① 可推广 $\pm 0, \pm\infty, \infty$

② 无穷大量，类似

例 3.4.1 $y = x^m \sin\frac{1}{x} = O(x^m)\ (x \to 0)$

例 3.4.5 $f(x) = \log_a x\ (a>1)$

$g(x) = x^\mu\ (\mu > 0)$

证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

证明：令 $y = \log_a x$，则 $x = a^y$

当 $x \to +\infty$ 时 $y \to +\infty$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\mu} = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{y}{(a^\mu)^y} = 0$

注：令 $a>1$，$\mu>0$ 则

$x^\mu = o(a^x)\ (x\to+\infty)$

$\log_a x = o(x^\mu)\ (x\to+\infty)$

例 3.4.6 当 $x \to 0$ 时

(1) $\sin x \sim x$

(2) $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

(3) $\tan x \sim x$

(4) $\arcsin x \sim x$

(5) $\ln(1+x) \sim x$

(6) $e^x - 1 \sim x$

(7) $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$

证明 (5) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

(6) 令 $e^x - 1 = t$，则 $x = \ln(1+t)$

当 $x\to0$ 时 $t\to0$

则 $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

(7) Euler's $a = e^{\ln a}$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\mu\ln(1+x)} - 1}{\mu x}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\mu\ln(1+x)} - 1}{\mu\ln(1+x)} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$t = \mu\ln(1+x)$

$= \lim\limits_{t\to0} \frac{e^t - 1}{t} \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

$= 1 \cdot 1 = 1$

定理 3.4.2

若 $h(x) \sim l(x)\ (x \to x_0)$ 则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)l(x)$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} l(x)\frac{f(x)}{g(x)}$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{l(x)g(x)}$

注：只用于乘积，商的极限

$\lim\limits_{x\to0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x} = \frac{1}{2}$

但 $\lim\limits_{x\to0} \frac{x-x}{x^3} = 0$